Theoretische Mechanik

WS 2018/19 **Aufgabenblatt 10** **19.12.2018**

Aufgabe 30

Die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt unter dem Einfluss einer zur Geschwindigkeit proportionalen Reibungskraft lautet in einer Dimension

$$\frac{dv}{dt} + \alpha v = 0 \quad .$$

a) Bestimmen Sie die Fundamentallösung (= Greensche Funktion) der inhomogenen Differentialgleichung

$$\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t} + \alpha G(t,\tau) = \delta(t-\tau) \quad .$$

Zeigen Sie insbesondere:

1. $G(t,\tau)$ erfüllt $t<\tau$ und $t>\tau$ die *homogene* Differentialgleichung.
2. $G(t,\tau)$ macht bei $t=\tau$ einen Sprung: $\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[G(t+\epsilon,\tau)-G(t-\epsilon,\tau)\right]=1$.
3. Für $t<\tau$ kann $G(t,\tau)\equiv 0$ gewählt werden. **(1 Punkt)**

b) Zeigen Sie, dass

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} + \alpha v = f(t)$$

ist. Wie lautet demnach die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung? **(1 Punkt)**

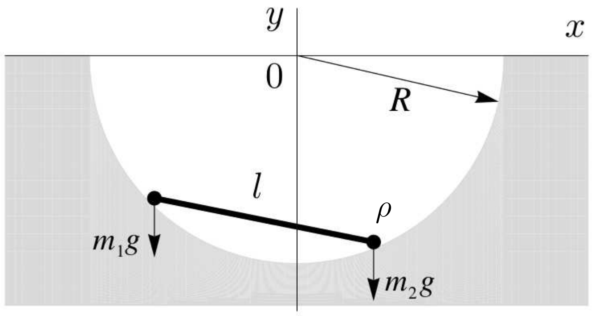
c) Bestimmen Sie die Lösung von

$$\frac{dv}{dt} + \alpha v = f_0 \sin(\omega t)$$

zur Anfangsbedingung $v(0)=v_0$. **(1 Punkt)**

Aufgabe 31

Zwei Punktmassen m_1 und m_2, die durch eine starre, masselose Stange der Länge l miteinander verbunden sind, können sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft in einer kreisförmigen Mulde des festen Radius $R > l/2$ bewegen. Die Bewegung sei beschränkt auf die xy-Ebene.



a) Stellen Sie zunächst die Zwangsbedingungen in *kartesischen* Koordinaten auf. Die virtuellen Verrückungen δr_1 und δr_2 müssen mit den Zwangsbedingungen verträglich sein. Daraus ergeben sich drei Bedingungsgleichungen. Berechnen Sie diese.
Hinweis: Die infinitesimale virtuelle Änderung z.B. einer Funktion zweier Variablen $f(x, y)$ ist gegeben durch $\delta f = (\partial f/\partial x)\delta x + (\partial f/\partial y)\delta y$. **(1 Punkt)**

b) Berechnen Sie die virtuelle Arbeit $\delta A = \vec{F}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta\vec{r}_2$, wobei $\vec{F}_1$ die Summe aller Kräfte an die Masse m_1 und $\vec{F}_2$ diejenige an die Masse m_2 ist. Welche Gleichung ergibt sich für das Gleichgewicht? **(1 Punkt)**

c) Berechnen Sie die x-Koordinaten der beiden Massen, die sowohl mit den Bedingungsgleichungen aus Teilaufgabe a) als auch mit der Gleichgewichtsbedingung aus Teilaufgabe b) kompatibel sind. Was ergäbe sich für den Spezialfall $m_2 = m_1$? **(1 Punkt)**

d) Wieviele Freiheitsgrade gibt es in diesem Problem? **(1 Punkt)**

e) Beschreiben Sie das Problem in Polarkoordinaten mit $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(\phi_1)$ und $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(\phi_2)$, wobei ϕ_1 und ϕ_2 die Auslenkungswinkel aus der Vertikalen sind. Berechnen Sie in diesen Variablen die virtuelle Arbeit und finden Sie die Gleichgewichtslage.
Hinweis: Benutzen Sie die trigonometrischen Beziehungen
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ und $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$. **(2 Punkte)**

Aufgabe 32 **(Schriftlich abzugeben am 9.1.2019 im Seminar)**

Ein Teilchen bewege sich im Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \alpha \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

mit einer Konstante $\alpha > 0$. Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit sind die Gleichgewichtslagen auf verschiedenen z. B. durch eine Rinne vorgegebenen Kurven zu untersuchen.

a) Zeigen Sie, dass alle Punkte auf einer Gerade $y = bx$ mit einer Konstanten b im obigen Feld Gleichgewichtspunkte sind. **(1 Punkt)**

b) Zeigen Sie, dass es auf einem Kreis $y^2 + x^2 = R^2$ des Radius R im obigen Feld gar keine Gleichgewichtspunkte gibt. **(1 Punkt)**

c) Zeigen Sie, dass es auf einer Parabel $y = b(x - x_0)^2$ mit Konstanten b, $x_0 \neq 0$ genau zwei Gleichgewichtspunkte gibt. Bestimmen Sie diese und argumentieren Sie, ob es sich um stabile oder labile Gleichgewichte handelt. **(1 Punkt)**

Vorrechnen der Aufgaben 30 und 31: 9. Januar 2019