Inhalt

Abschnitt I: Thermodynamik der Werkstoffe und Strukturen **4**

Eindimensionale Wärmeleitung 5

Thermoelastizität 16

Viskoelastizität 45

Hyperelastizität 75

Abschnitt II: Elastoplastizität **84**

Abschnitt III: Mechanische Werkstoffprüfung **94**

Abschnitt IV: Theorie gedrungener Stäbe **114**

Abschnitt I

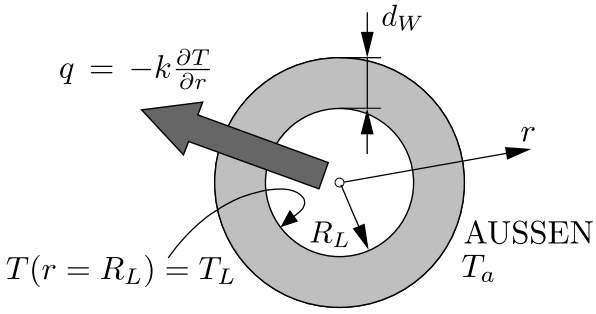
THERMODYNAMIK DER WERKSTOFFE UND STRUKTUREN

Eindimensionale Wärmeleitung

Kolloquium SS2021
7. Beispiel: 1D Wärmeleitung – Fernwärmeleitung

Angabe:

Gegeben: Es wird eine gerade Fernwärmeleitung mit kreisförmigen Querschnitt im Erdreich verlegt. Die Temperatur des umliegenden Erdreichs liegt vor dem Einbau konstant bei $T_a = +5\,°\mathrm{C}$. Die Fernwärmeleitung besteht aus einer Wasserleitung im Inneren und einer umhüllenden Dämmschicht. Die Wasserleitung weist einen Außenradius von $R_L = 3{,}05\,\mathrm{cm}$ auf. Die Temperatur der Leitung beträgt dabei $T_L = +100\,°\mathrm{C}$. In der Dämmschicht ist ein Material mit einer Wärmeleitfähigkeit von $k_W = 0{,}0275\,\mathrm{W/mK}$ verbaut. Der Wärmestrom $q = -k\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}$ darf zwischen der Leitung und der Wärmedämmung $103{,}1\,\mathrm{W/m^2}$ nicht übersteigen.



Die Lösung der zugrundeliegenden eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung in zylindrischen Koordinaten mit in radialer $r-$Richtung strömender Wärme lautet:

$$T(r,t) = C_1(t)\ln\left(\frac{r}{R_L}\right) + C_2$$

Hinweise: Beachten Sie dabei, dass $\frac{\partial\, ln(r/R_L)}{\partial r} = \frac{1}{r}$ *gilt.*

Gesucht ist die notwendige Mindestdicke $d_{W,min}$ [cm] der Wärmedämmung, sodass die Oberflächentemperatur an der Außenseite der Dämmschicht $\approx T_a = +5\,°\mathrm{C}$ nicht überschreitet.

Lösung:

Bestimmen von C_1 über den Wärmestrom $q(r) = -k\,\frac{C_1}{r}$ an der Stelle R_L.

$$q(R_L) = -k\,\frac{C_1}{R_L} = 103{,}1\,\mathrm{W/m^2} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{q(R_L)\,R_L}{k} = -114{,}3473\,°\mathrm{C/m}$$

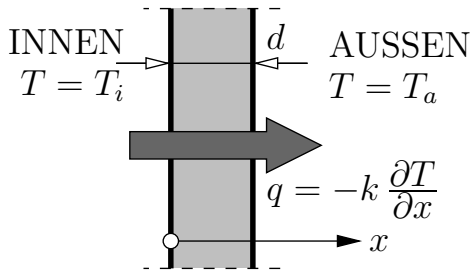
Temperaturfeld für $r = R_L = 3{,}05\,\mathrm{cm}$ formulieren und C_2 bestimmen:

$$\begin{aligned}
T(R_L,t) &= 100\,°\mathrm{C} = C_1\,\ln\tfrac{R_L}{R_L} + C_2 \qquad \Rightarrow C_2 = +100\,°\mathrm{C}\\
T(R_L + d_{W,min},t) &= +5\,°\mathrm{C} = -114{,}3473\,°\mathrm{C/m}\cdot\ln\left[\tfrac{R_L+d_{W,min}}{R_L}\right] + 100\,°\mathrm{C}\\
\Rightarrow\ d_{W,min} &= \exp\left[\tfrac{+5\,°\mathrm{C}-100\,°\mathrm{C}}{-114{,}3473\,°\mathrm{C/m}}\right]\cdot 3{,}05\,\mathrm{cm} - 3{,}05\,\mathrm{cm} \qquad = 3{,}9502\,\mathrm{cm}
\end{aligned}$$

Kolloquium SS2021
8. Beispiel: Wärmeleitung – Wärmeübergangskoeffizienten

Angabe:

Gegeben ist eine in zwei Richtungen (quasi-) unendlich lange Wand mit einer Dicke $d = 0{,}26\,\mathrm{m}$ aus Ziegelmauerwerk (Wärmeleitfähigkeit $k = 0{,}2\,\mathrm{W/mK}$) mit einer Oberflächentemperatur auf der Innenseite von $T_i = 22\,°\mathrm{C}$. Auf der Außenseite wird die Wand von einer Außenluft ($T_a = -5\,°\mathrm{C}$) umströmt.



Die stationäre Lösung der zugrundeliegenden eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung in kartesischen Koordinaten mit ausschließlich in $x-$Richtung strömender Wärme lautet :

$$T\,(x) = C_1\,x + C_2$$

Gesucht ist der vorliegende äußere Wärmeübergangskoeffizient $\beta_{aussen}\,[\mathrm{W/m^2K}]$ der Wand, wenn sich über die Wand ein Temperaturgradient von $\frac{\partial T}{\partial x}(x) = -100\,°\mathrm{C/m}$ einstellt.

Lösung:

Zeitunabhängig:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \int \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = C_1 = -100\,°\mathrm{C/m}$$

$$T\,(x=0) = 22\,°\mathrm{C} = -100\,°\mathrm{C/m} \cdot 0\,\mathrm{m} + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = +22\,°\mathrm{C}$$

Abstrahlfunktion:

$$q_{aussen} = \beta_{aussen}\,\left[T\,(x=d) - T_{aussen}\right] = -k\,C_1$$

Temperaturverlauf:

$$T\,(x=d) = C_1\,d + T_{innen}$$

$$\Rightarrow -k\,C_1 = \beta_{aussen}\,\left[C_1\,d + T_{innen} - T_{aussen}\right]$$

$$\Rightarrow \beta_{aussen} = \frac{-k\,C_1}{\left[C_1\,d + T_{innen} - T_{aussen}\right]}$$

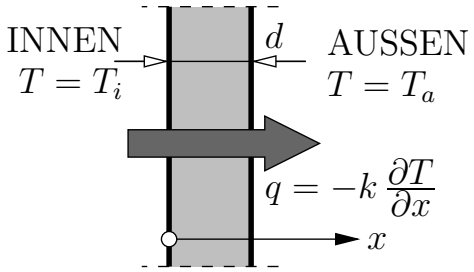
$$= \frac{-0{,}2\,\mathrm{W/(Km)} \cdot (-100\,°\mathrm{C/m})}{\left[-100\,°\mathrm{C/m} \cdot 0{,}26\,\mathrm{m} + 22\,°\mathrm{C} - (-5\,°\mathrm{C})\right]} = 20\,\mathrm{W/m^2K}$$

$$= 1/0{,}05\,\mathrm{W/m^2K}$$

Ersatz-Kolloquium SS2021
2. Beispiel: Wärmeleitung – Umströmte Außenwand

Angabe:

Gegeben ist eine in zwei Richtungen (quasi-) unendlich lange Wand mit einer Dicke $d = 0{,}22\,\mathrm{m}$ aus Ziegelmauerwerk (Wärmeleitfähigkeit $k = 0{,}3\,\mathrm{W/(K\,m)}$) mit einer Oberflächentemperatur auf der Innenseite von $T_i = 22\,°\mathrm{C}$. Auf der Außenseite wird die Wand von einer Außenluft ($T_a = -5\,°\mathrm{C}$) umströmt. Der äußere Wärmeübergangskoeffizient ergibt sich zu $\beta_a = 1/0{,}04\,\mathrm{W/(K\,m^2)}$.



Die stationäre Lösung der zugrundeliegenden eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung in kartesischen Koordinaten mit ausschließlich in $x-$Richtung strömender Wärme lautet :

$$T(x) = C_1\,x + C_2$$

Gesucht ist die Temperatur [°C] auf der äußeren Wandoberfläche ($x = d$).

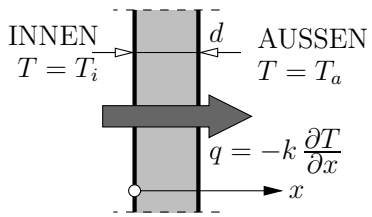
Lösung:

$T(x=0)$	$= 22\,°\mathrm{C}$	$= C_1 \cdot 0\,\mathrm{m} + C_2$	$\Rightarrow C_2 = +22\,°\mathrm{C}$
Abstrahlfunktion:	q_{aussen}	$= \beta_a\,[T(x=d) - T_a]$	$= -kC_1$
Temperaturverlauf:	$T(x=d)$	$= C_1 d + T_i$	
$\Rightarrow$	$-kC_1$	$= \beta_a\,[C_1 d + T_i - T_a]$	
$\Rightarrow$	C_1	$= \dfrac{[T_i - T_a]\;\beta_a}{[-k - \beta_a\,d]}$	
		$= \dfrac{[22\,°\mathrm{C} - (-5\,°\mathrm{C})] \cdot 1/0{,}04\,\mathrm{W/(K\,m^2)}}{[-0{,}3\,\mathrm{W/(K\,m)} - 1/0{,}04\,\mathrm{W/(K\,m^2)} \cdot 0{,}22\,\mathrm{m}]}$	
		$= -116{,}3793\,°\mathrm{C/m}$	
	$T(x=d)$	$= -116{,}3793\,°\mathrm{C/m} \cdot 0{,}22\,\mathrm{m} + 22\,°\mathrm{C}$	$= -3{,}6034\,°\mathrm{C}$

Kolloquium SS2020
1. Beispiel: Eindimensionale Wärmeleitung - Vergleiche von Wandstärken

Angabe:

Gegeben ist eine unendlich ausgedehnte einschichtige Wand. Die Oberflächentemperatur beträgt an der Innenseite der Wand $T_{int} = +20°\mathrm{C}$ und an der Außenwand $T_{ext} = -10°\mathrm{C}$.



Gesucht:

a. Berechnen Sie für eine $50\,\mathrm{cm}$ dicke Hochlochziegelwand ($k = \lambda = 0{,}10\,\mathrm{W/(mK)}$) den Wärmestrom q_n in W/(m).

b. Berechnen Sie weiteres die erforderliche Dicke einer Wand aus Beton ($k = \lambda = 2{,}10\,\mathrm{W/(mK)}$) für denselben Wärmestrom.

Lösung:

a. Eindimensionaler Wärmestrom q_n für die Hochlochziegelwand:

$$\mathbf{q}_n = q_n\,\mathbf{n} = q\,\mathbf{e}_x = -\mathbf{k}^{Iso} \cdot \mathrm{grad}(T) = -\left[k^{1d,Iso}\mathrm{grad}(T)\right]\mathbf{e}_x$$

mit $\mathrm{grad}(T) = \partial T/\partial x = (T_{ext} - T_{int})/d$ folgt der skalare Wärmestrom q_n zu:

$$q_n = -0{,}10\left[(-10) - 20\right]/0{,}5 = 6\,\mathrm{W/m}$$

b. Dicke der Betonwand für denselben Wärmestrom:

$$\begin{aligned} q_n^I \quad &= q_n^{II} \quad = 6\,\tfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}} = -k^{II}\left(\tfrac{\Delta T}{d^{II}}\right) = 2{,}1 \cdot \left(\tfrac{-30}{d^{II}}\right) \\ \Rightarrow \quad d^{II} \quad &= -2{,}1 \cdot \tfrac{-30}{6} = 10{,}5\,m \end{aligned}$$

Ersatz-Kolloquium SS2020
1. Beispiel: Temperaturfeld – Linienquelle

Angabe:

Gegeben ist ein ungedämmtes gerades Rohr im Erdreich. Die Temperatur des Erdreichs beträgt zu Beginn an jeder Stelle $T_0 = 15°C$. Der Außendurchmesser des Rohres ist $200\,\text{mm}$. Die Temperatur an der Oberfläche des Rohres ($r = R_{Rohr}$) wird plötzlich auf konstant $+50°C$ erwärmt. Für verschiedene Zeitpunkte ist das Temperaturfeld wie folgt gegeben:

$$T(r,t) = C_1(t) \ln\left(\frac{r}{R_{Rohr}}\right) + C_2$$

Gesucht: Ermitteln Sie die Temperatur des Bodens die sich im Abstand $r = 2R_{Rohr}$ einstellt, wobei zum Betrachtungszeitpunkt $C_1 = -2{,}3°C$ angenommen wird.

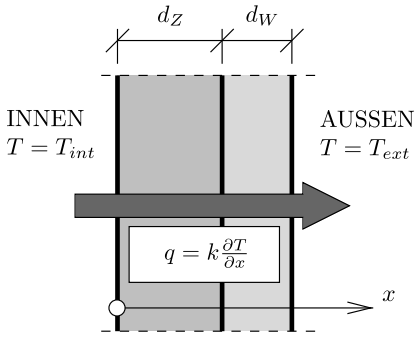
Lösung:

$$\begin{aligned}
T(R_{Rohr},t) &= 50°\text{C} &&= -2{,}3°\text{C} \ln \tfrac{R_{Rohr}}{R_{Rohr}} + C_2 && \Rightarrow C_2 = 50°\text{C} \\
\Rightarrow \quad T(2R_{Rohr},t) &= -2{,}3°\text{C} \ln \tfrac{2R_{Rohr}}{R_{Rohr}} + 50°\text{C} && &&= 48{,}41°\text{C}
\end{aligned}$$

Ersatz-Kolloquium SS2020
2. Beispiel: Wärmeleitung – Wand

Angabe:

Gegeben ist eine unendlich lange Wand (Aufbau siehe Skizze: Ziegelmaterial mit Dicke $d_z = 25\,\text{cm}$, Dämmmaterial mit Dicke $d_W = 15\,\text{cm}$). Im Inneren des durch die Wand begrenzten Gebäudes befindet sich eine dauerhaft betriebene Sauna mit $T_{int} = 80°C$. Die Temperatur an der Außenseite der Wand beträgt $T_{ext} = -5°C$. Unterscheiden Sie im folgenden die Fälle $\frac{k_Z}{k_W} = 6$ und $\frac{k_Z}{k_W} = 1$.



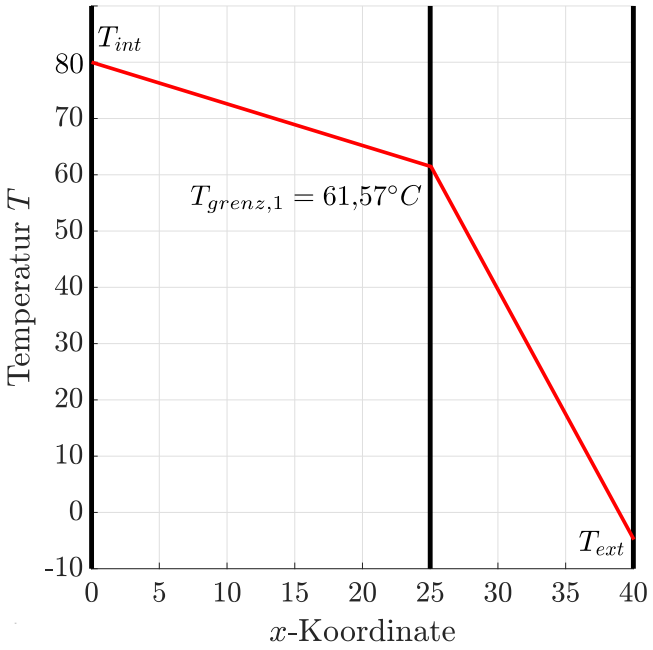
Gesucht: Welches Temperaturprofil stellt sich in der Wand nach unendlich langer Zeit ein? Erstellen Sie für jeden der Fälle eine qualitative Grafik.

Lösung:

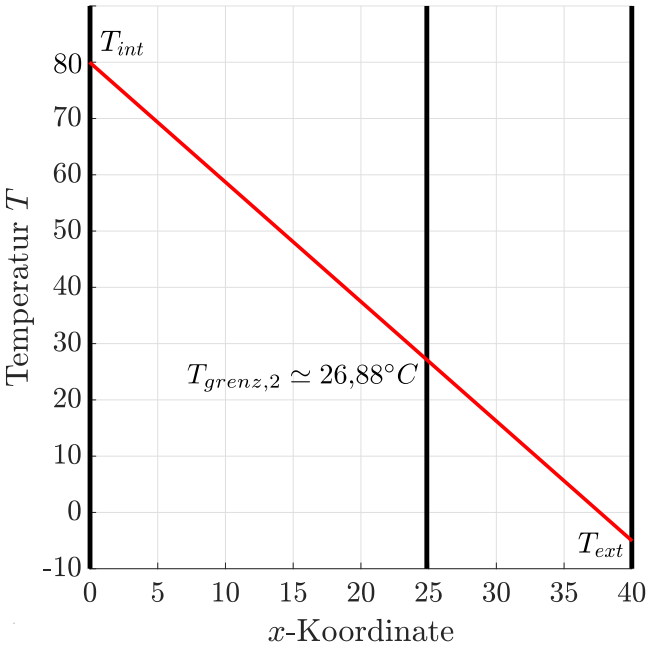
Gleichsetzen der Wärmeströme $\Rightarrow q^I = q^{II}$, $k_{Z,i}$ einsetzen und nach $T_{grenz,i}$ auflösen

$$q^I = -k_{Z,i}\, gradT = -k_{Z,i}\,\frac{T_{grenz,i} - T_{int}}{d_z} \qquad q^{II} = -k_W\, gradT = -k_W\,\frac{T_{ext} - T_{grenz,i}}{d_w}$$

$k_{Z,1} = 6k_W$



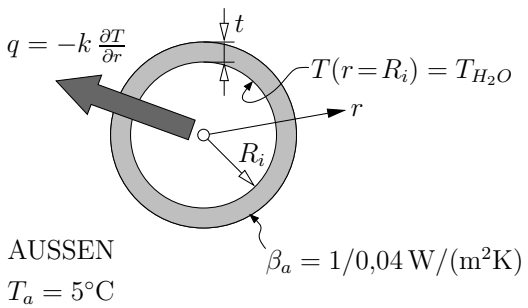
$k_{Z,2} = k_W$



Kolloquium SS2019
2. Beispiel: Stationäre Wärmeströmung durch ein Rohr

Angabe:

Gegeben ist ein unendlich langes gerades Rohr mit kreisringförmigem Querschnitt (Innenradius $R_i = 5\,\text{cm}$, Wandstärke des Rohres vernachlässigbar klein) und mit einer auf der Rohraußenseite angebrachten Wärmedämmung (Wandstärke der Dämmung $t = 10\,\text{cm}$ mit Wärmeleitfähigkeit $k = 0{,}05\,\text{W}/(\text{m}\,\text{K})$). Das Rohr wird von Wasser mit einer Temperatur von $T_{H_2O} = 60°\text{C}$ (diese darf hier vereinfacht auch an der inneren Oberfläche des Rohrs angenommen werden) durchströmt. Die Außenlufttemperatur (in „ausreichendem Abstand“ zum Rohr) beträgt $T_a = 5°\text{C}$ und der Wärmeübergangskoeffizient an der Außenseite beträgt $\beta_a = 1/0{,}04\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$, siehe Abbildung.



Die Lösung der zugrundeliegenden eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung in zylindrischen Koordinaten mit in radialer r-Richtung strömender Wärme lautet

$$T(r) = C_1 \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) + C_2\,.$$

Gesucht:

a. Bestimmen Sie das Temperaturprofil $T(r)$ im Rohr, mit Auswertung an den Stellen $T(r = R_i + t/2)$ und $T(r = R_i + t)$, und stellen Sie dieses (qualitativ) grafisch dar.

   Hinweis: Der Temperaturgradient ist nicht konstant (Funktion der Koordinate r) und lautet: $\nabla T = \partial T/\partial r = C_1/r$

b. Betrachten Sie für das in Punkt a ermittelte Temperaturprofil $T(r)$ den Grenzübergang $\beta_a \to \infty\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$ und beurteilen Sie den Einfluss des gegebenen Wärmeübergangskoeffizienten β_a auf das Temperaturprofil.

   Hinweis: Für den Fall $\beta_a \to \infty$ gilt, $T(r = R_i + t) = T_a$.

Lösung:

a.

Randbedingung Innenseite: $T(r = R_i) = C_2 = T_{H2O} \quad \Rightarrow T(r) = C_1 \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) + T_{H2O}$

Randbedingung Außenseite:

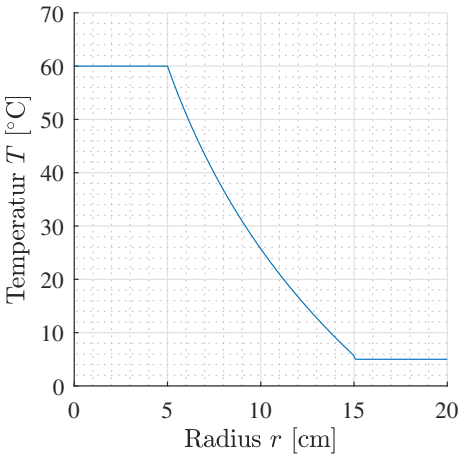
$q_a = \beta_a[T(Ri+t) - T_a]$, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r \quad \Rightarrow \mathbf{q}_a = \beta_a[T(Ri+t) - T_a]\mathbf{e}_r \;=\; -k\left(\frac{C_1}{R_i+t}\right)\mathbf{e}_r$

$T(Ri+t) = C_1 \ln\left(\frac{Ri+t}{R_i}\right) + T_{H2O} \quad \Rightarrow \beta_a[C_1 \ln\left(\frac{Ri+t}{R_i}\right) + T_{H2O} - T_a] \;=\; -k\left(\frac{C_1}{R_i+t}\right)$

$$C_1 = \frac{\beta_a(T_a - T_{H2O})}{\beta_a \ln\left(\frac{Ri+t}{R_i}\right) + \frac{k}{R_i+t}} = -50{,}0571°\mathrm{C}$$

Temperaturverlauf: $T(r) = \dfrac{\beta_a(T_a - T_{H2O})}{\beta_a \ln\left(\frac{Ri+t}{R_i}\right) + \frac{k}{R_i+t}} \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) + T_{H2O} \;=\; -50{,}0571°\mathrm{C} \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) + 60°\mathrm{C}$

$T(r = Ri+t) = 5{,}0067°\mathrm{C}, \quad T(r = Ri + t/2) = 25{,}3031°\mathrm{C}$



b.

$$\beta_a = \infty\text{: } T(r) = \frac{(T_a - T_{H2O})}{\ln\left(\frac{Ri+t}{R_i}\right) + \frac{k}{\infty(R_i+t)}} \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) + T_{H2O}$$

$$\Rightarrow T(r) = \frac{(T_a - T_{H2O})}{\ln\left(\frac{Ri+t}{R_i}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) + T_{H2O} \;=\; -50{,}0632 \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) + 60$$

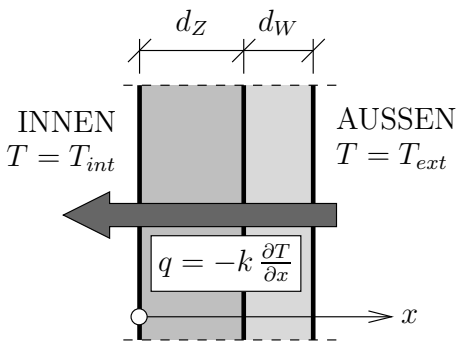
Die Konstante C_1 für den Fall $\beta_a = 1/0{,}04$ und $\beta_a = \infty$ unterscheidet sich nur um ca. 0.01%. Somit hat die Berücksichtigung von β_a nur einen sehr geringen Einfluss auf das Temperaturprofil.

Ersatzkolloquium WS2016/2017
2. Beispiel: Eindimensionale Wärmeleitung

Angabe:

Gegeben ist eine unendlich lange Wand (Aufbau siehe Skizze: Ziegelmaterial mit Dicke $d_Z = 25\,\text{cm}$, Dämmmaterial mit Dicke $d_W = 15\,\text{cm}$). Im Inneren des durch die Wand begrenzten Gebäudes befindet sich ein Kühlraum mit $T_{int} = -20°\text{C}$. Die Außenseite der Wand wird durch Umgebungseinflüsse auf exakt $T_{ext} = 60°\text{C}$ erwärmt.

Gesucht:



a. Bestimmen Sie die Wärmeleitfähigkeit k für das Ziegelmaterial, unter der Annahme, dass dessen U-Wert $U = 0{,}60\,\text{W/(m}^2\text{K)}$ bei einer Schichtdicke von $25\,\text{cm}$ beträgt.

b. Bestimmen Sie die Wärmeleitfähigkeit k für das Dämmmaterial, unter der Annahme, dass der Wärmefluss $q = 8{,}0\,\text{W/m}^2$ bei $\Delta T = 20°\text{C}$ und einer Schichtdicke von $10\,\text{cm}$.

c. Welches Temperaturprofil stellt sich in der Wand nach unendlich langer Zeit ein? Stellen Sie das Temperaturprofil in der Wand *maßstäblich* dar. Wie groß ist der Wärmefluss q in den einzelnen Schichten?

Hinweise: Alle beschriebenen Wärmeleitungsprobleme sind eindimensional. Die Wärmeübergangskoeffizienten sind zu vernachlässigen. Der Wärmefluss ist in allen Schichten konstant.

Lösung:

a. Wärmeleitfähigkeit k für das Ziegelmaterial:

$$U = \frac{k}{d} \rightarrow k_{\text{Ziegel}} = U \cdot d = 0{,}15\,\frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

b. Wärmeleitfähigkeit k für das Dämmmaterial:

$$q = k \cdot \frac{\Delta T}{d} \rightarrow k_{\text{Dämmung}} = \frac{q \cdot d}{\Delta T} = 0{,}04\,\frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

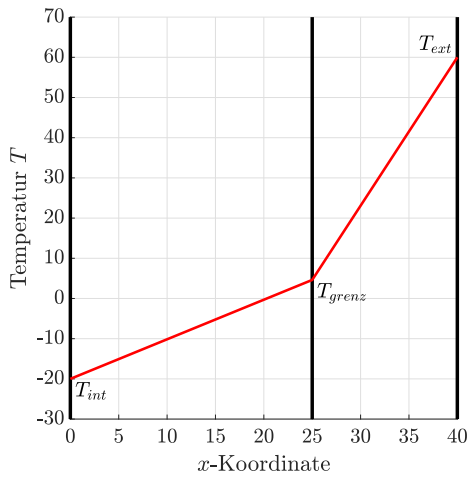
c. Temperaturprofil in der Wand: Man beachte, dass der Wärmefluss in beiden (allen) Schichten konstant ist (q = const.) Das liefert zwei Gleichungen (mit T_{grenz} als der unbekannten Temperatur an der Schichtgrenze):

$$q_{\text{Dämmung}} = \frac{k_{\text{Dämmung}}}{d_{\text{Dämmung}}} \cdot \Delta T = \frac{k_{\text{Dämmung}}}{d_{\text{Dämmung}}} \cdot [T_{ext} - T_{grenz}]$$

$$q_{\text{Ziegel}} = \frac{k_{\text{Ziegel}}}{d_{\text{Ziegel}}} \cdot \Delta T = \frac{k_{\text{Ziegel}}}{d_{\text{Ziegel}}} \cdot [T_{grenz} - T_{int}]$$

Gleichsetzen und auflösen nach T_{grenz} ergibt:

$$T_{grenz} = 4{,}62°\text{C} \quad \text{und} \quad q_{\text{Dämmung}} = q_{\text{Ziegel}} = 14{,}77\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

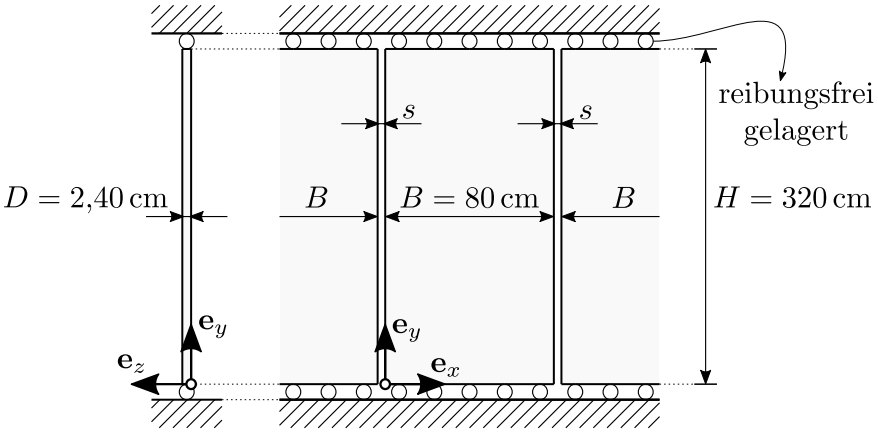


Thermoelastizität

Kolloquium SS2021
3. Beispiel: Thermoelastizität – Vorgehängte Glasfassade

Angabe:

Gegeben ist eine vorgehängte Glasfassade bestehend aus mehreren nebeneinander angeordneten Glasscheiben. Die homogenen Glasscheiben sind an der Ober- und Unterseite reibungsfrei in einer Führungsschiene eingebettet und zwischen den einzelnen Scheiben liegt ein Spalt mit der Breite s vor. Im spannungs- und verzerrungsfreien Ausgangszustand haben die Scheiben eine Temperatur von $T_0 = 20°\mathrm{C}$. Das verwendete Glas weist eine Querdehnungszahl von $\nu = 0{,}23$, einen E-Modul von $E = 70\,000\,\mathrm{N/mm^2}$, und einen Wärmeausdehnungskoeffizienten von $\alpha_T = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ auf.



Gesucht ist die notwendige Spaltbreite s in [cm], sodass es infolge der Temperaturdifferenz $\Delta T = 60\,\mathrm{K}$ gerade zu einer Berührung der angrenzenden Scheiben kommt.

Hinweis: Beachten Sie, dass sich alle Scheiben bei Erwärmung in gleicher Weise ausdehnen. Das Eigengewicht ist zu vernachlässigen.

Lösung:

Einerseits ist *links* die Ausdehnung um die halbe Spaltbreite möglich (die andere halbe Spaltbreite wird von der angrenzenden Glasscheibe benötigt) und andererseits ist jene Ausdehnung auch auf der *rechten* Seite möglich. Die Normalverzerrung in $\mathbf{e}_x$-Richtung sodass es zur Berührung kommt ergibt sich somit zu:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{+\frac{s}{2} + \frac{s}{2}}{B} = \frac{s}{B}$$

Außerdem gilt:

$$u_y = 0 \rightarrow \varepsilon_{yy} = 0 \qquad \sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

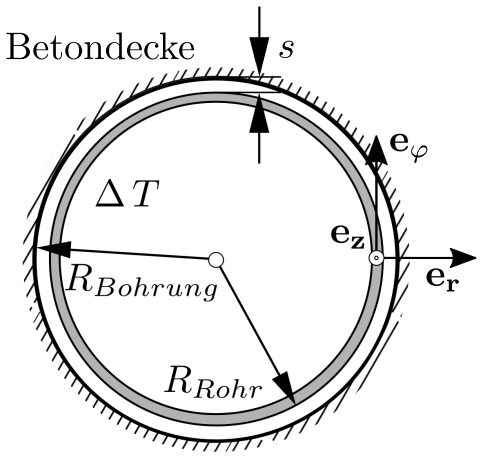
Berücksichtigung dieser Randbedingungen im thermoelastischen Materialgesetz ergibt zwei Bestimmungsgleichungen, welche schließlich die gesuchte Spaltbreite s liefern:

$$\left.\begin{aligned} \frac{s}{B} &= -\frac{\nu\sigma_{yy}}{E} + \alpha_T \Delta T \\ 0 &= +\frac{\sigma_{yy}}{E} + \alpha_T \Delta T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} s &= B(\nu+1)\alpha_T \Delta T = \\ &= 60\,\mathrm{cm} \cdot (0{,}23+1) \cdot (5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}) \cdot 60\,\mathrm{K} = 0{,}02952\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Ersatz-Kolloquium SS2021
3. Beispiel: Thermoelastizität – PP-Wasserleitung

Angabe:

Gegeben ist eine temperaturbeständige PP-Wasserrohrleitung (Polypropylen), welche durch eine Betondecke führt. Der Radius beträgt $R_{Rohr} = 45\,\text{mm}$, die Wandstärke des Rohrs von $t << r$ ist zu vernachlässigen, die Geometrie des Leitungs-Querschnitts ist der Abbildung zu entnehmen. Das Material weist eine Querdehnzahl von $\nu = 0{,}4$, einen E-Modul von $E = 1400\,\text{N/mm}^2$ und einen Wärmeausdehnungskoeffizienten von $\alpha_T = 16 \cdot 10^{-5}\,\text{K}^{-1}$ auf. Die Leitung ist in $z-$Richtung kontinuierlich gegen Verschieben gehalten, in allen anderen Richtungen sind die Verformungen unbehindert. Während des Baus wurde der Radius der Bohrung mit
$R_{Bohrung} = 45{,}6\,\text{mm}$ schmaler ausgeführt als vorgesehen.



Hinweis: Die Radiusänderung ist abhängig von der Umfangsänderung: $\Delta r = \varepsilon_{\varphi\varphi} R_{Rohr}$. Es ist die linearisierte Elastizitätstheorie zu Grunde zu legen.

Gesucht: Bis zu welcher Temperaturdifferenz $\Delta T\,[\text{K}]$ kann eine spannungsfreie Ausdehnung der Wasserleitung garantiert werden?

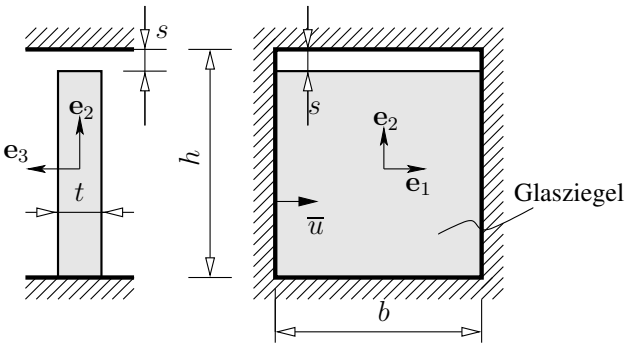
Lösung:

Umfang:	ΔU	$= \varepsilon_{\varphi\varphi}\, U_{Rohr} = \varepsilon_{\varphi\varphi}\, (2\, R_{Rohr}\, \pi)$	
	$\Rightarrow$	$\Delta r = s = \varepsilon_{\varphi\varphi}\, \frac{(2\, R_{Rohr}\, \pi)}{2\, \pi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}\, R_{Rohr}$	
Spaltbreite:	$\Delta r = s$	$= R_{Bohrung} - R_{Rohr} = 45{,}6\,\text{mm} - 45{,}0\,\text{mm}$	$= 0{,}6\,\text{mm}$
	$\Rightarrow$	$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{s}{R_{Rohr}} = \frac{0{,}6\,mm}{45{,}0\,mm} = 1{,}3333 \cdot 10^{-2}$	
Randbedingungen:	$\varepsilon_{zz} = 0$	$\Rightarrow\ \sigma_{zz} \neq 0$	
Axialverzerrung:	$\varepsilon_{zz} = 0$	$= \frac{1}{E}\, \sigma_{zz} + \alpha_T\, \Delta T$ $\quad\Rightarrow\quad$	$\sigma_{zz} = -\, E \alpha_T\, \Delta T$
Tangentialverzerrung:	$\varepsilon_{\varphi\varphi}$	$= \frac{-\nu}{E}\, \sigma_{zz} + \alpha_T\, \Delta T$	
$\Rightarrow$	ΔT	$= \varepsilon_{\varphi\varphi}\, [(1+\nu)\, \alpha_T]^{-1}$	
		$= 1{,}3333 \cdot 10^{-2} \cdot [(1+0{,}4) \cdot 16 \cdot 10^{-5}\,\text{K}^{-1}]^{-1}$	$= 59{,}5223\,\text{K}$

Kolloquium SS2020
7. Beispiel: Thermoelastizität – Glasziegel Spalt

Angabe:

Gegeben ist ein Glasziegel, dessen Oberflächen als reibungsfrei zu betrachten sind. Die Randflächen an der unteren, der linken, sowie der rechten Seite des Glaszeigels berühren das anschließende Mauerwerk, wohingegen die obere Randfläche zum anschließenden Mauerwerk einen Spalt s aufweist.



E-Modul:	$E = 69000\,\mathrm{N/mm^2}$
Querdehnungszahl:	$\nu = 0{,}23$
Wärmeausdehn.-koeff.:	$\alpha_T = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$
Referenztemperatur:	$T_0 = 20°\,\mathrm{C}$
Glasziegelbreite:	$b = 500\,\mathrm{mm}$
Maueröffnungsbreite:	$h = 600\,\mathrm{mm}$
Glasziegeldicke:	$t = 100\,\mathrm{mm}$

Gesucht: Wie groß muss bei einer Spaltbreite $s = 0{,}2\,\mathrm{mm}$ die Temperaturänderung ΔT sein, damit die obere Randfläche des Glasziegels das anschließende Mauerwerk gerade berührt?

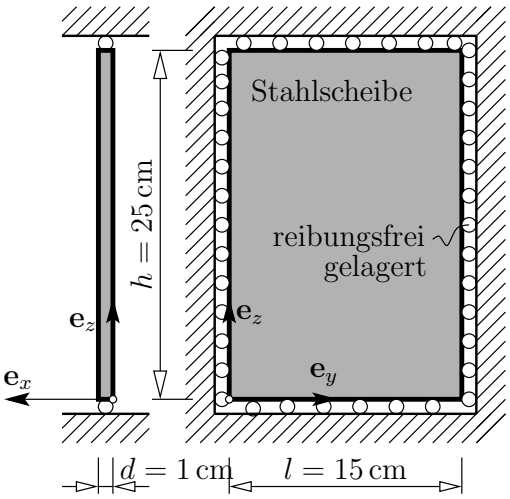
Lösung:

Mögliche Verzerrung in Richtung $\mathbf{e}_2$:		ε_{22}	$= \frac{\Delta u_s}{h} = \frac{s}{h} = \frac{0{,}2}{600-0{,}2} = 3{,}33 \cdot 10^{-4}$
Verzerrung in Richtung $\mathbf{e}_2$:		ε_{22}	$= \frac{-\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} + \frac{-\nu}{E}\sigma_{33} + \alpha_T \Delta T$
$\varepsilon_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0!$	$\Rightarrow$	σ_{11}	$= -E\,\alpha_T \Delta T$
Einsetzen von $\varepsilon_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ und σ_{11}	$\Rightarrow$	ΔT	$= \frac{\varepsilon_{22}}{(1+\nu)\,\alpha_T} = 54{,}22\,\mathrm{K}$

Kolloquium SS2020
8. Beispiel: Thermoelastizität – Kritische Temperatur

Angabe:

Gegeben ist eine homogene Scheibe aus Stahl, die gemäß nebenstehender Abbildung reibungsfrei in einen starren Rahmen eingebettet ist. Im spannungs- und verzerrungsfreien Ausgangszustand hat die Scheibe eine Temperatur von $T_0 = 5°\mathrm{C}$. Der verwendete Stahl weist eine Querdehnzahl von $\nu = 0{,}30$, einen E-Modul von $E = 210000\,\mathrm{N/mm^2}$, und einen Wärmeausdehnungskoeffizienten von $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$ auf. Die Festigkeit des Stahls sei durch ein Tresca-Festigkeitskriterium mit der Fließgrenze $f_y = 235\,\mathrm{N/mm^2}$ beschrieben.



Gesucht ist die kritische Temperaturdifferenz $\Delta T_{kr} < 0$ (Fall Abkühlung) bei der die Stahlscheibe zu fließen beginnt.

Anmerkungen: Es ist die linearisierte Elastizitätstheorie zu Grunde zu legen. Alle Kontaktflächen sind als reibungsfrei anzunehmen. Das Eigengewicht kann vernachlässigt werden.

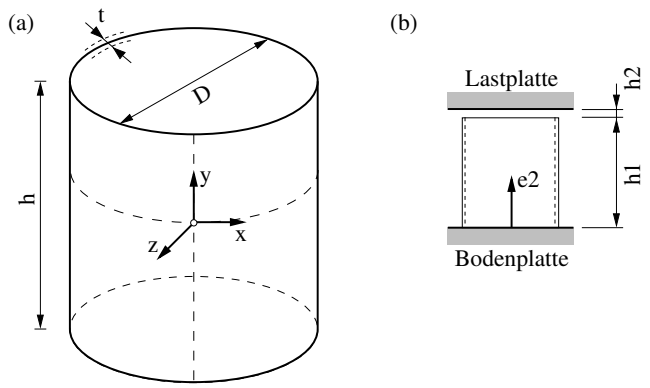
Lösung:

Randbedingungen:	$\sigma_{xx} = 0$	und $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0$
Formulieren der Verzerrungen	ε_{yy}	$= \frac{1}{E}\sigma_{yy} + \frac{-\nu}{E}\sigma_{zz} + \alpha_T \Delta T$
	ε_{zz}	$= \frac{-\nu}{E}\sigma_{yy} + \frac{1}{E}\sigma_{zz} + \alpha_T \Delta T$
Gleichsetzen von ε_{yy} und ε_{zz}	$\Rightarrow$	$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\frac{E\,\alpha_T \Delta T}{1-\nu}$
Fließbeginn nach TRESCA,	wenn:	$\sigma_I - \sigma_{III} - f_y = 0!$
	$\sigma_{III} = 0$	$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$
$\Rightarrow \quad \sigma_I = f_y = \sigma_{yy}$	$\Rightarrow$	$\Delta T = -65{,}2778\,\mathrm{K}$

Kolloquium SS2020
9. Beispiel: Thermoelastizität – Spannung

Angabe:

Gegeben ist ein zylindrischer, dünnwandiger Glaskörper, siehe Abbildung (a), mit offener Grund- bzw. Deckfläche, mit den dargestellten Abmessungen und Eigenschaften. Der Glaszylinder steht reibungsfrei auf einer fixierten, starren Bodenplatte. Die Oberkante des Zylinders ist in der Ausgangslage um die Länge h_2 von der starren Platte entfernt, siehe Abbildung (b).



Glaseigenschaften:

E-Modul:	$E = 70000\,\mathrm{N/mm^2}$
Querdehnungszahl:	$\nu = 0{,}23$
Wärmeausdehn.-koeff.:	$\alpha_T = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$
Referenztemperatur:	$T_0 = 20°\,\mathrm{C}$

Abmessungen:

Höhe:	$h_1 = 600\,\mathrm{mm}$
Durchmesser:	$D = 350\,\mathrm{mm}$
Glasrohrdicke:	$t = 7\,\mathrm{mm}$
Abstand:	$h_2 = 0{,}2\,\mathrm{mm}$

Gesucht ist die Spannungskomponente σ_{yy} wenn der Glaszylinder einer homogenen Temperaturänderung von $\Delta T = 270\,\mathrm{K}$ ausgesetzt wird.

Lösung:

Prüfen ob Kontakt zwischen Glaskörper und Lastplatte besteht.

$$\Delta T = 270\,\mathrm{K} \qquad \Delta\varepsilon_{yy} = \alpha_T \Delta T \qquad = 1{,}35 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{theor. } \Delta u(\Delta T) \qquad = \Delta\varepsilon_{yy} \cdot h_1 = 0{,}81\,\mathrm{mm} \qquad > 0{,}2\,\mathrm{mm} = h_2$$

Es besteht Kontakt $\Rightarrow$ Spannungen treten in Richtung $\mathbf{e}_2$ auf.

$$\text{Verzerrungen in } \mathbf{e}_2\text{:} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{h_2}{h_1} \qquad = \frac{\sigma_{yy}}{E} + \alpha_T \Delta T$$

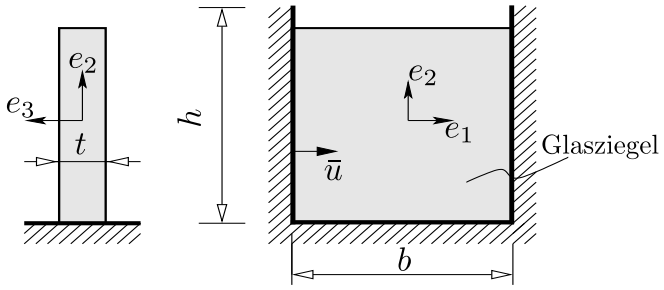
$$\Rightarrow \qquad \sigma_{yy} = E\left(\frac{h_2}{h_1} - \alpha_T \Delta T\right) \qquad = 7{,}0 \cdot 10^4 \cdot \left(\frac{0{,}2}{600} - 1{,}35 \cdot 10^{-3}\right)$$

$$= -71{,}17\,\mathrm{N/mm^2}$$

Ersatz-Kolloquium SS2020
12. Beispiel: Thermoelastizität – Glasziegel

Angabe:

Gegeben ist ein Glasziegel, dessen Oberflächen als reibungsfrei zu betrachten sind. Die Randflächen an der unteren, der linken sowie der rechten Seite des Glasziegels berühren das anschließende Mauerwerk, wohingegen die obere Randfläche frei ist. Aufgrund einer eingeprägten Mauerwerksverschiebung wird der Glasziegel um $\overline{u} = 6{,}5\,\mathrm{mm}$ in $\mathbf{e}_1-$Richtung zusammengedrügt.



E-Modul:	$E = 69000\,\mathrm{N/mm^2}$
Querdehnungszahl:	$\nu = 0{,}3$
Wärmeausdehn.-koeff.:	$\alpha_T = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$
einax. Zugfestigkeit:	$f_{tu} = 30\,\mathrm{N/mm^2}$
einax. Druckfestigkeit:	$f_{cu} = 900\,\mathrm{N/mm^2}$
Referenztemperatur:	$T_0 = 20°\,\mathrm{C}$
Glasziegelbreite:	$b = 500\,\mathrm{mm}$
Glasziegelhöhe:	$h = 600\,\mathrm{mm}$
Glasziegeldicke:	$t = 100\,\mathrm{mm}$

Gesucht ist die Erwärmung des Glasziegels ($\Delta T > 0$), welche notwendig ist, damit Versagen des Glasziegels eintritt.

Lösung:

Prüfen des Zustands bei $\Delta T = 0\,\mathrm{K}$

$\varepsilon_{11} = -\frac{6{,}5mm}{500mm} = -0{,}013 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{11} = \varepsilon_{11} E = -897\,\mathrm{N/mm^2}$

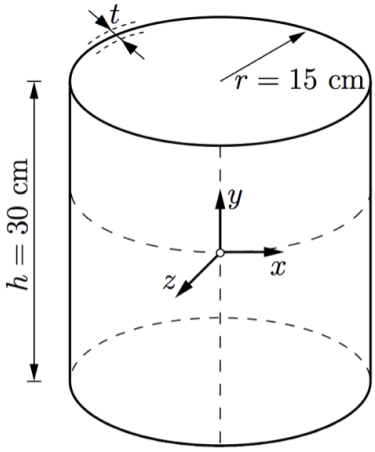
Noch kein Versagen des Glasziegels. Berechnen der Erwärmung, welche zur notwendigen Drucksteigerung führt. Hierbei wird $\sigma_{11} = f_{cu}$ gesetzt.

$$\Delta T = \left(\varepsilon_{11} - \frac{\sigma_{11}}{E}\right)\frac{1}{\alpha_T} = \left(-0{,}013 - \frac{-900}{69000}\right)\frac{1}{5 \cdot 10^{-6}} = 8{,}70\,\mathrm{K}$$

Ersatz-Kolloquium SS2020
13. Beispiel: Thermoelastizität – Volumenänderung

Angabe:

Gegeben ist ein dünnwandiges Glasrohr mit den untenstehenden Eigenschaften, das einer gleichmäßigen (isothermen) Temperaturänderung unterworfen wird. Die Abmessungen sind der Abbildung zu entnehmen.



E-Modul:	$E = 70000\,\mathrm{N/mm^2}$
Querdehnungszahl:	$\nu = 0{,}23$
Wärmeausdehn.-koeff.:	$\alpha_T = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$
Referenztemperatur:	$T_0 = 20°\,\mathrm{C}$
Glasdicke:	$t = 0{,}4\,\mathrm{cm}$

Hinweis: Vor der Abkühlung ist das Rohr spannungsfrei und hat ein Volumen von $V_0 = 1131\ cm^3$. Außerdem bezieht sich der Radius auf die Mittelebene des Zylinders.

Gesucht ist die Volumenänderung ΔV des Materials bei einer homogenen Temperaturänderung von $\Delta T = -100\,\mathrm{K}$.

Lösung:

Das genaue Ausgangsvolumen beträgt: $\Delta V_0 = 1130,9734\,\mathrm{cm}^3$. Es wird von einem spannungsfreien Zustand und einer isothermen Temperaturänderung aus gegangen, hierdurch ergibt sich folgender Zusammenhang: $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$.

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \alpha_T \Delta T = -5 \cdot 10^{-4}$$

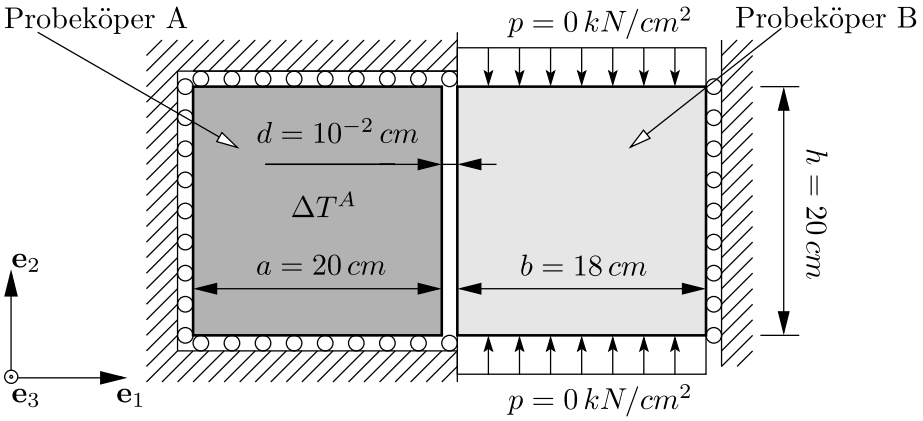
$$V_{\Delta T} = h(1+\varepsilon)\pi\left((r_a(1+\varepsilon))^2 - (r_i(1+\varepsilon))^2\right) = 1129{,}2777\,\mathrm{cm}^3$$

$$\Delta V = -1{,}6957\,\mathrm{cm}^3$$

Ersatz-Kolloquium SS2020
14. Beispiel: Thermoelastizität – Scheiben

Angabe:

Gegeben sind zwei Probekörper A und B gleicher Dicke, welche zueinander den Spalt d aufweisen. Probekörper A wird um eine Temperaturdifferenz ΔT erwärmt. Auf Probekörper B wird eine Druckspannung p in $\mathbf{e}_2-$Richtung aufgebracht. Die Materialparameter, welche das isotrope thermoelastische Verhalten der beiden Körper beschreiben sind ident und lauten: $E = 800\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\nu = 0{,}3$ und $\alpha_T = 2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$:



Hinweise: Solang sich die Probekörper nicht berühren, liegt in beiden Probekörper ein einaxialer Spannungszustand in $\mathbf{e}_2-$Richtung vor. Alle Berandungen und die Kontaktflächen sind reibungsfrei.

Gesucht ist die erforderliche Temperaturdifferenz ΔT in Probekörper A, die unter der Annahme $p = 0$ dazu führt, dass sich die beiden Körper gerade berühren.

Lösung:

Randbedingungen: $\sigma_{11}^A = \sigma_{11}^B = 0,\ \varepsilon_{22}^A = 0,\ \sigma_{22}^B = 0$ und $\sigma_{33}^A = \sigma_{33}^B = 0$ Somit lautet das Hooksche Gesetz für beide Probekörper A und B:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^A \\ 0 \\ \varepsilon_{33}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E^A} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{22}^A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T \Delta T^A \\ \alpha_T \Delta T^A \\ \alpha_T \Delta T^A \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^B \\ \varepsilon_{22}^B \\ \varepsilon_{33}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E^A} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}^A &= 0 = \tfrac{\sigma_{22}^A}{E} + \alpha_T \Delta T & & \Rightarrow \quad \sigma_{22} = -E\alpha_T \Delta T^A \\ \varepsilon_{11}^{A,Kontakt} &= \tfrac{d}{a} = \tfrac{0{,}01}{20} = \tfrac{-\nu}{E}\sigma_{22}^A + \alpha_T \Delta T^A = (1+\nu)\,\alpha_T \Delta T^A & & \Rightarrow \quad \Delta T^A = 19{,}23\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

Ersatzkolloquium SS2019
2. Beispiel: Thermoelastizität

Angabe:

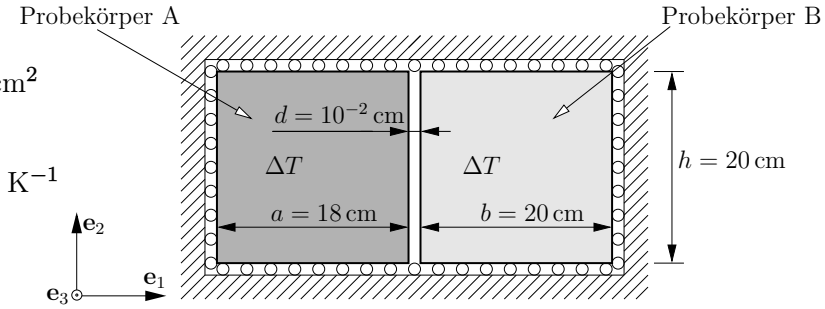
Gegeben sind zwei isotrope Probekörper A und B gleicher Dicke, welche zueinander den Spalt d aufweisen, siehe Abbildung. Beide Probekörper werden um eine Temperaturdifferenz ΔT erwärmt. Die Materialparameter, welche das isotrope thermoelastische Verhalten der beiden Körper beschreiben, sind der untenstehenden Auflistung zu entnehmen.

Hinweise: In beiden Körpern liegt jeweils ein homogener ebener Spannungszustand in der $\mathbf{e}_1$-$\mathbf{e}_2$-*Ebene vor. Alle Kontaktflächen sind reibungsfrei.*

$E^A = 700\,\mathrm{kN/cm^2}$

$\nu^A = 0{,}20$

$\alpha_T^A = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$



$E^B = 1500\,\mathrm{kN/cm^2}$

$\nu^B = 0{,}20$

$\alpha_T^B = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$

Gesucht:

a. Bestimmen Sie die erforderliche Temperaturdifferenz ΔT_{grenz}, sodass sich beide Probekörper gerade berühren, und geben Sie die dabei auftretenden Komponenten des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ für Probekörper A und B vollständig an.

b. Beweisen Sie rechnerisch, dass bei einer Temperaturdifferenz von $\Delta T = 20\,\mathrm{K}$ ($>\Delta T_{grenz}$) gilt: $|\sigma_{22}^B| > |\sigma_{22}^A|$.

c. Berechnen Sie die Richtung des plastischen Flusses in Probekörper B für den Fall *Abkühlung* ($\Delta T < 0$) und geben Sie die Komponenten von $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ in der $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$-Basis an.

Lösung:

a.

$\Delta l^A + \Delta l^B = d \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{11}^A \cdot a + \varepsilon_{11}^B \cdot b = d$

Das Hooksche Gesetz für Probeköper A und B: $\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ 0 \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{22} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T \cdot \Delta T \\ \alpha_T \cdot \Delta T \\ \alpha_T \cdot \Delta T \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \left[\alpha_T^A \cdot \Delta T_a (1+\nu^A)\right] \cdot a + \left[\alpha_T^A \cdot \Delta T_a (1+\nu^A)\right] \cdot b = d \quad \Rightarrow \Delta T_a = \frac{d}{\alpha_T^A (1+\nu^A) \cdot a + \alpha_T^B (1+\nu^B) \cdot b} = 10{,}602\,\mathrm{K}$

"A": $\sigma_{22}^A = -\alpha_T^A \cdot \Delta T_a \cdot E^A = -0{,}126\,\mathrm{kN/cm^2}\,, \quad \varepsilon_{11}^A = \varepsilon_{33}^A = \alpha_T^A \cdot \Delta T_a (1+\nu^A) = 2{,}16 \cdot 10^{-4}$

"B": $\sigma_{22}^B = -\alpha_T^B \cdot \Delta T_a \cdot E^B = -0{,}382\,\mathrm{kN/cm^2}\,, \quad \varepsilon_{11}^B = \varepsilon_{33}^B = \alpha_T^B \cdot \Delta T_a (1+\nu^B) = 3{,}05 \cdot 10^{-4}$

b.

Das Hooksche Gesetz für Probeköper A und B: $\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ 0 \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T \cdot \Delta T \\ \alpha_T \cdot \Delta T \\ \alpha_T \cdot \Delta T \end{bmatrix}$

Gleiche Spannung in $\mathbf{e}_1$-Richtung $\Rightarrow \sigma_{11}^A = \sigma_{11}^B = \sigma_{11}$:

2.Zeile Hooke: $\sigma_{22}^A = \nu^A \sigma_{11} - \alpha_T^A \cdot \Delta T_b \cdot E^A, \quad \sigma_{22}^B = \nu^B \sigma_{11} - \alpha_T^B \cdot \Delta T_b \cdot E^B$, mit $\nu^A = \nu^B$

$\Rightarrow \sigma_{22}^A = \sigma_{22}^B + \Delta T_b \left(\alpha_T^B \cdot E^B - \alpha_T^A \cdot E^A\right)$, daraus folgt: $|\sigma_{22}^B| > |\sigma_{22}^A|$ da $\alpha_T^B \cdot E^B > \alpha_T^A \cdot E^A$.

c.

$\sigma_I^B > \sigma_{II}^B > \sigma_{III}^B$:

$\sigma_I^B = \sigma_{22}^B, \quad \sigma_{II}^B = \sigma_{III}^B = 0$

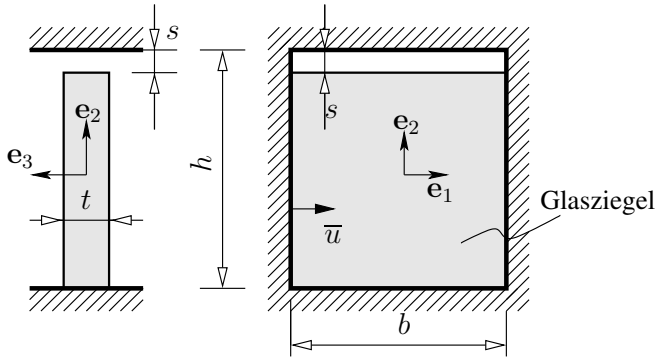
Tresca: $\Rightarrow (\sigma_I - \sigma_{III}) - f_y = 0$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Kolloquium SS2018
2. Beispiel: Thermoelastizität

Angabe:

Gegeben ist ein Glasziegel, dessen Oberflächen als reibungsfrei zu betrachten sind. Die Randflächen an der unteren, der linken, sowie der rechten Seite des Glasziegels berühren das anschließende Mauer- werk, wohingegen die obere Randfläche zum anschließenden Mauerwerk einen Spalt s aufweist.



Schubmodul:	$G = 30\,\mathrm{GPa}$
Kompressionsmodul:	$K = 45\,\mathrm{GPa}$
Wärmeausdehn.-koeff.:	$\alpha_T = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$
einaxiale Zugfestigkeit:	$f_{tu} = 30\,\mathrm{N/mm^2}$
einaxiale Druckfestigkeit:	$f_{cu} = 900\,\mathrm{N/mm^2}$
Referenztemperatur:	$T_0 = 20°\mathrm{C}$
Glasziegelbreite:	$b = 210\,\mathrm{mm}$
Maueröffnungshöhe:	$h = 250\,\mathrm{mm}$
Glasziegeldicke:	$t = 50\,\mathrm{mm}$

Gesucht:

a. Wie groß muss bei einer Spaltbreite $s_a = 0{,}1\,\mathrm{mm}$ die Temperaturänderung ΔT_a sein, damit die obere Randfläche des Glasziegels das anschließende Mauerwerk gerade berührt?

b. Die Spaltbreite beträgt nun $s_b = 5\,\mathrm{mm}$. Aufgrund einer eingeprägten Mauerwerksverschiebung wird der Glasziegel um $\overline{u} = 2{,}5\,\mathrm{mm}$ in $\mathbf{e}_1$-Richtung zusammengedrückt. Welche Erwärmung ΔT_b des Glasziegels ist notwendig, damit Versagen des Glasziegels eintritt? Geben Sie den dabei auftretenden Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und den zugehörigen linearisierten Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ vollständig an.

Hinweis: Die Spaltbreite s_b in Punkt b ist ausreichend groß, um an der oberen Seite eine Berührung des Mauerwerks zu verhindern.

c. Ermitteln Sie die Volumenänderung des Glasziegels, welche dem in Punkt b berechneten Verzerrungszustand entspricht.

Lösung:

$E = \frac{9KG}{3K+G} = 73636{,}36\,\mathrm{N/mm^2}$, $\nu = \frac{3K-2G}{6K+2G} = 0{,}2273$

a. $\varepsilon_{a,22} = \frac{s}{(h-s)} = \frac{0{,}1}{250-0{,}1} = 4{,}0016 \cdot 10^{-4}$, $\Delta T_a = \frac{\varepsilon_{a,22}}{(1+\nu)\alpha_T} = \frac{4{,}0016 \cdot 10^{-4}}{(1+0{,}2273)\cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 65{,}21\,\mathrm{K}$

b. $\varepsilon_{b,11} = -\frac{\overline{u}}{b} = -\frac{2{,}5}{210} = -1{,}19 \cdot 10^{-2}$, $\sigma_{b,11} = -f_{c,u} = -900\,\mathrm{N/mm^2}$

$\varepsilon_{b,11} = \frac{1}{E}\sigma_{b,11} + \alpha_T \cdot \Delta T_b \Rightarrow \Delta T_b = \frac{1}{\alpha_T}(\varepsilon_{b,11} - \frac{\sigma_{b,11}}{E}) = 64{,}44\,\mathrm{K}$

$\varepsilon_{b,22} = \varepsilon_{b,33} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{b,11} + \alpha_T \Delta T_b = \frac{0{,}2273 \cdot 900}{73636{,}36} + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 64{,}44 = 3{,}100 \cdot 10^{-3}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} -1{,}19 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}100 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}100 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_b = \begin{bmatrix} -900 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{N/mm^2}$$

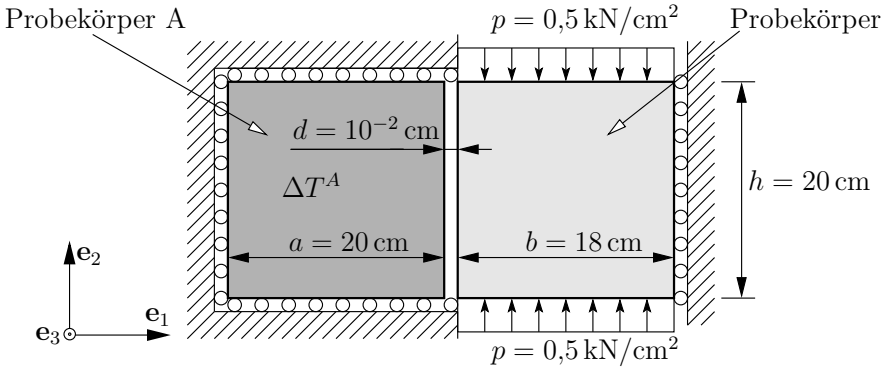
c. $\Delta V = b \cdot (h - s_b) \cdot t \cdot ((1+\varepsilon_{b,11})(1+\varepsilon_{b,22})(1+\varepsilon_{b,33}) - 1) = -14{,}83\,\mathrm{cm}^3$

Ersatzkolloquium SS2018
1. Beispiel: Thermoelastizität

Angabe:

Gegeben sind zwei isotrope Probekörper A und B gleicher Dicke, welche zueinander den Spalt d aufweisen, siehe Abbildung. Probekörper A wird um eine Temperaturdifferenz ΔT erwärmt. Auf Probekörper B wird eine Druckspannung in $\mathbf{e}_2$-Richtung aufgebracht. Die Materialparameter, welche das isotrope thermoelastische Verhalten der beiden Körper beschreiben, sind der untenstehenden Auflistung zu entnehmen.

Hinweise: Es liegt ein ebener Spannungszustand vor. Mit Ausnahme der belasteten Ränder wird in allen anderen Rändern die Verschiebung normal auf die Berandung verhindert. Alle Berandungen und die Kontaktflächen sind reibungsfrei.



$E^A = 700\,\mathrm{kN/cm^2}$
$\nu^A = 0{,}25$
$\alpha_T^A = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$

$E^B = 1500\,\mathrm{kN/cm^2}$
$\nu^B = 0{,}20$
$f_y^B = 4{,}0\,\mathrm{kN/cm^2}$

Gesucht:

a. Bestimmen Sie die erforderliche Temperaturdifferenz ΔT_a^A in Probekörper A (bei gleichzeitiger Belastung p auf Probekörper B), sodass sich beide Körper gerade berühren, und geben Sie die dabei auftretenden Komponenten des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ für Probekörper A und B vollständig an.

b. Bestimmen Sie den Laststeigerungsfaktor λ für die Druckspannung p (bei $\Delta T_b^A = 10\,\mathrm{K}$), sodass es in Probekörper B zum Fließen (nach Tresca) kommt. Ermitteln Sie die Richtung des plastischen Flusses und geben Sie die Komponenten von $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ in der $\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}$-Basis an.
Hinweis: Überprüfen Sie rechnerisch, ob sich beim Versagen von Probekörper B (bei $\Delta T_b^A = 10\,K$) die beiden Probekörper berühren.

c. Würde sich der Laststeigerungsfaktor λ aus Punkt b bei Nicht-Berührung oder Berührung der beiden Probekörper vor dem Versagenszeitpunkt ändern? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a. Übergangsbedingung: $\varepsilon_{11}^A \cdot a + \varepsilon_{11}^B \cdot b = d$

Das Hooksche Gesetz lautet für beide Probeköper A und B:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^A \\ 0 \\ \varepsilon_{33}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E^A} & -\frac{\nu^A}{E^A} & -\frac{\nu^A}{E^A} \\ -\frac{\nu^A}{E^A} & \frac{1}{E^A} & -\frac{\nu^A}{E^A} \\ -\frac{\nu^A}{E^A} & -\frac{\nu}{E^A} & \frac{1}{E^A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{22}^A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T^A \cdot \Delta T \\ \alpha_T^A \cdot \Delta T \\ \alpha_T^A \cdot \Delta T \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^B \\ \varepsilon_{22}^B \\ \varepsilon_{33}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E^B} & -\frac{\nu^B}{E^B} & -\frac{\nu^B}{E^B} \\ -\frac{\nu^B}{E^B} & \frac{1}{E^B} & -\frac{\nu^B}{E^B} \\ -\frac{\nu^B}{E^B} & -\frac{\nu^B}{E^B} & \frac{1}{E^B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -p \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Komponenten sämtlicher Tensoren beziehen sich auf die $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$-Basis.

$\Rightarrow \left[\alpha_T^A \cdot \Delta T_a (1+\nu^A)\right] \cdot a + \left[\nu^B / E^B \cdot p\right] \cdot b = d \Rightarrow \Delta T_a = \frac{d - \left[\nu^B / E^B \cdot p\right] \cdot b}{\left[\alpha_T^A (1+\nu^A)\right] \cdot a} = 20{,}706\,\mathrm{K}$

"A": $\sigma_{22}^A = -\alpha_T^A \cdot \Delta T_a \cdot E^A = -0{,}246\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\quad \varepsilon_{11}^A = \varepsilon_{33}^A = \alpha_T^A \cdot \Delta T_a (1+\nu^A) = 4{,}4 \cdot 10^{-4}$

"B": $\sigma_{22}^B = -p = -0{,}5\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\quad \varepsilon_{11}^B = \varepsilon_{33}^B = \nu^B / E^B \cdot p = 0{,}67 \cdot 10^{-4}$, $\quad \varepsilon_{22}^B = -p / E^B = 3{,}33 \cdot 10^{-4}$

b.

$\sigma_I^B > \sigma_{II}^B > \sigma_{III}^B$:

$\sigma_I^B = 0, \quad \sigma_{III}^B = -p = -0{,}5\,\mathrm{kN/cm^2}$

$\Rightarrow \lambda(\sigma_I - \sigma_{III}) - f_y^B = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = 8{,}0$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$

$\Delta l_1^A = \alpha_T^A \cdot \Delta T_b (1+\nu^A) \cdot a = 0{,}425 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm}$

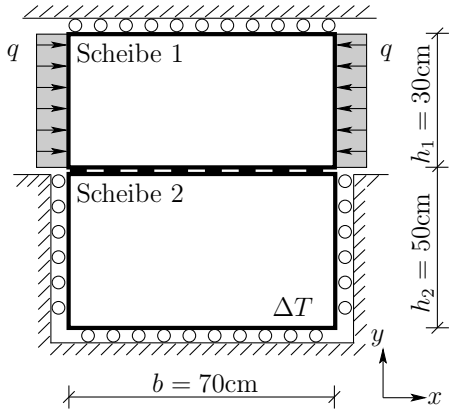
$\Delta l_1^B = \left[-\nu^B / E^B \cdot (-\lambda p)\right] \cdot b = 0{,}96 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm} \rightarrow \Delta l_1^A + \Delta l_1^B > d \rightarrow$ Berührung!

c. Die Berührung hat auf den Laststeigerungsfaktor (bei Versagen nach Tresca) keinen Einfluss, da immer gilt: $\sigma_I^B = 0$ und $\sigma_{III}^B = -\lambda p$ (keine Berührung: $\sigma_{II}^B = 0$, Berührung: $0 > \sigma_{II}^B > -\nu^B \lambda p$)

2.Kolloquium WS2016/2017
2. Beispiel: Thermoelastizität und Elastoplastizität

Angabe:

Gegeben sind zwei isotrope Stahlscheiben (Dicke $t = 1{,}0\,\mathrm{cm}$), siehe Abbildung. Auf Scheibe 1 wird eine horizontale Belastung $q = 1{,}0\,\mathrm{kN/cm^2}$ aufgebracht. Scheibe 2 wird um $\Delta T = 100\,\mathrm{K}$ erwärmt. Die Materialparameter lauten: $E = 21000\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\nu = 0{,}25$, $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ und $f_y = 35{,}5\,\mathrm{kN/cm^2}$.



Gesucht:

1. Bestimmen Sie die numerischen Werte der Spannungstensoren $\boldsymbol{\sigma}$ und der Verzerrungstensoren $\boldsymbol{\varepsilon}$ für beide Scheiben.

2. Welche Belastung q muss (bei $\Delta T = 0\,\mathrm{K}$) auf Scheibe 1 aufgebracht werden, sodass es gerade zum Fließen (nach Tresca) kommt (q soll dabei in Scheibe 1 in x-Richtung eine Zugspannung erzeugen)? Ermitteln Sie die Richtung des plastischen Flusses und geben Sie die Komponenten von $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ in der $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$-Basis an.

Hinweise: Es liegt ein ebener Spannungszustand vor. Mit Ausnahme der belasteten Ränder wird an allen anderen Rändern die Verschiebung normal auf die Berandung verhindert. Alle Berandungen und die Kontaktflächen sind reibungsfrei. Aufgrund der Gleichgewichtsbedingungen in den Kontaktflächen sind die Druck-Normalspannungen der beiden Scheiben in y-Richtung gleich groß – die Kontaktfläche kann jedoch keine Zug-Normalspannungen übertragen. Verwenden Sie die linearisierte Elastizitätstheorie.

Lösung:

1. $-\Delta l_{yy,1} = \Delta l_{yy,2} \Rightarrow -\varepsilon_{yy,1} h_1 = \varepsilon_{yy,2} h_2$

   $\sigma_{yy} = \sigma_{yy,1} = \sigma_{yy,2} = -20{,}585\,\mathrm{kN/cm^2}$

   $$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} -1{,}0000 & 0 & 0 \\ 0 & -20{,}585 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z} \mathrm{kN/cm^2}$$

   $$\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} -30{,}346 & 0 & 0 \\ 0 & -20{,}585 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z} \mathrm{kN/cm^2}$$

   $$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}1974 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}9684 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2570 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z} \cdot 10^{-3}$$

   $$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5810 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}8063 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z} \cdot 10^{-3}$$

2. $p = -35{,}5\,\mathrm{kN/cm^2}$

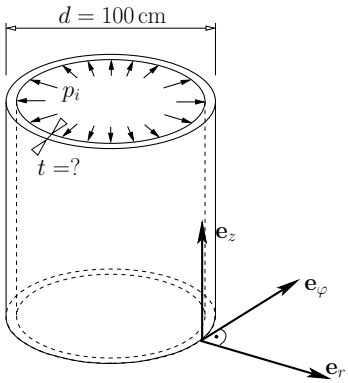
   $\sigma_I = -p, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$

   $$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z}$$

2. Kolloquium WS2015/2016
3. Beispiel: Gasgefülltes Stahlrohr:

Angabe:

Gegeben ist ein $100\,\mathrm{m}$ langes zylindrisches Stahlrohr (an den Enden ist das Rohr offen). Ein Stück des Rohres ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt. Das Rohr ist in z-Richtung kontinuierlich gegen Verschieben gehalten (reibungsfrei), in allen anderen Richtungen sind die Verformungen unbehindert. Es ist einem Innendruck $p_i = 1{,}5\,\mathrm{MPa}$ sowie einer homogenen Temperaturänderung (im Fall 1: Erwärmung um $\Delta T = +12\,\mathrm{K}$, im Fall 2: Abkühlung um $\Delta T = -12\,\mathrm{K}$) ausgesetzt.



Der Stahl des Rohres weist einen E-Modul von $E = 210\,\mathrm{GPa}$, einen Schubmodul von $G = 87{,}5\,\mathrm{GPa}$ und einen Wärmeausdehnungskoeffizient von $\alpha_T = 13 \times 10^{-5}\,1/\mathrm{K}$ auf. Die Festigkeit kann durch das Tresca-Festigkeitskriterium mit der Schubfestigkeit $f_s = 280\,\mathrm{MPa}$ beschrieben werden.

Gesucht:

1. Berechnen Sie die erforderliche Dicke t_{erf} bei $1{,}5$-facher Sicherheit gegen Fließen nach der Hypothese von Tresca. Unterscheiden Sie dabei die Fälle *Erwärmung* und *Abkühlung*.

2. Ermitteln Sie die Richtung des plastischen Flusses für $t = t_{erf}$ unter Annahme assoziierter Plastizität und geben Sie die Komponenten von $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ in der $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$-Basis an. Unterscheiden Sie auch dabei die Fälle *Erwärmung* und *Abkühlung*.

Es ist linearisierte Elastizitätstheorie zu Grunde zu legen und mit einem ebenen Spannungszustand in der Mantelfläche (φ-z Ebene) zu rechnen.

Lösung:

a. Das Rohr ist in z-Richtung gegen Verschieben gehalten $\rightarrow \varepsilon_{zz} = 0$.

Auswerten des Hookesches Gesetz liefert:

$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}) + \alpha_T \Delta T = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{zz} = -\alpha_T \Delta T \cdot E + \nu\sigma_{\varphi\varphi}$

<u>Fall 1: Erwärmung</u>

$\sigma_{max} = \sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{min} = \sigma_{zz}$ (Druck wegen Behinderung!)

Einsetzen in das Tresca Kriterium: $f(\sigma) = 1,5(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 2f_s \rightarrow \sigma_{\varphi\varphi} = 57,17\mathrm{N/mm}^2$

Die erforderliche Dicke: $t = \frac{p_i R}{\sigma_{\varphi\varphi}} = 13$ mm

<u>Fall 2: Abkühlung</u>

σ_{max}, $\sigma_{min} = \sigma_{rr} = 0$ Es ist zu Beginn unbekannt, ob σ_{zz} oder $\sigma_{\varphi\varphi}$ größer sind.

Einsetzen in das Tresca Kriterium: $f(\sigma) = 1,5(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 2f_s \rightarrow \sigma_{max} = 373,33\mathrm{N/mm}^2$

Einsetzen in $\sigma_{zz} = -\alpha_T \Delta T \cdot E + \nu\sigma_{\varphi\varphi}$ und Vergleich von σ_{zz} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ liefert:

$\sigma_{max} = \sigma_{zz} = 373{,}33\,\mathrm{N/mm}^2 > 228{,}67\,\mathrm{N/mm}^2 = \sigma_{\varphi\varphi}$

Die erforderliche Dicke: $t = \frac{p_i R}{\sigma_{\varphi\varphi}} = 3{,}28$ mm

b. Richtung des plastischen Flusses:

<u>Fall 1: Erwärmung</u>

$\sigma_I = \sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{II} = \sigma_{rr}$, $\sigma_{III} = \sigma_{zz}$

$$\dot{\varepsilon}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z}$$

<u>Fall 2: Abkühlung</u>

$\sigma_I = \sigma_{zz}$, $\sigma_{II} = \sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{III} = \sigma_{rr}$

$$\dot{\varepsilon}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z}$$

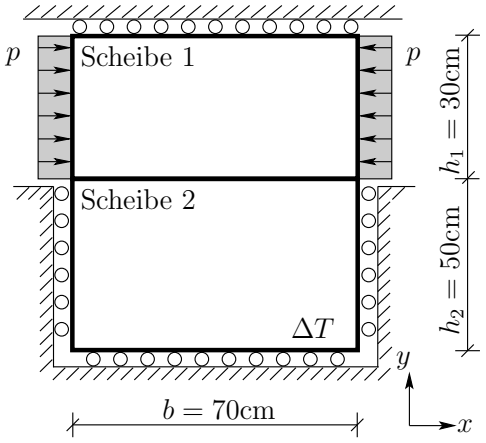
Ersatzkolloquium WS2015/2016
3. Beispiel: Thermoelastizität:

Angabe:

Gegeben sind zwei isotrope Stahlscheiben gleicher Dicke. Auf Scheibe 1 wird eine horizontale Druck-spannung $p = 0{,}5\,\mathrm{kN/cm^2}$ aufgebracht. Scheibe 2 wird um eine Temperaturdifferenz $\Delta T = 10\,\mathrm{K}$ erwärmt. Es liegt ein ebener Spannungszustand vor. Mit Ausnahme der belasteten Ränder wird an allen anderen Rändern die Verschiebung normal auf die Berandung verhindert, siehe Abbildung. Alle Berandungen und die Kontaktfläche sind *reibungsfrei*.

Materialkennwerte Scheibe 1: $E = 210\,\mathrm{GPa}$, $\nu = 0{,}30$; $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$; $f_y = 35{,}5\,\mathrm{kN/cm^2}$

Materialkennwerte Scheibe 2: $E = 190\,\mathrm{GPa}$, $\nu = 0{,}27$; $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$; $f_y = 35{,}5\,\mathrm{kN/cm^2}$



Gesucht:

1. Geben Sie die Spannungs- und Verzerrungszustände in beiden Scheiben an!
2. Um wieviel Prozent muss die Temperaturdifferenz erhöht werden, damit in einer der Scheiben Versagen nach Tresca eintritt?

Hinweise: Aufgrund der Gleichgewichtsbedingungen in der Kontaktfläche sind die Normalspannungen der beiden Scheiben in y-Richtung gleich groß. Ausknicken in z-Richtung wird verhindert. Verwenden Sie die linearisierte E-Theorie.

Lösung:

3. Beispiel: Thermoelastizität

3.1 Spannungs- und Verzerrungszustände

Scheibe 1: $\sigma_{xx,1} = -0{,}5\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\sigma_{yy,1} = \sigma_{yy,2} = \sigma_{yy}$, $\sigma_{xy,1} = 0$

$\varepsilon_{xx,1} = \frac{1}{E_1}(\sigma_{xx,1} - \nu_1\sigma_{yy,1})$, $\varepsilon_{yy,1} = \frac{1}{E_1}(\sigma_{yy,1} - \nu_1\sigma_{xx,1})$

Scheibe 2: $\varepsilon_{xx,2} = 0$ wegen Behinderung in x-Richtung, $\sigma_{yy,2} = \sigma_{yy,1} = \sigma_{yy}$, $\varepsilon_{xx,2} = 0$

$\varepsilon_{xx,2} = \frac{1}{E_2}(\sigma_{xx,2} - \nu_2\sigma_{yy,2}) + \alpha_T\Delta T \rightarrow \sigma_{xx,2} = -E_2\alpha_T\Delta T + \nu_2\sigma_{yy}$

$\varepsilon_{yy,2} = \frac{1}{E_2}(\sigma_{yy,2} - \nu_1\sigma_{xx,2}) = \frac{1}{E_2}\left[\sigma_{yy} - \nu_2\left(-E_2\alpha_T\Delta T + \nu_2\sigma_{yy}\right)\right] + \alpha_T\Delta T$

$\boxed{-\Delta l_{yy,1} = \Delta l_{yy,2}} \rightarrow -\varepsilon_{yy,1}h_1 = \varepsilon_{yy,2}h_2$

$-\left\{\frac{1}{E_1}(\sigma_{yy} - \nu_1\sigma_{xx,1})\right\}h_1 = \left\{\frac{1}{E_2}\left[\sigma_{yy} - \nu_2\left(-E_2\alpha_T\Delta T + \nu_2\sigma_{yy}\right)\right] + \alpha_T\Delta T\right\}h_2$

$\rightarrow \sigma_{yy} = -19{,}7539\,\mathrm{kN/cm^2}$

$\sigma_{xx,1} = -0.5\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\varepsilon_{xx,1} = 2{,}5839 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{yy,1} = -9{,}3352 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{zz,1} = 2{,}8934 \cdot 10^{-4}$

$\sigma_{xx,2} = -28{,}1336\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\varepsilon_{xx,2} = 0$, $\varepsilon_{yy,2} = 5{,}6011 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{zz,2} = 0{,}0019$.

3.2 Zulässige Temperatur

Scheibe 1: $\sigma_I = 0$, $\sigma_{III} = -19{,}7539\,\mathrm{kN/cm^2} \rightarrow f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_I - \sigma_{III} - f_y = -15{,}7461 < 0$

Scheibe 2: $\sigma_I = 0$, $\sigma_{III} = -28{,}1336\,\mathrm{kN/cm^2} \rightarrow f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_I - \sigma_{III} - f_y = -7{,}3664 < 0$ *maßgebend*

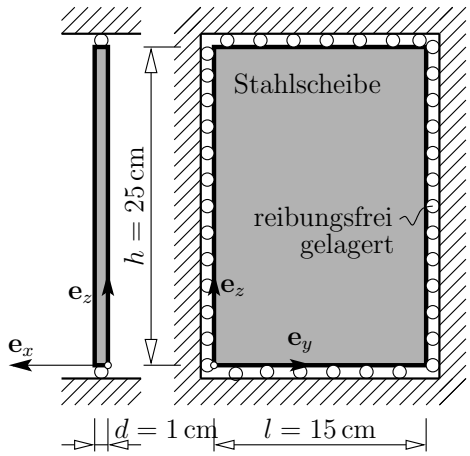
$\rightarrow \lambda = 1{,}2618$

$\Delta T_{lim} = \lambda\Delta T = 12{,}618\mathrm{K} \rightarrow 26{,}2\%$

2.Kolloquium WS2014/2015
3. Beispiel: Festigkeit, Thermo- und Elastoplastizität:

Angabe:

Gegeben ist eine homogene Scheibe aus Stahl, die gemäß nebenstehender Abbildung in einen starren Rahmen eingebettet ist. Im spannungs- und verzerrungsfreien Ausgangszustand hat die Scheibe eine Temperatur von $T_0 = 20°\mathrm{C}$. Der verwendete Stahl weist eine Querdehnungszahl von $\nu = 0{,}30$, einen Schubmodul von $G = 87{,}5\,\mathrm{GPa}$ und einen Wärmeausdehnungskoeffizienten von $\alpha_T = 13 \times 10^{-5}\,1/\mathrm{K}$ auf. Die Festigkeit des Stahls kann durch ein von Mises-Festigkeitskriterium mit Festigkeitsparameter $k = 136\,\mathrm{MPa}$ beschrieben werden.



Gesucht:

1. Berechnen Sie die kritische Temperatur bei der die Stahlscheibe zu fließen beginnt. Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle *Erwärmung* der Stahlscheibe $T_{kr}^E > T_0$ sowie *Abkühlung* $T_{kr}^A < T_0$.

2. Ermitteln Sie die Richtung des plastischen Flusses $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ für $T = T_{kr}^A$ unter Annahme assoziierter Plastizität und geben Sie die Tensorkomponenten von $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ in der Basis $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, und $\mathbf{e}_z$ an.

Anmerkungen: Es ist die linearisierte Elastizitätstheorie zu Grunde zu legen. Alle Kontaktflächen sind als reibungsfrei anzunehmen. Das Eigengewicht kann vernachlässigt werden. Mögliches Ausknicken der Stahlscheibe wird konstruktiv verhindert.

Lösung:

Aus der Lagerung folgen **Spannungstensor** $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

und **Verzerrungstensor** $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Auswertung des **Hookeschen Gesetzes** (2. und 3. Zeile) liefert ein Gleichungssystem:
$0 = \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} + \alpha_T \Delta T$ sowie $0 = -\frac{\nu}{E}\sigma_{yy} + \frac{1}{E}\sigma_{zz} + \alpha_T \Delta T$.
Auflösen ergibt $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\frac{\alpha_T \Delta T\, E}{1-\nu}$ mit $E = 2G(1+\nu) = 227\,\text{GPa}$.
2. Invariante des Spannungsdeviators $J_2 = \frac{1}{3}\sigma_{yy}^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{J_2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\frac{\alpha_T \Delta T\, E}{1-\nu}$
Einsetzen in **von Mises** Kriterium $\sqrt{J_2} - k = 0$ mit $\Delta T = \Delta T_{kr}$ ergibt $\Delta T_{kr} = \pm\frac{k(1-\nu)\sqrt{3}}{\alpha_t E} = \pm 5{,}58°\text{C}$.
kritische Temperatur Erwärmung: $T_{kr}^E = T_0 + |\Delta T_{kr}| = 25{,}58°\text{C}$, Abkühlung $T_{kr}^A = T_0 - |\Delta T_{kr}| = 14{,}42°\text{C}$

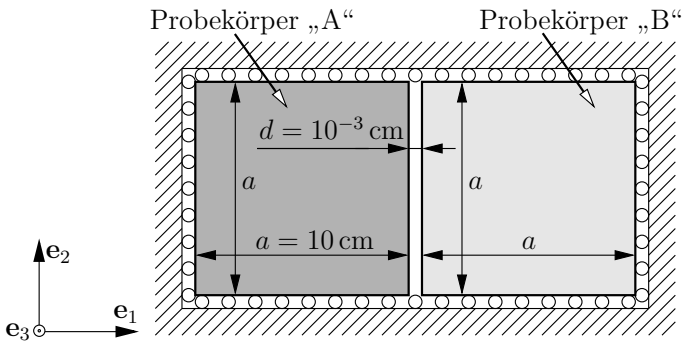
bei assoziierter **von Mises-Plastizität** gilt $g = \sqrt{J_2} - k$ und daher $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\frac{1}{2\sqrt{J_2}}\mathbf{s}$
Für $T = T_{kr}^A$ folgt $\sigma_{yy} = 235{,}24\,\text{MPa}$ und $\sqrt{J_2} = k = 136\,\text{MPa}$
mit dem Spannungsdeviator $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\sigma_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma_{yy} \end{pmatrix}$ folgt $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} -0{,}577 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}288 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}288 \end{pmatrix}$

2.Kolloquium WS2013/2014
2. Beispiel: Thermoelastizität:

Angabe:

Gegeben sind zwei Probekörper „A“ und „B“, die gemäß Abbildung in einem starren Rahmen eingebettet sind. Die Materialparameter, welche das isotrope thermoelastische Verhalten der beiden Körper beschreiben, sind der untenstehenden Auflistung zu entnehmen.

Anmerkung: Alle Kontaktflächen sind als reibungsfrei zu betrachten. Es ist näherungsweise ein homogener Spannungszustand anzunehmen. Die Spannungstensorkomponente in der $\mathbf{e}_3$*-Richtung ist gegenüber den Spannungstensorkomponenten in der* $\mathbf{e}_1$*- und* $\mathbf{e}_2$*-Richtung vernachlässigbar klein.*



$E^A = 7\,\mathrm{GPa}$
$\nu^A = 0{,}25$
$\alpha_T^A = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$

$E^B = 15\,\mathrm{GPa}$
$\nu^B = 0{,}20$
$\alpha_T^B = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$

Gesucht:

1. Die Grenztemperaturänderung ΔT_1, sodass sich die beiden Körper gerade berühren.
2. Die Verzerrungstensorkomponente des Probekörpers „A“, ε_{11}^A, in Abhängigkeit von der Verzerrungstensorkomponente des Probekörpers „B“, ε_{11}^B, und von der Temperaturänderung ΔT_2, bei Erwärmung um $\Delta T_2 > \Delta T_1$.

Lösung:

Der Nachgiebigkeitstensor $\mathbf{D}$

hat folgende Komponenten:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}$$

mit Elastizitätsmodul E und Querdehnungszahl ν des jeweiligen Körpers.

Die Komponenten sämtlicher Tensoren beziehen sich auf die $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$-Basis.

1) ESZ:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{22}^A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T^A \cdot \Delta T \\ \alpha_T^A \cdot \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{22}^B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T^B \cdot \Delta T \\ \alpha_T^B \cdot \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{33}^A = -\frac{\nu^A}{E^A}(\sigma_{11}^A + \sigma_{22}^A) + \alpha_T^A \cdot \Delta T \qquad \varepsilon_{33}^B = -\frac{\nu^B}{E^B}(\sigma_{11}^B + \sigma_{22}^B) + \alpha_T^B \cdot \Delta T$$

$$(\varepsilon_{11}^A + \varepsilon_{11}^B)a = d \Rightarrow \Delta T_1 = \frac{10^{-4}}{\alpha_T^A(1+\nu^A)+\alpha_T^B(1+\nu^B)} = 3{,}67\,\mathrm{K}$$

2) ESZ:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11}^A \\ \sigma_{22}^A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T^A \cdot \Delta T_1 \\ \alpha_T^A \cdot \Delta T_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11}^B \\ \sigma_{22}^B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T^B \cdot \Delta T_1 \\ \alpha_T^B \cdot \Delta T_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

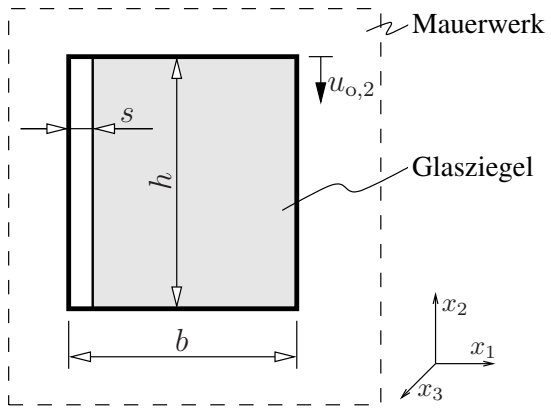
$$\varepsilon_{33}^A = -\frac{\nu^A}{E^A}(\sigma_{11}^A + \sigma_{22}^A) + \alpha_T^A \cdot \Delta T_1 \qquad \varepsilon_{33}^B = -\frac{\nu^B}{E^B}(\sigma_{11}^B + \sigma_{22}^B) + \alpha_T^B \cdot \Delta T_1$$

$$\sigma_{11}^A = \sigma_{11}^B \Rightarrow \varepsilon_{11}^A = 2{,}0926\varepsilon_{11}^B + 8{,}6942 \cdot 10^{-6}\Delta T_2$$

2.Kolloquium WS2012/2013
1. Beispiel: Thermoelastizität:

Angabe:

Gegeben ist ein Glasziegel, dessen Oberflächen als reibungsfrei zu betrachten sind. Die Randflächen an der oberen, der unteren, sowie der rechten Seite des Glasziegels berühren das anschließende Mauer- werk, wohingegen die linke Randfläche des Glasziegels zum anschließenden Mauerwerk einen Spalt mit Breite s aufweist. Abmessungen und Materialkonstanten des Glasziegels sind der Abbildung zu entnehmen.



Schubmodul:	$G = 30\,\mathrm{GPa}$
Kompressionsmodul:	$K = 45\,\mathrm{GPa}$
Linearer Wärmeausdehnungskoeffizient:	$\alpha_T = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$
einaxiale Zugfestigkeit:	$f_{tu} = 30\,\mathrm{N/mm}^2$
einaxiale Druckfestigkeit:	$f_{cu} = 900\,\mathrm{N/mm}^2$

Referenztemperatur: $T_0 = 20°\mathrm{C}$

Mauerlichte:	$b = 200\,\mathrm{mm}$
Glasziegelhöhe:	$h = 250\,\mathrm{mm}$
Glasziegeldicke:	$t = 50\,\mathrm{mm}$

Gesucht:

1. Wie groß muss für eine Spaltbreite $s = 0{,}1\,\mathrm{mm}$ die Temperaturänderung ΔT_a sein (ausgehend von der Referenztemperatur T_0), damit die linke Randfläche des Glasziegels das anschließende Mauerwerk gerade berührt (hier gilt $u_{o,2} = 0$).

2. Aufgrund von Materialversagen im Mauerwerk verschiebt sich die obere Randfläche des Glasziegels um $u_{o,2} = 3\,\mathrm{mm}$. Bei welcher Erwärmung ΔT_b des Glasziegels tritt Versagen ein (ausgehend von der Referenztemperatur T_0), wenn die Spaltbreite nun $s = 3\,\mathrm{mm}$ beträgt? Geben Sie den dabei auftretenden Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}_b$ und den zugehörigen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ an.

3. Ermitteln Sie die Volumsänderung des Glasziegels, die dem in Punkt 2 berechneten Verzerrungszustand entspricht.

Lösung:

$E = \frac{9KG}{3K+G} = 73636{,}36\,\mathrm{N/mm^2}$, $\nu = \frac{3K-2G}{6K+2G} = 0{,}2273$

$\varepsilon_{a,11} = \frac{s}{(b-s)} = \frac{0{,}1}{200-0{,}1} = 5{,}0025 \cdot 10^{-4}$, $\Delta T_a = \frac{\varepsilon_{a,11}}{(1+\nu)\alpha_T} = \frac{5{,}0025 \cdot 10^{-4}}{(1+0{,}2273) \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 81{,}52\,\mathrm{K}$

$\varepsilon_{b,22} = -\frac{u_{\mathrm{o},2}}{h} = -\frac{3}{250} = -1{,}2 \cdot 10^{-2}$, $\sigma_{b,22} = -f_{c,u} = -900\,\mathrm{N/mm^2}$

$\varepsilon_{b,22} = \frac{1}{E}\sigma_{b,22} + \alpha_T \cdot \Delta T_b \Rightarrow \Delta T_b = \frac{1}{\alpha_T}(\varepsilon_{b,22} - \frac{\sigma_{b,22}}{E}) = 44{,}43\,\mathrm{K}$

$\varepsilon_{b,11} = \varepsilon_{b,33} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{b,22} + \alpha_T \Delta T_b = \frac{0{,}2273 \cdot 900}{73636{,}36} + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 44{,}43 = 3{,}0003 \cdot 10^{-3}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} 3{,}0003 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}2 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}0003 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

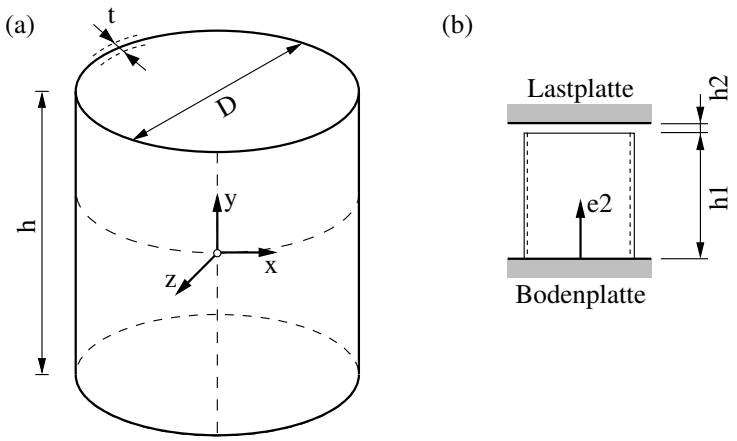
$$\boldsymbol{\sigma}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{N/mm^2}$$

$\Delta V = (b-s) \cdot h \cdot t \cdot ((1+\varepsilon_{b,11})(1+\varepsilon_{b,22})(1+\varepsilon_{b,33}) - 1) = -14{,}93\,\mathrm{cm^3}$

2.Kolloquium WS2011/2012
1. Beispiel: Thermoelastizität:

Angabe:

Gegeben ist ein zylindrischer, dünnwandiger Glaskörper mit offener Grund- bzw. Deckfläche, mit Abmessungen $h = 500\,\text{mm}$, $D = 250\,\text{mm}$, und $t = 5\,\text{mm}$, siehe Abbildung (a). Der Glaszylinder steht reibungsfrei auf einer fixierten, starren Bodenplatte. Die Oberkante des Zylinders ist in der Ausgangslage $0{,}25\,\text{mm}$ (h_2) von einer starren, zunächst unverschieblichen Lastplatte entfernt, siehe Abbildung (b).



Glaseigenschaften:

Schubmodul: $28{,}5\,\text{GPa}$

Querdehnungszahl: $0{,}23$

linearer Wärmeausdehnungskoeffizient: $5{\cdot}10^{-6}\,\text{K}^{-1}$

einaxiale Druckfestigkeit: $900\,\text{N/mm}^2$

einaxiale Zugfestigkeit: $30\,\text{N/mm}^2$

Gesucht:

1. In der unverformten, spannungsfreien Ausgangslage weist der Zylinder eine Temperatur $T_0 = 25°\text{C}$ auf. Auf welche Temperatur T_a muss der Zylinder erwärmt werden, damit er die Lastplatte gerade berührt? Wieviel Prozent der maßgeblichen Festigkeit sind erreicht, wenn der Glaszylinder auf $T_b = 250°\text{C}$ erwärmt wird?

   Hinweise: $t \ll D$, lineare Elastizitätstheorie, reibungsfreier Kontakt zw. Glas-Lastplatte.

2. Die Temperatur des Glasyzlinders wird auf $T = T_a$ gesteigert und anschließend konstant gehalten. Über die nun verschiebliche Lastplatte wird zusätzlich eine Einzelkraft P, $\mathbf{P} = -|P|\mathbf{e}_2$, in den Zylinder eingeleitet. Wie groß muss P sein, damit gerade Materialversagen eintritt.

3. Für einen anderen Versuchskörper mit unbekannter Geometrie und Belastung ist der Elastizitätsmodul $E = 65\,\text{GPa}$ und der Schubmodul $G = 20\,\text{GPa}$ gegeben. Begründen Sie rechnerisch, warum diese Parameter linear-elastisches, isotropes Materialverhalten <u>nicht</u> zulässig beschreiben.

Lösung:

Lin. Verzerrungstensor: $\varepsilon_{22} = \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{0{,}25}{500} = 5 \cdot 10^{-4}$

Hooke: $\Delta T = \frac{\varepsilon_{22}}{\alpha_T} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-6}} = 100\,\mathrm{K} = 100°\mathrm{C} \rightarrow T_a = T_0 + \Delta T = 125°\mathrm{C}$.

Ebener Sp.zustand: $\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} + \alpha_T \Delta T$; reibungsfr. Kontakt, unbehinderte Verformung in x_1-Richtung: $0 = \frac{1}{70110}\sigma_{22} + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 125$ (oder $5 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{70110}\sigma_{22} + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 225$)

$\rightarrow \ \sigma_{22} = -43{,}82\,\mathrm{N/mm^2}$; $\frac{-43{,}82}{-900} = 4{,}87\%$

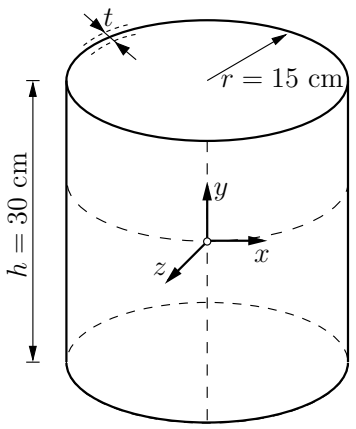
$\sigma_{22}^{\mathrm{Bruch}} = P^{\mathrm{Bruch}}/A \rightarrow P^{\mathrm{Bruch}} = \sigma_{22}^{\mathrm{Bruch}} \cdot A = -900 \cdot 250 \cdot \pi \cdot 5 = -3{,}53\,\mathrm{MN}$ (Druckkraft)

$E = 65\,\mathrm{GPa}$, $G = 20\,\mathrm{GPa} \rightarrow$ Stabilitätskriterien nicht erfüllt ($\lambda < 0$, $K < 0$, $\nu > 0{,}5$)

Ersatzkolloquium WS2007/2008
3. Beispiel: Glaszylinder unter Temperaturbeanspruchung:

Angabe:

Gegeben ist ein offener dünnwandiger Glaszylinder (Elastizitätsmodul $E = 70$ GPa, Querdehnungszahl $\nu = 0{,}23$, linearer Wärmeausdehnungskoeffizient $\alpha_T = 5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$), der einer gleichmäßigen (isothermen) Temperaturänderung unterworfen wird. Die Abmessungen der Mittelfläche des Zylinders sind der Abbildung zu entnehmen. Die Glasdicke beträgt $t = 5$ mm. In der Berechnung ist $t \ll r$ zu berücksichtigen.
Die einaxialen Druck- und Zugfestigkeiten des Glases betragen: $f_{cu} = 900\ \mathrm{N/mm^2}$ und $f_{tu} = 30\ \mathrm{N/mm^2}$.



Gesucht: (Anmerkung: Vor der Abkühlung ist die Struktur spannungsfrei)

1. Wie groß ist (a) die Umfangsänderung des Zylinders und (b) die Volumenänderung des Materials bei einer Abkühlung von 50 K. Hinweis: Die Verformungen sind unbehindert.

2. Der Glaszylinder wird durch einen fix verbundenen Glasboden an einem Ende verschlossen. Die gesamte Struktur wird einer Abkühlung von 50 K unterworfen. Wie groß ist die Umfangsverzerrung?

3. Bei welcher Temperaturdifferenz bricht der Glaszylinder bei einer Abkühlung, wenn seine Umfangsverformung bei Erreichen einer Umfangsänderung von 0,1 mm verhindert wird? Die Verformung in Axialrichtung (Höhe) des Zylinders wird dabei nicht behindert. Geben Sie den Spannungs- und den Verzerrungstensor in Matrixschreibweise für diesen Zustand an.

Lösung:

1. $\Delta U = \varepsilon_{xx} U = -0.236\,\mathrm{mm}$, $\Delta V = V_0 - V = 1.06\,\mathrm{cm}^3$

2. Boden besteht auch aus Glas, daher keine Behinderung der Verf. $\Rightarrow \varepsilon_{xx} = -0.025\,\%$

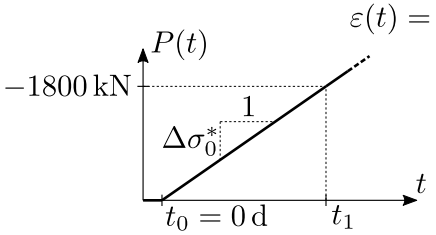
3. Mit $\varepsilon_{xx}^{max} = -0.0106\,\%$, $\sigma_{xx} = f_{tu} = 30\,\mathrm{N/mm^2}$, $\sigma_{yy} = 0$, $\gamma_{xy} = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = 0$ liefert das HOOKE'sche Gesetz für ESZ: $\Delta T = -107\,\mathrm{K}$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -0.0633\,\%$
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{N/mm^2}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -1.06 & 0 & 0 \\ 0 & -6.33 & 0 \\ 0 & 0 & -6.33 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Viskoelastizität

Kolloquium SS2021
4. Beispiel: Viskoelastizität – STB-Stütze

Angabe:

Gegeben ist eine Stahlbetonstütze (Länge $l_0 = 320\,\text{cm}$, Querschnittsfläche $A = 800\,\text{cm}^2$) als Tragelement der Unterkonstruktion eines Sprinklertanks. Die Stütze wird durch eine Einzelkraft P belastet. Der zeitliche Verlauf der Kraft $P(t)$ kann dem nachfolgenden Diagramm entnommen werden. Die Stahlbetonstütze soll auf der Grundlage des Maxwell Modells mit den Materialkennwerten: $E_{MW} = 3200\,\text{kN/cm}^2$, $\eta_{MW} = 8 \cdot 10^6\,\text{kN d/cm}^2$ untersucht werden.



$$\varepsilon(t) = J^*(t - t_0)\Delta\sigma_0^* \quad \text{mit:} \quad \Delta\sigma_0^* = \frac{\Delta\sigma_1}{(t_1 - t_0)}$$

$$J^*(t - t_0) = \frac{(t - t_0)}{E_{MW}} + \frac{(t - t_0)^2}{2\eta_{MW}}$$

Gesucht ist die Längenänderung der Stahlbetonstütze $\Delta l(t_1)$ in [cm] für den Zeitpunkt $t_1 = 20\,\text{d}$.

Lösung:

Die Verzerrung $\varepsilon(t_1 = 20\,\text{d})$ ergibt sich mit der Kriechfunktion $J^*(t_1 - t_0)$ (mit dem Belastungszeitpunkt t_0 und dem Betrachtungszeitpunkt t_1) und der Steigung $\Delta\sigma_0^*$ zu:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t_1 = 20\,\text{d}) &= +\left[\frac{t_1 - t_0}{E_{MW}} + \frac{(t_1 - t_0)^2}{2\eta_{MW}}\right]\frac{\Delta\sigma_1}{t_1 - t_0} \\
&= +\left[\frac{20 - 0}{3200} + \frac{(20 - 0)^2}{2 \cdot 8 \cdot 10^6}\right]\frac{-2{,}25}{20 - 0}
\end{aligned}$$

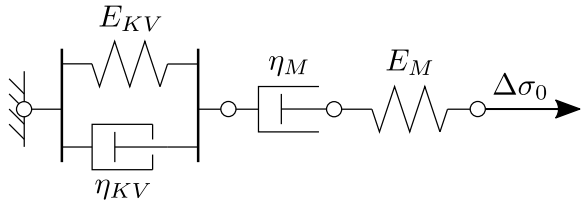
Mit Hilfe der ermittelten Verzerrung folgt die gesuchte Längenänderung mit:

$$\Delta l = \varepsilon(t_1 = 20\,\text{d})l_0 = -0{,}000\,706 \cdot 320 = -0{,}2259\,\text{cm}$$

Kolloquium SS2021
5. Beispiel: Viskoelastizität – Eichen eines 4-Parametermodells

Angabe:

Gegeben ist eine Betonprobe die ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ konstant mit einer einaxialen Druckbeanspruchung $\Delta\sigma_0 = -10\,\mathrm{kN/cm^2}$ beansprucht wird. Das Kriechverhalten des Betons lässt sich durch das nachfolgend dargestellte Feder-Dämpfer Modell beschreiben.



Kriechfunktion $J(t-t_i)$ für einen Spannungssprung um $\Delta\sigma_i$ zum Zeitpunkt t_i :

$$J(t-t_i) = \frac{1}{E_M} + \frac{t-t_i}{\eta_M} + \frac{1}{E_{KV}}\left\{1 - e^{-\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}}(t-t_i)}\right\}$$

Bekannt sind die Axialverzerrungen des Probekörpers zum Zeitpunkt unmittelbar vor der Lastaufbringung mit $\varepsilon(t = t_0^-) = 0$, unmittelbar nach der Lastaufbringung mit $\varepsilon(t = t_0^+) = -3{,}125 \cdot 10^{-3}$ und 365 Tage nach der Lastaufbringung mit $\varepsilon(t = 365\,\mathrm{d}) = -4{,}541 \cdot 10^{-3}$, sowie die Parameter $E_{KV} = 8000\,\mathrm{kN/cm^2}$ und $\eta_{KV} = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{kN\ d/cm^2}$.

Gesucht ist der Parameter η_M in [kN d/cm^2] anhand der bekannten Axialverzerrungen.

Lösung:

Mit Hilfe der angegebenen Kriechfunktion $J(t-t_i)$ für das zugrundeliegende 4-Parametermodell und der Axialverzerrung unmittelbar nach der Lastaufbringung kann der Parameter E_M ermittelt werden.

$$\begin{aligned} \varepsilon(t = t_o^+) &= \left\{\frac{1}{E_M} + 0 + 0\right\}\Delta\sigma_0 = -3{,}125 \cdot 10^{-3} \\ &\rightarrow \quad E_M = 3200\,\mathrm{kN/cm^2} \end{aligned}$$

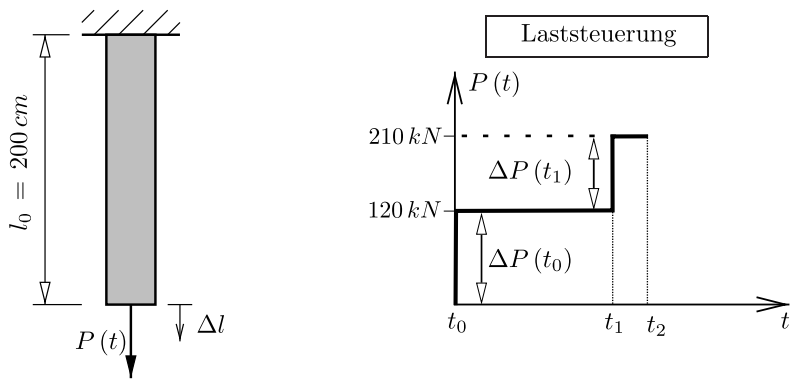
Somit kann für den Zeitpunkt $t = 365\,\mathrm{d}$ eine Bestimmungsgleichung für den gesuchten Parameter η_M aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t = 365\,\mathrm{d}) &= \left\{\frac{1}{E_M} + \frac{t-t_0}{\eta_M} + \frac{1}{E_{KV}}\left[1 - e^{-\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}}(t-t_0)}\right]\right\}\Delta\sigma_0 = -4{,}541 \cdot 10^{-3} \\ &\rightarrow \quad \eta_M = 8 \cdot 10^6\,\mathrm{kN\ d/cm^2} \end{aligned}$$

Ersatz-Kolloquium SS2021
1. Beispiel: Viskoelastizität – Eichen eines MAXWELL-Modells

Angabe:

Gegeben ist ein Zugstab mit viskoelastischem Materialverhalten, welches durch ein MAXWELL-Modell beschrieben wird. Die Querschnittsfläche des Stabes beträgt $A = 5\,\mathrm{cm}^2$. Zur Bestimmung der viskoelastischen Parameter E_M und η_M wird der zeitliche Verlauf der Zugkraft $P(t)$, wie in der Grafik gezeigt, aufgezeichnet. Zum Zeitpunkt $t_1 = 140\,\mathrm{d}$ ist ein sprunghafter Anstieg der Zugkraft zu erkennen. Die Längenänderung Δl sollte ebenfalls gemessen werden, jedoch ist der Wegaufnehmer unmittelbar nach dem Zeitpunkt $t_0 = 0\,\mathrm{d}$ ausgefallen. Es ist davon auszugehen, dass $\Delta l_0\left(t_0^+\right) = 0{,}8\,\mathrm{cm}$ noch korrekt gemessen wurde. Nach $t_2 = 160$ d wird der Fehler bemerkt und die Längenänderung sofort manuell gemessen. Diese beträgt $\Delta l\left(t_2\right) = 2{,}275\,\mathrm{cm}$.



Gesucht ist der viskoelastische Parameter η_M in $[\mathrm{kN\,d/cm^2}]$ anhand der gegebenen Messdaten.

Lösung:

Bestimmen von E_M über die Kriechfunktion des MAXWELL-Modells zum Zeitpunkt $t_0^+ = 0\,\mathrm{d}$, mit $\varepsilon\left(t = t_0^+\right) = \frac{0{,}8\,\mathrm{cm}}{200\,\mathrm{cm}} = 0{,}0040$ und $\Delta\sigma_0 = \frac{\Delta P\left(t_0^+\right)}{A} = \frac{120\,\mathrm{kN}}{5\,\mathrm{cm}^2} = 24\,\mathrm{kN/cm^2}$:

$$\varepsilon\left(t = t_0^+\right) = \left[\frac{1}{E_M} + \frac{1}{\eta_M}(0)\right]\Delta\sigma_0 \quad \Rightarrow \quad E_M = \frac{\Delta\sigma_0}{\varepsilon\left(t_0^+\right)} = \frac{24\,\mathrm{kN/cm^2}}{0{,}0040} = 6000\,\mathrm{kN/cm^2}$$

Berechnen der Verzerrungen zum Zeitpunkt $t_2 = 160\,\mathrm{d}$ und der Spannungsänderung zum Zeitpunkt $t_1 = 140\,\mathrm{d}$ zu: $\varepsilon\left(t = t_2\right) = \frac{2{,}275\,\mathrm{cm}}{200\,\mathrm{cm}} = 1{,}1375 \cdot 10^{-2}$ und $\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta P(t_1)}{A} = \frac{90\,\mathrm{kN}}{5\,\mathrm{cm}^2} = 18\,\mathrm{kN/cm^2}$.
Bestimmen von η_M über die Kriechfunktion des MAXWELL-Modells zum Zeitpunkt $t_2 = 160\,\mathrm{d}$:

$$\varepsilon\left(t = t_2\right) = \left[\frac{1}{E_M} + \frac{1}{\eta_M}\left(t_2 - t_0\right)\right]\Delta\sigma_0 + \left[\frac{1}{E_M} + \frac{1}{\eta_M}\left(t_2 - t_1\right)\right]\Delta\sigma_1$$

$$\Rightarrow \quad \eta_M = \left[\frac{\varepsilon(t_2) - \frac{1}{E_M}\left(\Delta\sigma_0 + \Delta\sigma_1\right)}{\Delta\sigma_0\, t_2 + \Delta\sigma_1\,\left(t_2 - t_1\right)}\right] =$$

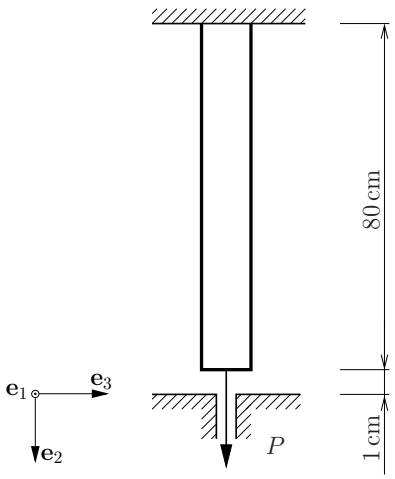
$$= \left[\frac{1{,}1375 \cdot 10^{-2} - \frac{1}{6000\,\mathrm{kN/cm^2}} \cdot \left(24\,\mathrm{kN/cm^2} + 18\,\mathrm{kN/cm^2}\right)}{24\,\mathrm{kN/cm^2} \cdot 160\,\mathrm{d} + 18\,\mathrm{kN/cm^2} \cdot \left(160\,\mathrm{d} - 140\,\mathrm{d}\right)}\right]^{-1} = 960000\,\mathrm{kN\,d/cm^2}$$

Kolloquium SS2020
12. Beispiel: Viskoelastizität – Eichen

Angabe:

Gegeben ist ein Stab mit der in der nachstehenden Abbildung definierten Länge und einer Querschnittsfläche von $16\,\mathrm{cm}^2$. Der Stab wird mit einer konstanten Zugkraft $P = 1000\,\mathrm{kN}$ in $\mathbf{e}_2-$Richtung belastet. Bekannt sind die Axialverzerrungen des Stabes zum Zeitpunkt $t = 0^+$ unmittelbar nach der Lastaufbringung mit $\varepsilon\,(t = 0^+) = 0{,}0025$, sowie zum Zeitpunkt $t = 100d$ mit $\varepsilon\,(t = 100d) = 0{,}0045$.

Gesucht sind die beiden Parameter E_M und η_M eines visko-elastischen Maxwell Modells anhand der bekannten Verzerrungen.



Hinweis: Zum Zeitpunkt $t = 100d$ wird die Unterlage vom Stab nicht berührt.

Lösung:

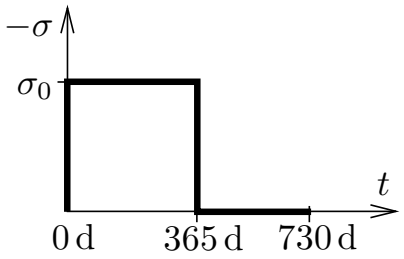
$$
\begin{aligned}
t = 0^+: \quad & \varepsilon(t) &&= \tfrac{1}{E_M}\Delta\sigma_0 = \tfrac{P}{E_M\,A} && \Rightarrow E_M = \tfrac{P}{\varepsilon\,A}(t) && = 25000\,\mathrm{kN/cm^2} \\
t = 100: \quad & \Delta\varepsilon(t) &&= J\,(\Delta t)\,\Delta\sigma\,(\Delta t) && = \tfrac{\Delta t}{\eta_M}\Delta\sigma\,(\Delta t) \\
\Rightarrow \quad & \eta_M = \frac{\Delta\sigma\,(\Delta t)}{\Delta\varepsilon\,(\Delta t)}\Delta t = \frac{1000\ \mathrm{kN}\cdot(100-0)}{(0{,}0045-0{,}0025)\cdot 16\,\mathrm{cm}^2} = 3{,}125\cdot 10^6\,\mathrm{kN\,d/cm^2}
\end{aligned}
$$

Kolloquium SS2020
13. Beispiel: Viskoelastizität – Qualitative MW/KV-Verläufe

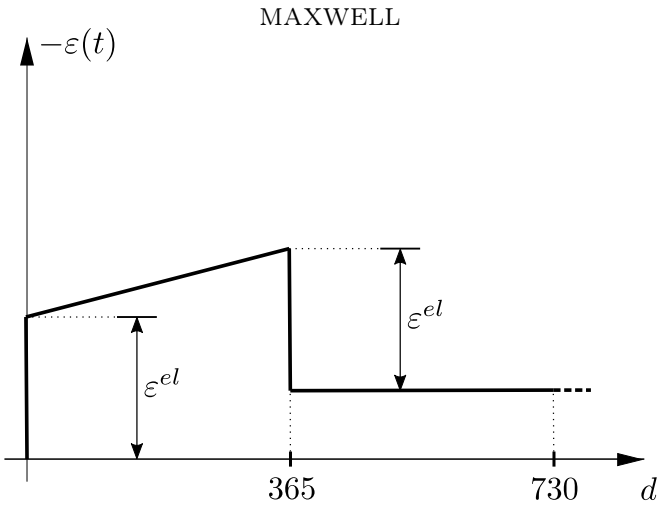
Angabe:

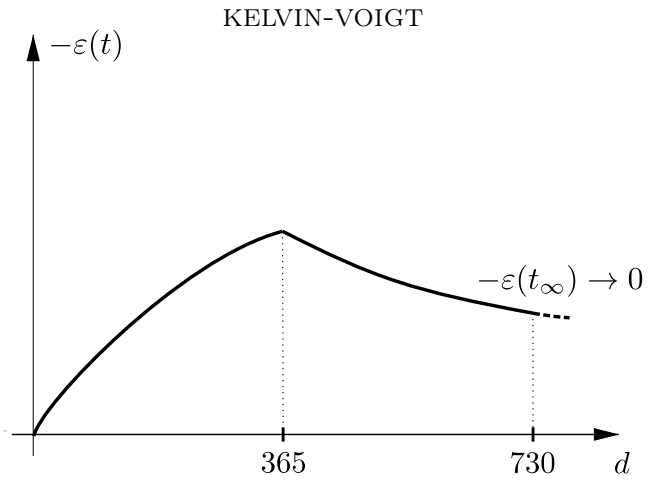
Gegeben ist eine Betonprobe, die ein Jahr lang einer einaxialen Druckbelastung σ_0 ausgesetzt ist. Die Belastung wird anschließend vollständig entfernt, siehe $\sigma - t-$Diagramm.

Gesucht ist der qualitative grafische Verlauf der Axialverzerrung für $0 \leq t \leq 730\,\mathrm{d}$ bei Zugrundelegung der Modelle nach *Maxwell* und *Kelvin-Voigt*. Beschriften und begründen Sie alle vorkommenden Sprünge, lineare und nichtlineare Verläufe in der Ergebnisgrafik.



Lösung:



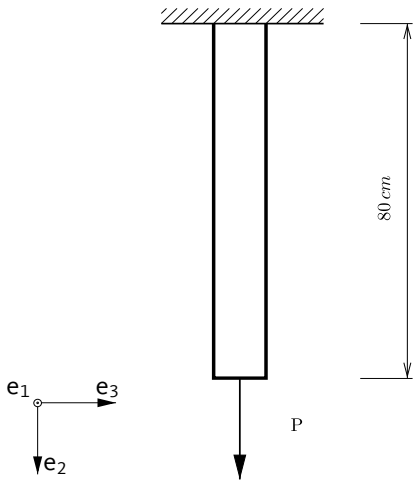


Kolloquium SS2020
14. Beispiel: Viskoelastizität – MW-Relaxation

Angabe:

Gegeben ist ein Stab mit der in der nachstehenden Abbildung definierten Länge und einer Querschnittsfläche von $12\,\mathrm{cm}^2$. Der Stab ist durch die zwei Parameter des viskoelastischen Modells nach *MAXWELL* charakterisiert: $E_M = 19000\,\mathrm{kN/cm^2}$ und $\eta_M = 5{,}9 \cdot 10^6\,\mathrm{kN\,d/cm^2}$. Außerdem wird er mit einer konstanten Zugkraft $P = 1000\,\mathrm{kN}$ in $\mathbf{e}_2-$Richtung belastet.

Gesucht: Unmittelbar nach Lastaufbringung der Zugkraft P wird die hervorgerufene Stablängenänderung $\Delta l\,(t = 0^+)$ konstant gehalten. Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_1 zu dem die Zugkraft im Stab um 20% abgesunken ist.



Lösung:

Ermitteln der hervorgerufenen, konstanten Verzerrung zum Zeitpunkt $t = 0^+$:

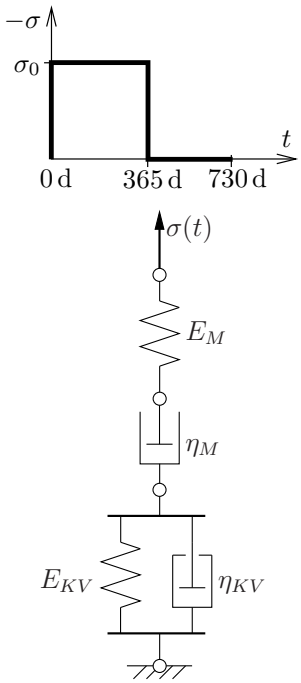
$$\sigma\,(t = 0^+) = \frac{P}{A} \quad = E\,\exp\left(-\frac{E_M}{\eta_M}\,(t - t_0)\right)\varepsilon\,(t = 0^+) \Rightarrow \quad \varepsilon\,(t = 0^+) \quad = \frac{P}{E_M\,A} \quad = 4{,}386 \cdot 10^{-3}$$

Ermitteln des Zeitpunkts t_1:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma(t_1)}{\sigma(t=0^+)} = 0{,}8 && = \left[E_M\,\exp\left(-\frac{E_M}{\eta_M}\,(t_1 - t_0)\right)\,\varepsilon\,(t = 0^+)\right]/\sigma\,(t = 0^+) \\
\Rightarrow \quad & \ln\left(\frac{0{,}8\sigma\left(t=0^+\right)}{E_M\varepsilon(t=0^+)}\right) && = -\frac{E_M}{\eta_M}\,(t_1 - t_0) \\
\Rightarrow \quad & -\left(\ln\left(\frac{0{,}8\sigma\left(t=0^+\right)}{E_M\varepsilon(t=0^+)}\right)\eta_M\right)/E_M && = t_1 = 69{,}294\,\mathrm{d}
\end{aligned}$$

Ersatz-Kolloquium SS2020
6. Beispiel: Viskoelastizität – 4-Parametermodell

Angabe:



Gegeben ist eine Betonprobe, die ein Jahr lang einer einaxialen Druckbeanspruchung $\sigma_0 = -10\,\mathrm{kN/cm^2}$ ausgesetzt ist. Die Belastung wird anschließend vollständig entfernt, siehe $\sigma - t-$Diagramm. Das Kriechverhalten des Betons lässt sich durch das rechts dargestellte Feder-Dämpfer Modell beschreiben, die Kriechfunktion $J(t-t_i)$ für einen Spannungssprung um $\Delta\sigma_i$ zum Zeitpunkt t_i beträgt $J(t-t_i) = \frac{1}{E_M} + \frac{t-ti}{\eta_M} + \frac{1}{E_{KV}}\left(1-\exp\left[-\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}}(t-t_i)\right]\right)$. Bekannt sind die Parameter $E_M = 3000\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\eta_M = 7\cdot 10^6\,\mathrm{kN\,d/cm^2}$, $E_{KV} = 8500\,\mathrm{kN/cm^2}$, sowie $\eta_{KV} = 2{,}5\cdot 10^6\,\mathrm{kN\,d/cm^2}$.

Gesucht sind die Axialverzerrungen $\varepsilon(t=0^+)$ und $\varepsilon(t=730\,\mathrm{d})$.

Lösung:

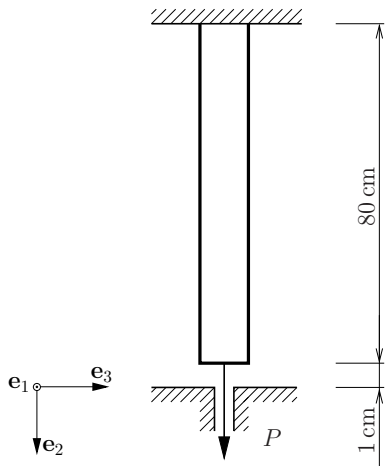
$$\varepsilon(t=t) = \sum J(t-t_i)\,\Delta\sigma_0 \qquad \Rightarrow$$

$$\varepsilon(t=0^+) = \Delta\sigma_0\left(\frac{1}{E_M} + \frac{0}{\eta_M} + \frac{1}{E_{KV}}\left(1-\exp\left[-\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}}(0)\right]\right)\right) = \Delta\sigma_0\left(\frac{1}{E_M}\right) = -3{,}33\cdot 10^{-3}$$

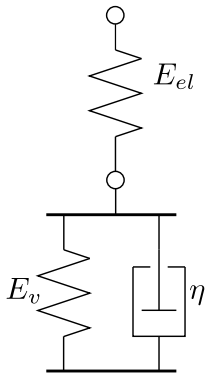
$$\begin{aligned}\varepsilon(t=730\,\mathrm{d}) &= \Delta\sigma_0\left(\frac{1}{E_M} + \frac{730d}{\eta_M} + \frac{1}{E_{KV}}\left(1-\exp\left[-\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}}(730\,\mathrm{d})\right]\right)\right)\\ &+\Delta\sigma_1(t_1=365\,\mathrm{d})\left(\frac{1}{E_M} + \frac{365d}{\eta_M} + \frac{1}{E_{KV}}\left(1-\exp\left[-\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}}(365\,\mathrm{d})\right]\right)\right) = -7{,}632\cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

Ersatz-Kolloquium SS2020
10. Beispiel: Viskoelastizität – Berührung nach ZENER

Angabe:



Gegeben ist ein Stab mit der in der nebenstehenden Abbildung definierten Länge und einer Querschnittsfläche von $12\,\mathrm{cm}^2$. Der Stab ist durch die drei Parameter des visko-elastischen Modells nach ZENER charakterisiert: $E_v = 20000\,\mathrm{kN/cm^2}$, $E_{el} = 19000\,\mathrm{kN/cm^2}$ und $\eta = 5{,}9 \cdot 10^6\,\mathrm{kN\,d/cm^2}$. Zum Zeitpunkt t_0 wird er mit einer konstanten Zugkraft $P = 1700\,\mathrm{kN}$ in $\mathbf{e}_2-$Richtung belastet.



Gesucht: Bestimmen Sie zu welchem Zeitpunkt t der Stab die Unterlage berührt.

Lösung:

$$\varepsilon(t) = \sum J(t-t_i)\,\Delta\sigma_0 \qquad J(t-t_i) = \frac{1}{E_{el}} + \frac{1}{E_\nu}\left(1 - \exp\left[-\frac{E_\nu}{\eta}(t-t_i)\right]\right)$$

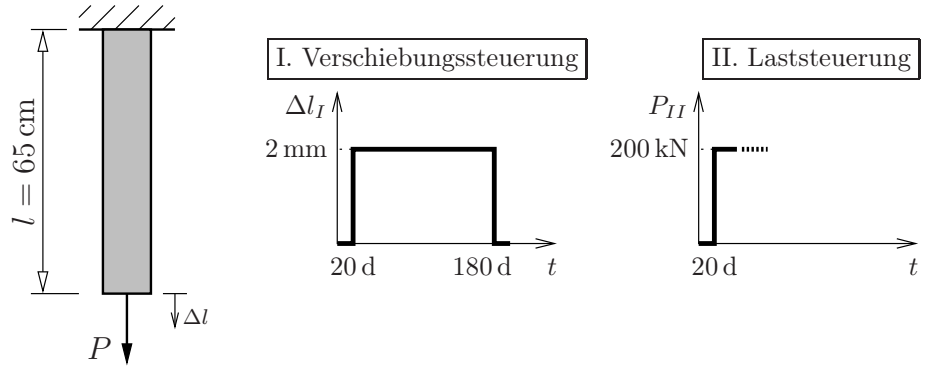
$$\varepsilon(t_{gesucht}) = \frac{\Delta l}{l_0} = 0{,}0125 \qquad = \left(\frac{1}{E_{el}} + \frac{1}{E_\nu}\left(1 - \exp\left[-\frac{E_\nu}{\eta}(t-t_i)\right]\right)\right)\frac{P}{A}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left[\left(\frac{A\,\varepsilon(t_{gesucht})}{P} - \frac{1}{E_{el}}\right)E_\nu + 1\right] = t_{gesucht} = 367{,}29\,\mathrm{d}$$

Kolloquium SS2019
1. Beispiel: Viskoelastizität

Angabe:

Gegeben sind zwei viskoelastische Stäbe, die jeweils eine Querschnittsfläche von $A = 20\,\mathrm{cm}^2$ und eine Länge von $l = 65\,\mathrm{cm}$ aufweisen. Einer der Stäbe wird einem verschiebungsgesteuerten einaxialen Zugversuch unterworfen, der andere Stab einem lastgesteuerten einaxialen Zugversuch. Die viskoelastischen Materialkonstanten des Stabes betragen $E_\mathrm{M} = E_\mathrm{KV} = 3500\,\mathrm{kN/cm}^2$ und $\eta_\mathrm{M} = \eta_\mathrm{KV} = 4{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{kN\,d/cm}^2$.



Gesucht:

a. **Verschiebungssteuerung**: Ermitteln Sie die für den gegebenen Verschiebungsverlauf den resultierenden Verlauf der Stabkraft $P_I(t)$ zwischen $0 \leq t \leq 200\,\mathrm{d}$ bei Zugrundelegung des Maxwell-Modells und stellen Sie diesen grafisch dar.

b. **Laststeuerung**: Nach Lastaufbringung wird die Zugkraft $P_{II} = 200\,\mathrm{kN}$ zunächst konstant gehalten. Es ist weiters zu berücksichtigen, dass der maximale Weg der Prüfmaschine 3 mm beträgt. Ermitteln Sie die entsprechenden Verläufe der Stabkraft $P_{II}(t)$ und der Stablängenänderung $\Delta l_{II}(t)$ zwischen $0 \leq t \leq 200\,\mathrm{d}$ bei Zugrundelegung des Maxwell-Modells und bei Zugrundelegung des Kelvin-Voigt-Modells. Stellen Sie die Verläufe grafisch dar.

Lösung:

a.

Verschiebungssteuerung – Maxwell ($t_0 = 20\,\mathrm{d}$, $t_1 = 180\,\mathrm{d}$, $t_2 = 200\,\mathrm{d}$):

$P_I(t_0^+) = E_M \cdot \frac{\Delta l_I(t_0)}{l_0} \cdot A = 215{,}38\,\mathrm{kN}$,

$P_I(t_1^-) = E_M \cdot \exp\left[-\frac{E_M}{\eta_M}(t_1 - t_0)\right] \cdot \frac{\Delta l_I(t_0)}{l_0} \cdot A = 62{,}05\,\mathrm{kN}$

$P_I(t_1^+) = \left[E_M \cdot \exp\left[-\frac{E_M}{\eta_M}(t_1 - t_0)\right] \cdot \frac{\Delta l_I(t_0)}{l_0} + E_M \cdot \frac{\Delta l_I(t_1)}{l_0}\right] \cdot A = -153{,}33\,\mathrm{kN}$

$P_I(t_2) = \left[E_M \cdot \exp\left[-\frac{E_M}{\eta_M}(t_2 - t_0)\right] \cdot \frac{\Delta l_I(t_0)}{l_0} + E_M \cdot \exp\left[-\frac{E_M}{\eta_M}(t_2 - t_1)\right] \cdot \frac{\Delta l_I(t_1)}{l_0}\right] \cdot A = -131{,}24\,\mathrm{kN}$

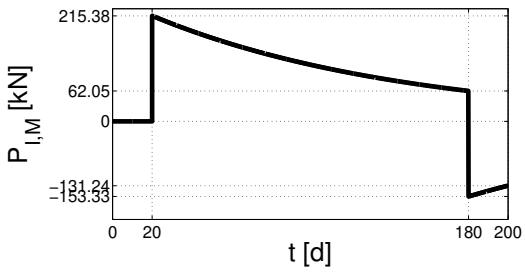


Abbildung 1.1: Die Funktion ist sowohl im Intervall $20\,\mathrm{d} < t < 180\,\mathrm{d}$, als auch im Intervall $180\,\mathrm{d} < t < 200\,\mathrm{d}$ eine Exponentialfunktion (also z.B. nicht linear)

b.

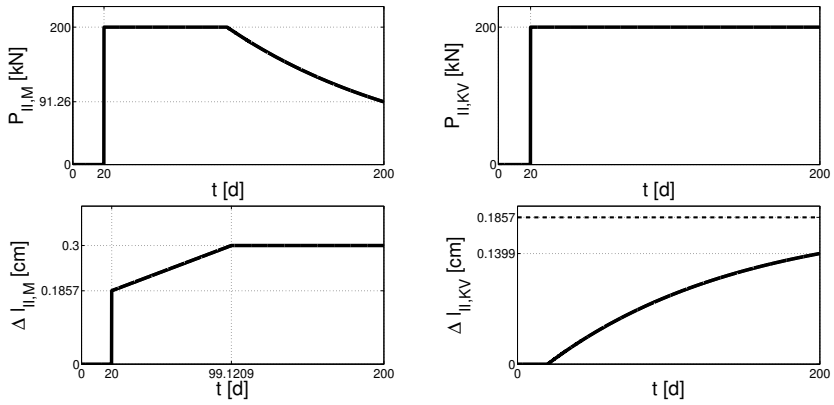
Belastungssteuerung – Maxwell ($t_0 = 20\,\mathrm{d}$, t_1 ... Zeitpunkt der maximalen Stauchung, $t_2 = 200\,\mathrm{d}$):

$\Delta l_{II}(t_0^+) = \frac{\Delta P_{II}(t_0) \cdot l_0}{E \cdot A} = 0{,}1857\,\mathrm{cm}$, $\Delta l_{II}(t_1) = 0{,}3\,\mathrm{cm} = l_0 \cdot \left(\frac{1}{E_M} + \frac{t_1 - t_0}{\eta_M}\right) \cdot \frac{\Delta P_{II}(t_0)}{A} \Rightarrow t_1 = 99{,}12\,\mathrm{d}$

$P_{II}(t_2) = P_{II}(t_1) \cdot \exp\left[-\frac{E_M}{\eta_M}(t_2 - t_1)\right] = 91{,}26\,\mathrm{kN}$

Belastungssteuerung – Kelvin-Voigt:

$\Delta l_{II}(t_2) = \frac{l_0}{E_{KV}} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}}(t_2 - t_0)\right)\right] \cdot \frac{\Delta P_{II}(t_0)}{A} = 0{,}1399\,\mathrm{cm} < 0{,}3\,\mathrm{cm}$

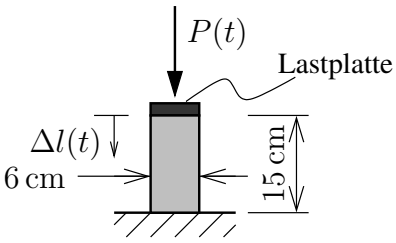


Ersatzkolloquium SS2018
2. Beispiel: Viskoelastisches Stabverhalten

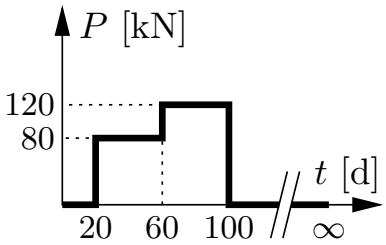
Angabe:

Gegeben ist ein kreiszylindrischer Stab mit Durchmesser d (laut Skizze), der über eine Lastplatte uniaxial durch die Kraft $P(t)$ belastet wird. Alle Kontaktflächen zwischen Stab, Lastplatte und starrer Unterlage sind reibungsfrei.

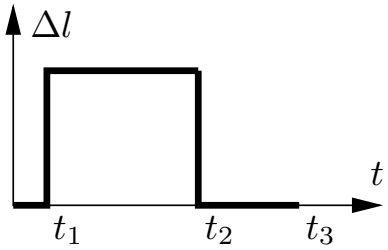
Untersuchtes System:



Belastungsgesteuerter Versuch ①:



Verschiebungsgesteuerter Versuch ②:



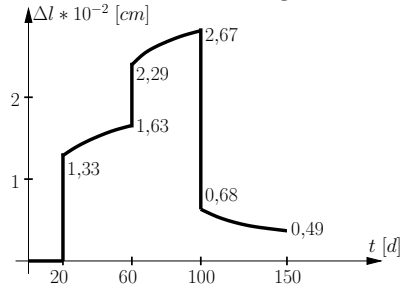
Gesucht:

a. Ermitteln Sie für den **belastungsgesteuerten Versuch** ① (siehe mittlere Abbildung) die Verläufe der Stablängenänderung $\Delta l(t)$ zwischen $0 \leq t \leq 150\,\mathrm{d}$, bei Zugrundelegung des ZENER-Modells und stellen Sie diese grafisch dar. Die hierfür benötigten Materialparameter lauten $E_{\mathrm{el}} = E_{\mathrm{v}} = 3200\,\mathrm{kN/cm^2}$ bzw. $\eta = 5 \cdot 10^5\,\mathrm{kN\,d/cm^2}$. Berechnen Sie außerdem die Stablängenänderung für $t \to \infty$ und erläutern Sie Ihr Ergebnis anhand des zugrundeliegenden rheologischen Modells.

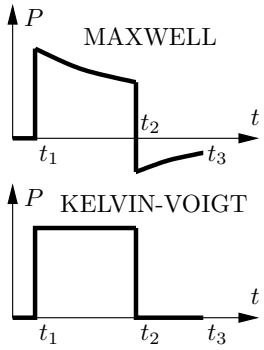
b. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Stabkraft für den **verschiebungsgesteuerten Versuch** ② (siehe rechte Abbildung) rein ***qualitativ*** in den Abschnitten zwischen $0 \leq t \leq t_3$ bei Zugrundelegung sowohl des MAXWELL-Modells als auch bei Zugrundelegung des KELVIN-VOIGT-Modells.

Lösung:

Zeitverlauf der Stablängenänderung



Zeitverlauf der Stabkraft

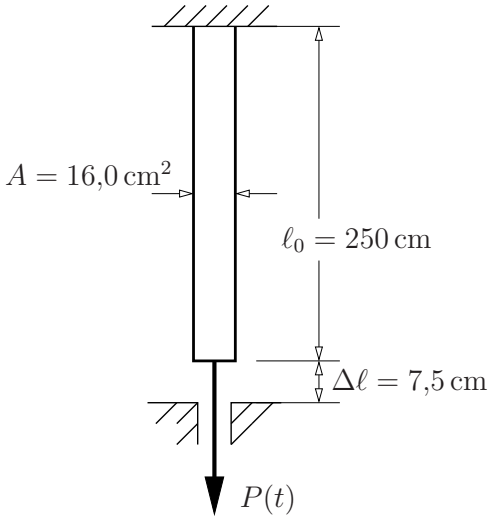


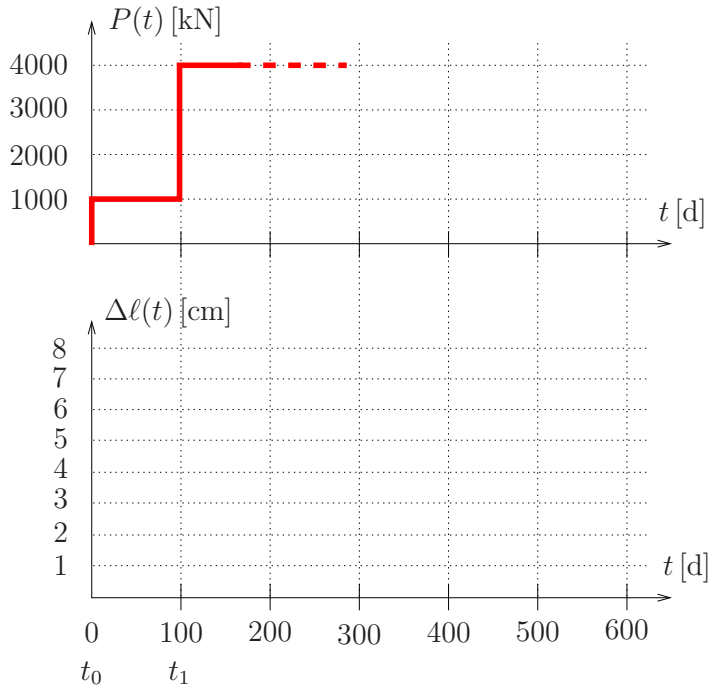
Zum Zeitpunkt $t = \infty$ gilt $\Delta l = 0$. Da die gesamte Belastung wieder heruntergenommen wird, bleiben keine elastischen Verzerrungen übrig. Die Parallelschaltung von Feder und Dämpfer bewirkt, dass die gesamte Energie, die der Dämpfer während den ersten 100 Tagen dissipieren will, von der Feder aufgenommen wird. Nach der Entlastung zwingt die Feder den Dämpfer wieder zurück in die Ausgangslage, in Summe wird also keine Energie dissipiert.

2.Kolloquium WS2015/2016
1. Beispiel: Viskoelastischer Stab

Angabe:

Gegeben: Ein viskoelastischer Stab (Länge $\ell_0 = 250\,\mathrm{cm}$, Querschnittsfläche $A = 16{,}0\,\mathrm{cm}^2$) wird axial durch eine Einzelkraft P belastet. Der zeitliche Verlauf der Kraft $P(t)$ kann dem Diagramm entnommen werden. Der Stab soll auf Grundlage der Materialmodelle nach Maxwell (Punkte 1 und 2) sowie nach Kelvin-Voigt (Punkt 3 und 4) untersucht werden.
Materialkennwerte für das Maxwell-Modell: $E_M = 27500\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\eta_M = 3 \cdot 10^6\,\mathrm{kN\,d/cm^2}$.





Gesucht:

1. Zu welchem Zeitpunkt t_2 setzt der Stab an der Unterlage auf?

2. Ermitteln Sie die zeitlichen Verläufe von Stabkraft und Stablängenänderung im Zeitintervall zwischen 0 und 600 Tagen und tragen Sie diese in die Diagramme am Angabeblatt ein.

3. Eichen Sie die beiden Parameter E_{KV} und η_{KV} eines Kelvin-Voigt Modells anhand der bekannten Verzerrung unmittelbar vor der zweiten Belastungsstufe, $\varepsilon(t_1^-) = 4 \cdot 10^{-3}$. Es gilt das folgende Verhältnis: $(\eta_{KV}/E_{KV}) = (\eta_M/E_M)$.

4. Berechnen Sie die maximale Stablängenänderung nach dem Kelvin-Voigt Modell.

Lösung:

MAXWELL-MODELL

1. Zum Zeitpunkt des Aufsetzens auf die Unterlage beträgt die Stablängenändrung $\Delta\ell = 7{,}5$ cm $\rightarrow$ $\varepsilon(t_2) = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} = 0{,}03$.

$\varepsilon(t_2) = \Delta\sigma_0 \left[\frac{1}{E_M} + \frac{t_2 - t_0}{\eta_M}\right] + \Delta\sigma_1 \left[\frac{1}{E_M} + \frac{t_2 - t_1}{\eta_M}\right] = 0{,}03$

$\rightarrow t_2 = 325{,}91$d

2. Zeitlicher Verlauf von P und $\Delta\ell$

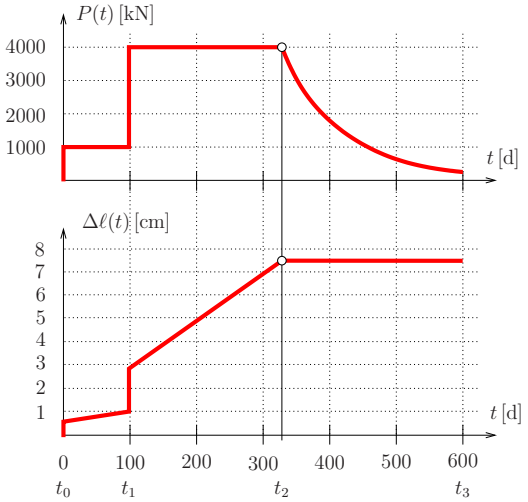
$t = t_0^+ : \Delta\ell(t_0^+) = (\Delta\sigma_0/E_M) \cdot \ell_0 = 0{,}568$ cm

$t = t_1^- : \Delta\ell(t_1^-) = \left(\Delta\sigma_0 \left[\frac{1}{E_M} + \frac{t_1 - t_0}{\eta_M}\right]\right) \cdot \ell_0 = 1{,}089$ cm

$t = t_1^+ : \Delta\ell(t_1^+) = \left(\Delta\sigma_0 \left[\frac{1}{E_M} + \frac{t_1 - t_0}{\eta_M}\right] + \frac{\Delta\sigma_1}{E_M}\right) \cdot \ell_0 = 2{,}794$ cm

$t = t_3 : \Delta\ell(t_3) = 7{,}5$ cm

$P(t_3) = P(t_2) \cdot e^{-\frac{E_M}{\eta_M}(t_3 - t_2)} = 324{,}26$ kN



KELVIN-VOIGT-MODELL

3. $\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}} = \frac{E_M}{\eta_M} = 0{,}0092$

$\varepsilon(t_1^-) = \frac{\Delta\sigma_0}{E_{KV}} \left[1 - e^{-\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}} t_1}\right] = 0{,}04 \rightarrow E_{KV} = 9373$ kN/cm^2, $\eta_{KV} = 1{,}023 \cdot 10^6$kN d/cm^2

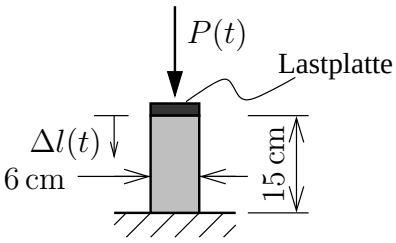
4. $\Delta\ell(t_\infty) = \left(\frac{\Delta\sigma_0}{E_{KV}} \left[1 - e^{-\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}}(t_\infty - t_0)}\right] + \frac{\Delta\sigma_1}{E_{KV}} \left[1 - e^{-\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}}(t_\infty - t_1)}\right]\right) \cdot \ell_0 = 6{,}665$ cm

Ersatzkolloquium WS2014/2015
2. Beispiel: Viskoelastischer Stab

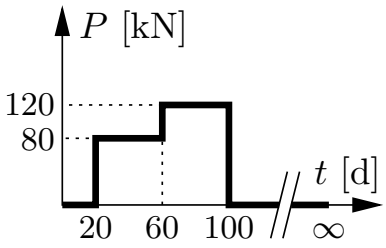
Angabe:

Gegeben ist ein kreiszylindrischer Stab (laut Skizze), der über eine Lastplatte uniaxial durch die Kraft $P(t)$ belastet wird. Alle Kontaktflächen zwischen Stab, Lastplatte und starrer Unterlage sind reibungsfrei.

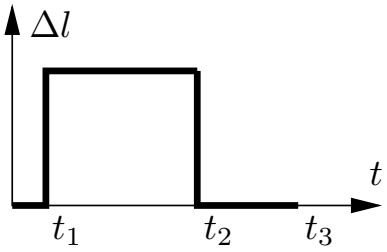
Untersuchtes System:



Belastungsgesteuerter Versuch ①:



Verschiebungsgesteuerter Versuch ②:



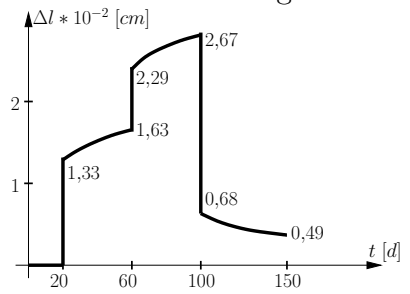
Gesucht:

1. Ermitteln Sie für den **belastungsgesteuerten Versuch** ① (siehe mittlere Abbildung) die Verläufe der Stablängenänderung $\Delta l(t)$ zwischen $0 \leq t \leq 150\,\mathrm{d}$, bei Zugrundelegung des ZENER-Modells und stellen Sie diese grafisch dar. Die hierfür benötigten Materialparameter lauten $E_{\mathrm{el}} = E_{\mathrm{v}} = 3200\,\mathrm{kN/cm^2}$ bzw. $\eta = 5 \cdot 10^5\,\mathrm{kN\,d/cm^2}$. Berechnen Sie außerdem die Stablängenänderung für $t = \infty$ und erläutern Sie Ihr Ergebnis anhand des zugrundeliegenden rheologischen Modells.

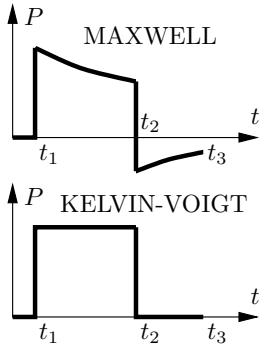
2. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Stabkraft für den **verschiebungsgesteuerten Versuch** ② (siehe rechte Abbildung) rein ***qualitativ*** in den Abschnitten zwischen $0 \leq t \leq t_3$ bei Zugrundelegung sowohl des MAXWELL-Modells als auch bei Zugrundelegung des KELVIN-VOIGT-Modells.

Lösung:

Zeitverlauf der Stablängenänderung



Zeitverlauf der Stabkraft

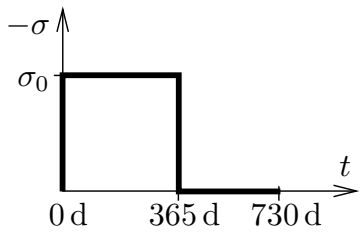


Zum Zeitpunkt $t = \infty$ gilt $\Delta l = 0$. Da die gesamte Belastung wieder heruntergenommen wird, bleiben keine elastischen Verzerrungen übrig. Die Parallelschaltung von Feder und Dämpfer bewirkt, dass die gesamte Energie, die der Dämpfer während den ersten 100 Tagen dissipieren will, von der Feder aufgenommen wird. Nach der Entlastung zwingt die Feder den Dämpfer wieder zurück in die Ausgangslage, in Summe wird also keine Energie dissipiert.

2.Kolloquium WS2014/2015
2. Beispiel: Kriechverhalten von Beton

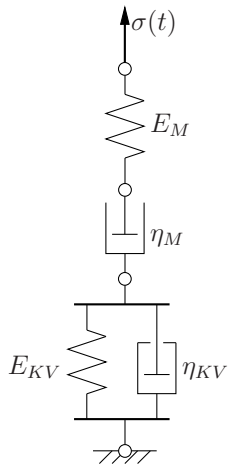
Angabe:

Gegeben ist eine Betonprobe, die ein Jahr lang einer einaxialen Druckbeanspruchung $\sigma_0 = -10$ kN/cm^2 ausgesetzt ist. Die Belastung wird anschließend vollständig entfernt, siehe σ-t-Diagramm.



Das Kriechverhalten des Betons lässt sich durch das rechts dargestellte Feder-Dämpfer Modell beschreiben; die Kriechfunktion $J(t-t_i)$ für einen Spannungssprung um $\Delta\sigma_i$ zum Zeitpunkt t_i beträgt

$$J(t-t_i) = \frac{1}{E_M} + \frac{t-t_i}{\eta_M} + \frac{1}{E_{KV}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}}(t-t_i)}\right)$$

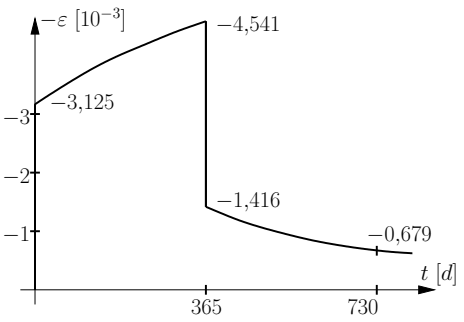


Bekannt sind die Parameter $E_{KV} = 8000$ kN/cm^2, $\eta_{KV} = 2 \times 10^6$ kN d/cm^2 sowie $\eta_M = 8 \times 10^6$ kN d/cm^2. Außerdem wurde die Verzerrung direkt nach Lastaufbringung gemessen: $\varepsilon(t = t_0^+) = -3{,}125$‰.

Gesucht:

1. Ermitteln Sie den fehlenden Modelparameter E_M.
2. Stellen Sie den Verlauf der Axialverzerrung $\varepsilon(t)$ über ein Zeitintervall von zwei Jahren (das heißt im Zeitintervall $0 \leq t \leq 730$ d) qualitativ und quantitativ dar.
3. Welche Axialverzerrung der Betonprobe stellt sich zum Zeitpunkt $t = \infty$ ein?
4. Welches der vier Elemente des Feder-Dämpfer-Modells muss man entfernen, damit sich zum Zeitpunkt $t = \infty$ eine Axialverzerrung $\varepsilon(t = \infty) = 0$ einstellt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:



1) $E_m = \frac{\sigma_0}{\varepsilon(t=t_0^+)} = 3200$ kN/cm^2

2) siehe Skizze links

3) Es bleibt nur die Verzerrung, die der Maxwell-Dämpfer in einem Jahr erreicht: $\varepsilon(t = \infty) = \sigma_0 \frac{365}{\eta_M} = -4{,}5625 \times 10^{-4}$

4) Maxwell-Dämpfer muss entfernt werden, da ausschließlich dieser Dämpfer für die Verzerrung aus Punkt 3 verantwortlich ist.

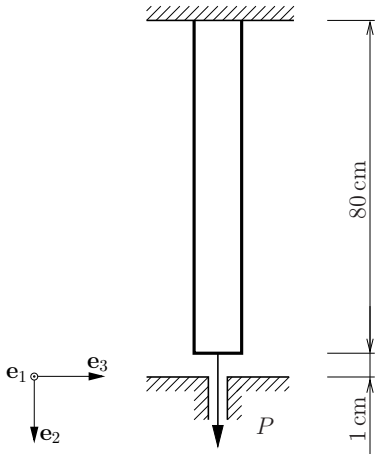
2.Kolloquium WS2013/2014
3. Beispiel: Viskoelastizität/Elastoplastizität

Angabe:

Gegeben sind zwei Stäbe mit der in der nachstehenden Abbildung definierten Länge und einer Querschnittsfläche von $12\,\mathrm{cm}^2$.

Stab I ist durch die drei Parameter des viskoelastischen Modells nach Zener charakterisiert: $E_v = 20500\,\mathrm{kN/cm^2}$, $E_{el} = 19500\,\mathrm{kN/cm^2}$ und $\eta = 5{,}85 \cdot 10^6\,\mathrm{kN\,d/cm^2}$. Außerdem wird er mit einer konstanten Zugkraft $P = 360\,\mathrm{kN}$ in $\mathbf{e}_2$-Richtung belastet.

Stab II weist eine Zugfließgrenze von $f_t^y = 35{,}5\,\mathrm{kN/cm^2}$ auf. Außerdem wird er mit einer konstanten Zugspannung, die gleich der Zugfließgrenze f_t^y ist, in der $\mathbf{e}_2$-Richtung belastet.

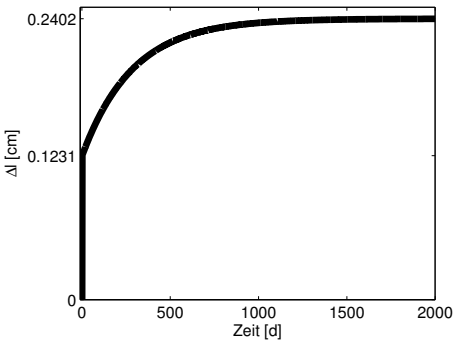


Gesucht:

1. Die Verlängerung von Stab I unmittelbar nach Lastaufbringung ($t = t_0^+ = 0$).
2. Bestimmen Sie ob und ggf. zu welchem Zeitpunkt Stab I die Unterlage berührt. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf der Stablängenänderung für $0 < t < 2000\,\mathrm{d}$ *qualitativ* dar.
3. Bestimmen Sie die Richtung des plastischen Flusses in Stab II, bei Zugrundlegung der Fließfunktion nach Tresca, bzgl. der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$-Basis.
4. Wird das Volumen von Stab II im Zuge plastischer Deformationen, bei Zugrundlegung der Fließfunktion nach Tresca, kleiner oder größer? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1) $\varepsilon(t_0^+) = \left\{ \frac{1}{E_{el}} + \frac{1}{E_v} \left[1 - e^{-\frac{E_v}{\eta}(t_0^+ - t_0)} \right] \right\} \Delta\sigma_0 =$
$= \frac{\Delta\sigma_0}{E_{el}} = 0{,}0015 \Rightarrow u(t_0^+) = \varepsilon(t_0^+) \cdot l_0 = 0{,}1231\,\text{cm}$



2) $\varepsilon(t = \infty) = \left\{ \frac{1}{E_{el}} + \frac{1}{E_v} \left[1 - e^{-\frac{E_v}{\eta}(\infty - t_0)} \right] \right\} \Delta\sigma_0 =$
$= (\frac{1}{E_{el}} + \frac{1}{E_v}) \Delta\sigma_0 = 0{,}0030$

$u(t = \infty) = \varepsilon(t = \infty) \cdot l_0 = 0{,}2402\,\text{cm} < 1\,\text{cm}$
$\Rightarrow$ Die Unterlage wird nie berührt.

3) $\sigma_I = f_t^y, \quad \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{II} = \sigma_{III} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_I & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}$$

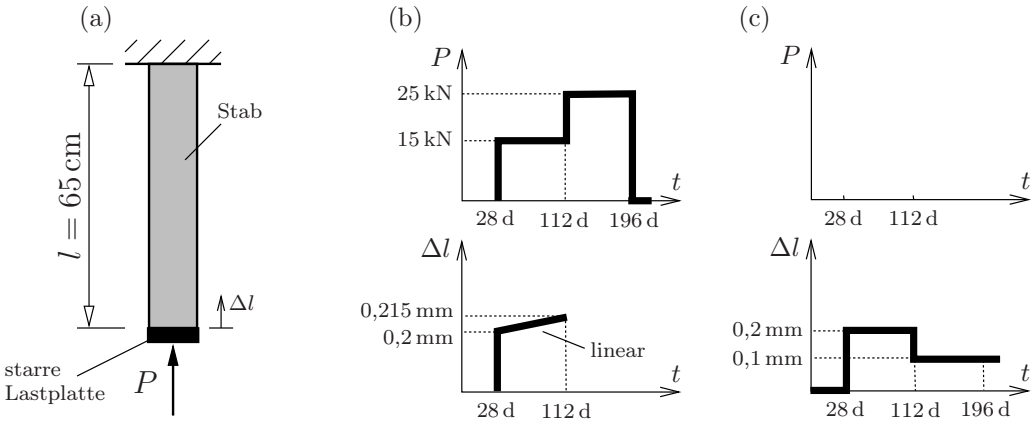
$$\Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\sigma_I - \sigma_{III} - 1)}{\partial \sigma_{III}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\sigma_I - \sigma_{III} - 1)}{\partial \sigma_I} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\sigma_I - \sigma_{III} - 1)}{\partial \sigma_{III}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}$$

4) Da die plastischen Flüsse betragsmäßig gleich groß sind und einer ein positives Vorzeichen und zwei ein negatives Vorzeichen haben, wird das Volumen des Stabes kleiner.

Ersatzkolloquium WS2012/2013
1. Beispiel: Eindimensionale Viskoelastizität

Angabe:

Gegeben sind zwei identische viskoelastische Stäbe, die unter Verwendung einer starren Lastplatte einer Normalkraftbeanspruchung ausgesetzt werden: Querschnittsfläche $= 15\,\mathrm{cm}^2$, Länge $= 65\,\mathrm{cm}$, siehe Abb. a. An Stab 1 wird ein kraftgesteuerter Versuch vorgenommen (Abb. b); Stab 2 wird einem verschiebungsgesteuerten Versuch unterworfen (Abb. c).



Gesucht:

1. Stab 1: Wählen Sie anhand der gegebenen Kraft- und Verschiebungsgeschichte (Abb. b) ein geeignetes rheologisches Modell, das aus einer Feder und einem Dämpfer besteht, und identifizieren Sie die Federkonstante E in $[\mathrm{kN/cm^2}]$ sowie die Viskositätskonstante η in $[\mathrm{kN\,d/cm^2}]$.

2. Stab 1: Vervollständigen Sie rechnerisch und graphisch das Stauchungs-Zeit-Diagramm (Abb. b) im Zeitintervall $[\,112\,\mathrm{d}\,;200\,\mathrm{d}\,]$.

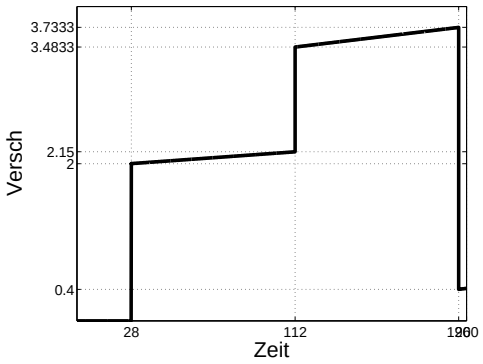
3. Stab 2 (Abb. c): Fertigen Sie rechnerisch und graphisch das Kraft-Zeit-Diagramm im Zeitintervall $[\,0\,\mathrm{d}\,;200\,\mathrm{d}]$ an.

Lösung:

Maxwell-Modell: $E = \frac{P}{A}\frac{l_0}{\Delta l} = \frac{15}{15}\frac{650}{0{,}2} = 3250\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\frac{0{,}215}{650} = \left[\frac{1}{3250} + \frac{112-28}{\eta}\right] \cdot \frac{15}{15} \Rightarrow \eta = 3{,}64 \times 10^6\,\mathrm{kN\,d/cm^2}$

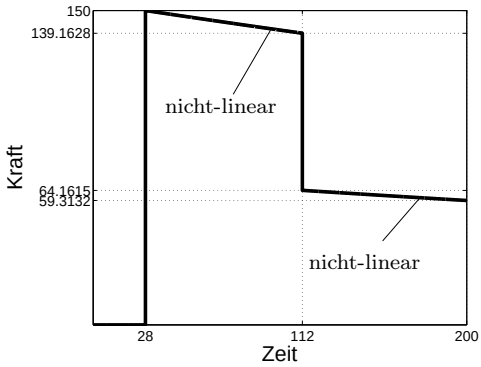
Kraftgesteuerter Versuch:

$$\Delta l = l_0 \sum_i \left\{ \left[\frac{1}{E} + \frac{t-t_i}{\eta}\right] \cdot \frac{\Delta P_i}{A} \right\}$$



Verschiebungsgesteuerter Versuch:

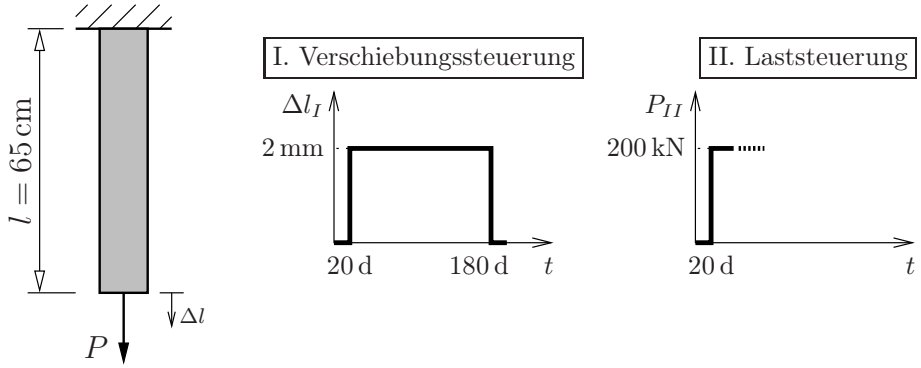
$$P = \frac{EA}{l_0} \sum_i \left\{ \exp\left[-\frac{E}{\eta}(t-t_i)\right] \Delta l_i \right\}$$



2.Kolloquium WS2012/2013
2. Beispiel: Eindimensionale Viskoelastizität

Angabe:

Gegeben sind zwei viskoelastische Stäbe, die jeweils eine Querschnittsfläche von $A = 20\,\mathrm{cm}^2$ und eine Länge von $l = 65\,\mathrm{cm}$ aufweisen. Einer der Stäbe wird einem verschiebungsgesteuerten einaxialen Zugversuch unterworfen, der andere Stab einem lastgesteuerten einaxialen Zugversuch. Die viskoelastischen Materialkonstanten des Stabes betragen $E_\mathrm{M} = E_\mathrm{KV} = 3500\,\mathrm{kN/cm}^2$ und $\eta_\mathrm{M} = \eta_\mathrm{KV} = 4{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{kN\,d/cm}^2$.



Gesucht:

1. Verschiebungssteuerung: Ermitteln Sie die für den gegebenen Verschiebungsverlauf resultierenden Verläufe der Stabkraft $P_I(t)$ zwischen $0 \leq t \leq 200\,\mathrm{d}$ bei Zugrundelegung des Maxwell-Modells und bei Zugrundelegung des Kelvin-Voigt-Modells und stellen Sie diese grafisch dar.

2. Laststeuerung: Nach Lastaufbringung wird die Zugkraft $P_{II} = 200\,\mathrm{kN}$ zunächst konstant gehalten. Es ist weiters zu berücksichtigen, dass der maximale Weg der Prüfmaschine 3 mm beträgt. Ermitteln Sie die entsprechenden Verläufe der Stabkraft $P_{II}(t)$ und der Stablängenänderung $\Delta l_{II}(t)$ zwischen $0 \leq t \leq 200\,\mathrm{d}$ bei Zugrundelegung des Maxwell-Modells und bei Zugrundelegung des Kelvin-Voigt-Modells. Stellen Sie die Verläufe grafisch dar.

Lösung:

Verschiebungssteuerung – Maxwell ($t_0 = 20\,\mathrm{d}$, $t_1 = 180\,\mathrm{d}$, $t_2 = 200\,\mathrm{d}$):

$P_I(t_0^+) = E_M \cdot \frac{\Delta l_I(t_0)}{l_0} \cdot A = 215{,}38\,\mathrm{kN}$, $P_I(t_1^-) = E_M \cdot \exp\left[-\frac{E_M}{\eta_M}(t_1 - t_0)\right] \cdot \frac{\Delta l_I(t_0)}{l_0} \cdot A = 62{,}05\,\mathrm{kN}$

$P_I(t_1^+) = \left[E_M \cdot \exp\left[-\frac{E_M}{\eta_M}(t_1 - t_0)\right] \cdot \frac{\Delta l_I(t_0)}{l_0} + E_M \cdot \frac{\Delta l_I(t_1)}{l_0}\right] \cdot A = -153{,}33\,\mathrm{kN}$

$P_I(t_2) = \left[E_M \cdot \exp\left[-\frac{E_M}{\eta_M}(t_2 - t_0)\right] \cdot \frac{\Delta l_I(t_0)}{l_0} + E_M \cdot \exp\left[-\frac{E_M}{\eta_M}(t_2 - t_1)\right] \cdot \frac{\Delta l_I(t_1)}{l_0}\right] \cdot A = -131{,}24\,\mathrm{kN}$

Verschiebungssteuerung – Kelvin-Voigt: keine Relaxation $\Rightarrow t_0^+ \leq t \leq t_1^- : P(t) = 215{,}38\,\mathrm{kN}$

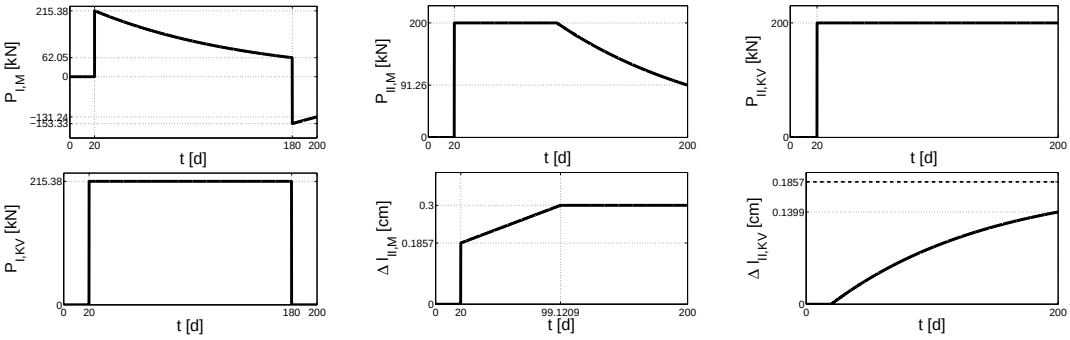
Belastungssteuerung – Maxwell ($t_0 = 20\,\mathrm{d}$, t_1 ... Zeitpunkt der maximalen Stauchung, $t_2 = 200\,\mathrm{d}$):

$\Delta l_{II}(t_0^+) = \frac{\Delta P_{II}(t_0) \cdot l_0}{E \cdot A} = 0{,}1857\,\mathrm{cm}$, $\Delta l_{II}(t_1) = 0{,}3\,\mathrm{cm} = l_0 \cdot \left(\frac{1}{E_M} + \frac{t_1 - t_0}{\eta_M}\right) \cdot \frac{\Delta P_{II}(t_0)}{A} \Rightarrow t_1 = 99{,}12\,\mathrm{d}$

$P_{II}(t_2) = P_{II}(t_1) \cdot \exp\left[-\frac{E_M}{\eta_M}(t_2 - t_1)\right] = 91{,}26\,\mathrm{kN}$

Belastungssteuerung – Kelvin-Voigt:

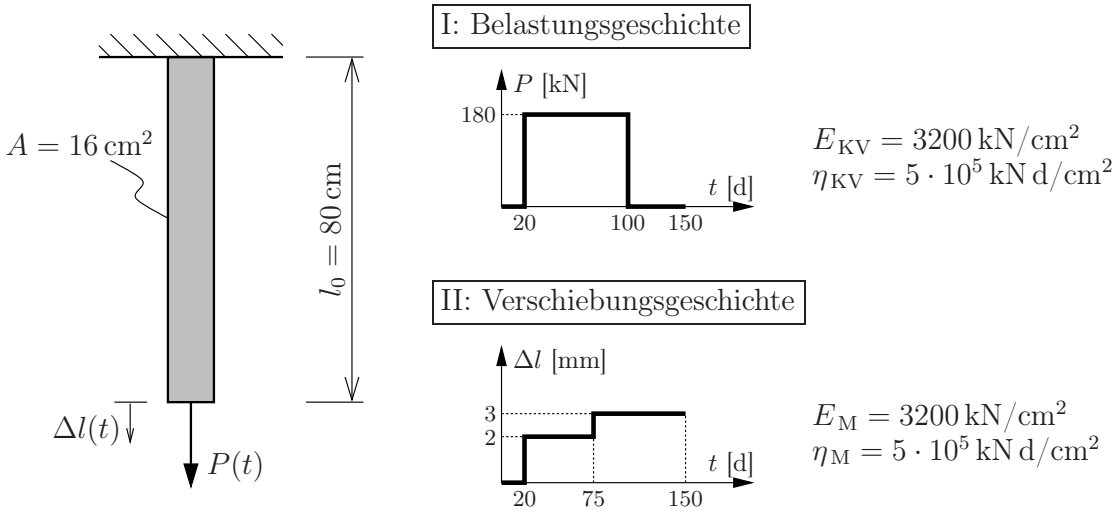
$\Delta l_{II}(t_2) = \frac{l_0}{E_{KV}} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{E_{KV}}{\eta_{KV}}(t_2 - t_0)\right)\right] \cdot \frac{\Delta P_{II}(t_0)}{A} = 0{,}1399\,\mathrm{cm} < 0{,}3\,\mathrm{cm}$



3.Kolloquium WS2011/2012
1. Beispiel: Viskoelastischer Stab

Angabe:

Gegeben ist ein viskoelastischer Stab, der durch eine uniaxiale Kraft $P(t)$ belastet wird (siehe Abbildung).



Gesucht:

1. Ermitteln Sie den für die gegebene Belastungsgeschichte (I) resultierenden Verlauf der Stablängenänderung $\Delta l(t)$ (zwischen $0 \leq t \leq 150\,\mathrm{d}$) bei Zugrundelegung des KELVIN-VOIGT-Modells und stellen Sie diesen grafisch dar.

2. Ermitteln Sie den für die gegebene Verschiebungsgeschichte (II) resultierenden Verlauf der Stabkraft $P(t)$ (zwischen $0 \leq t \leq 150\,\mathrm{d}$) bei Zugrundelegung des MAXWELL-Modells und stellen Sie diesen grafisch dar.

   Hinweis: Anwendung des BOLTZMANNsche Superpositionsprinzips für die Relaxationsfunktion zufolge gegebener Verschiebungen ergibt gemäß Gleichung (10.34) des Buches von Prof. Mang:

$$\sigma(t) = \Delta\varepsilon(t_0)R(t-t_0) + \Delta\varepsilon(t_1)R(t-t_1) + \Delta\varepsilon(t_2)R(t-t_2) + ...$$

Lösung:

I. Belastungsgeschichte: $t_0 = 20\,\mathrm{d}$, $t_1 = 100\,\mathrm{d}$, $t_2 = 150\,\mathrm{d}$

$\Delta l(t \leq t_0) = 0$; $\Delta l(t_1) = \frac{\Delta P(t_0)}{A \cdot E} \cdot [1 - \exp(-\frac{E}{\eta} \cdot (t_1 - t_0))] \cdot l_0 = \frac{180}{16 \cdot 3200} \cdot [1 - \exp(-\frac{3200}{5 \cdot 10^5} \cdot 80)] \cdot 80 = 0{,}1127\,\mathrm{cm}$;

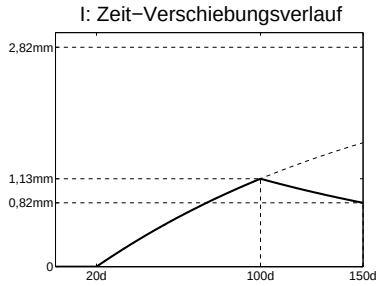
$\Delta l(t_2) = \frac{180}{16 \cdot 3200} \cdot [1 - \exp(-\frac{3200}{5 \cdot 10^5} \cdot 130)] \cdot 80 - \frac{180}{16 \cdot 3200} \cdot [1 - \exp(-\frac{3200}{5 \cdot 10^5} \cdot 50)] \cdot 80 = 0{,}0818\,\mathrm{cm}$

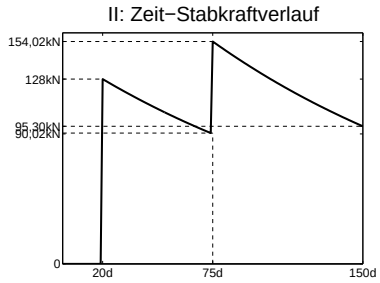
II. Verschiebungsgeschichte: $t_0 = 20\,\mathrm{d}$, $t_1 = 75\,\mathrm{d}$, $t_2 = 150\,\mathrm{d}$

$P(t \leq t_0^-) = 0$; $P(t_0^+) = \frac{\Delta l(t_0^+)}{l_0} \cdot E \cdot \exp[-\frac{E}{\eta}(t_0^+ - t_0)] \cdot A = \frac{0{,}2}{80} \cdot 3200 \cdot 16 = 128\,\mathrm{kN}$

$P(t_1^-) = \frac{0{,}2}{80} \cdot 3200 \cdot \exp[-\frac{3200}{5 \cdot 10^5} \cdot 55] \cdot 16 = 90{,}02\,\mathrm{kN}$; $P(t_1^+) = \frac{0{,}2}{80} \cdot 3200 \cdot \exp[-\frac{3200}{5 \cdot 10^5} \cdot 55] \cdot 16 + \frac{0{,}1}{80} \cdot 3200 \cdot 16 = 154{,}02\,\mathrm{kN}$;

$P(t_2) = \frac{0{,}2}{80} \cdot 3200 \cdot \exp[-\frac{3200}{5 \cdot 10^5} \cdot 130] \cdot 16 + \frac{0{,}1}{80} \cdot 3200 \cdot \exp[-\frac{3200}{5 \cdot 10^5} \cdot 75] \cdot 16 = 95{,}30\,\mathrm{kN}$

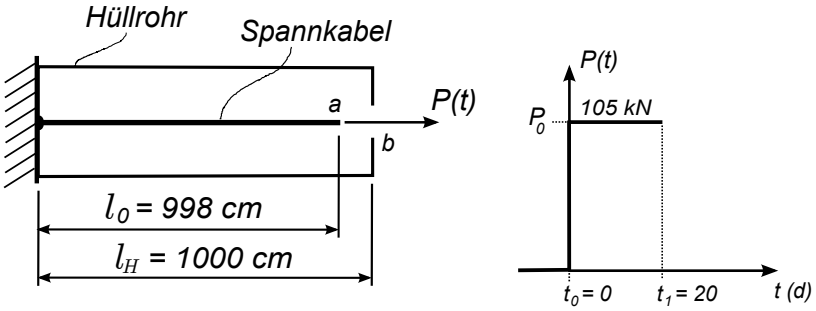




3.Kolloquium WS2010/2011
1. Beispiel: Viskoelastisches Materialverhalten

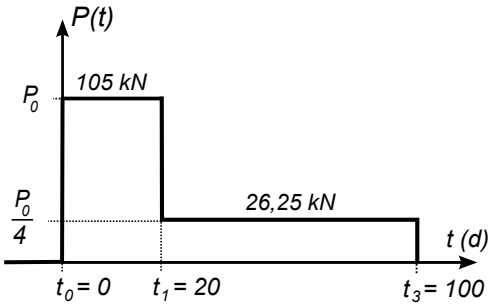
Angabe:

Gegeben ist ein in einem starren Hüllrohr geführtes Spannkabel mit spannungsfreier Ausgangslänge $l_0 = 998$ cm und Querschnittsfläche $A = 4{,}5$ cm^2, welches zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ d durch eine sprunghaft gesteigerte Kraft $P_0 = 105$ kN belastet wird, siehe Abbildung. Nach dem Zeitpunkt $t_1 = 20$ d erreicht das Spannkabelende a das Hüllrohr im Punkt b und wird dort verankert, sodass die Spannkabellänge in weiterer Folge konstant bleibt. Die Länge des Hüllrohres beträgt $l_H = 1000$ cm. Das viskoelastische Materialverhalten des Spannkabels wird mit dem Maxwell'schen Modell beschrieben, wobei der Elastizitätsmodul $E = 20000$ kN/cm^2 beträgt.



Gesucht:

1. Ermitteln Sie die Viskosität η des Maxwell'schen Materialmodells.
2. Wie groß ist die Kraft im Spannkabel zum Zeitpunkt $t_2 = 60$ d?
3. Stellen Sie die Verläufe $P(t)$ und $\Delta l(t)$ qualitativ für die Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_2$ dar.
4. In einem zweiten Experiment wird zum Zeitpunkt $t_1 = 20$ d nicht verankert, sondern die Kraft P sprunghaft auf ein Viertel gesenkt, sodass sich der unten dargestellte Belastungsverlauf ergibt. Bestimmen Sie die Längenänderung des Spannkabels unmittelbar nach vollständiger Entlastung zum Zeitpunkt $t_3 = 100$ d.



Lösung:

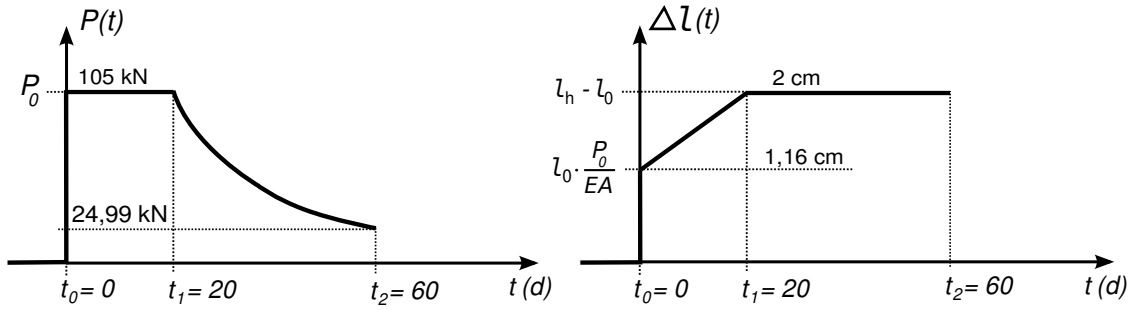
1. Mit $\varepsilon(t_1) = (l_H - l_0)/l_0$ erhält man:

$$\eta = \frac{t_1}{\left[\frac{A(l_H - l_0)}{P_0 \cdot l_0} - \frac{1}{E}\right]} = \frac{20}{\left[\frac{4.5(1000-998)}{105 \cdot 998} - \frac{1}{20000}\right]} = 557319,51\,\mathrm{kN} \cdot \mathrm{d/cm}^2$$

2. Ab t_1 wird die Dehnung konstant gehalten, somit tritt ab diesem Zeitpunkt Relaxation ein:

$$P(t_2) = P_0 \cdot e^{-\frac{E}{\eta}(t_2 - t_1)} = 105 \cdot e^{-\frac{20000}{557319,51}(60-20)} = 24,99\,\mathrm{kN}$$

3. Der Kraft- $P(t)$ und Längenänderungsverlauf $\Delta l(t)$ sehen folgendermaßen aus:



4. Mit dem Boltzmann'schen Superpositionsprinzip:

$$\Delta l(t_3{}^+) = \frac{P_0 \cdot l_0}{A}\left[\frac{(t_3 - t_0)}{\eta} - \frac{3}{4}\frac{(t_3 - t_1)}{\eta}\right] = \frac{105 \cdot 998}{4,5}\left[\frac{(100-0)}{557319,51} - \frac{3}{4}\frac{(100-20)}{557319,51}\right] = 1,67\,\mathrm{cm}$$

3.Kolloquium WS2009/2010
3.Beispiel: Viskoelastizität

Angabe:

Gegeben ist das abgebildete Stabsystem mit der danebenstehenden Belastungsgeschichte. Stab ① der Länge $l_1 = 6$ m und dem Querschnitt $A_1 = 10$ cm^2 verhält sich viskoelastisch und Stab ② rein elastisch ($EI_2 = \infty$).

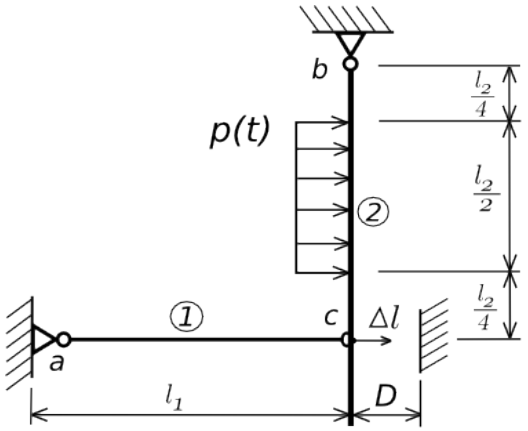
Gesucht:

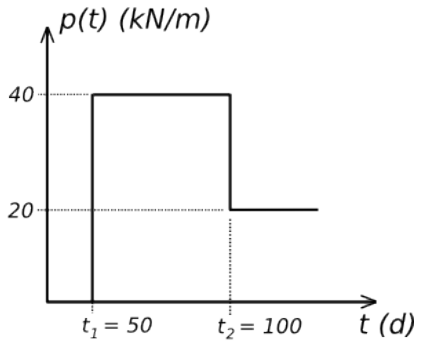
1. Ermitteln Sie den zeitlichen Verlauf der Stabkraft ① mit $l_2 = 8$ m. Bestimmen sie für $\Delta l(t_1^+) = 3$ mm und $\Delta l(t_2^-) = 5$ mm den Elastizitätsmodul E und die Zähigkeit η_M des Maxwell'schen Modells.

2. Zu welchem Zeitpunkt t_3 berührt Punkt c die feste Oberfläche, wenn $D = 7$ mm entspricht.

3. Bei welcher Zeit t_4 ist die Spannung in ① auf die Hälfte des Ursprünglichen Wertes abgesungen (Maxwell'sches Modell). Skizzieren Sie die Verläufe $N_1(t)$ und $\Delta l(t)$.

4. Ermitteln Sie bei gleicher Belastungsgeschichte und gleichem E die Zähigkeit η_{KV} eines Kelvin-Voigt Modells, wenn die Stablängenänderung $\Delta l(t_2) = 2$ mm beträgt.





Lösung:

- Mittels Momentengleichgewicht um den Punkt b erhält man für den zeitlichen Verlauf der Stabkraft $N_1(t) = p(t)\frac{l_2}{4} = 2 \cdot p(t)$.

- Mit $\Delta\sigma_1 = 8$ kN/cm^2 ergibt sich:

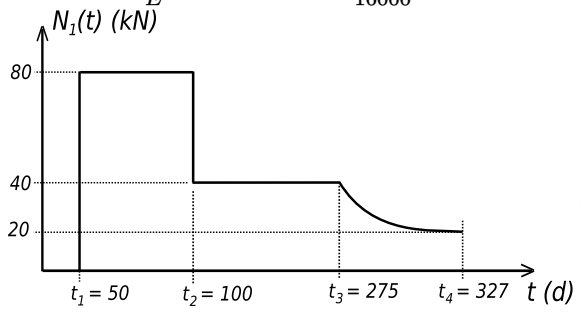
$$E = \frac{l_1}{\Delta l(t_1^+)}\Delta\sigma_1 = \frac{6}{3 \cdot 10^{-3}} \cdot 8 = 16000 kN/cm^2$$

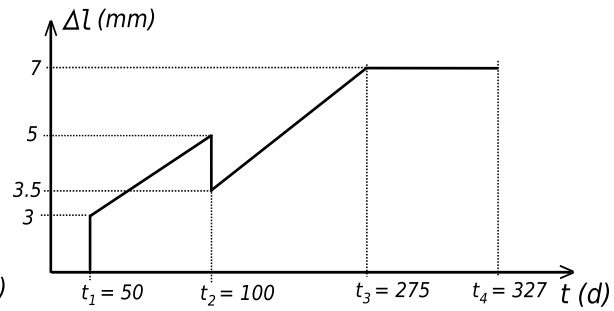
$$\eta_M = \frac{(t_2 - t_1)}{\left(\frac{\Delta l(t_2^-)}{l_1 \Delta\sigma_1} - \frac{1}{E}\right)} = \frac{(100-50)}{\left(\frac{5 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 8} - \frac{1}{16000}\right)} = 1.2 \cdot 10^6 kN \cdot d/cm^2$$

- Mit $\Delta\sigma_2 = -4$ kN/cm^2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{\frac{D}{l_1} - \left[\Delta\sigma_1\left(\frac{1}{E} - \frac{t_1}{\eta_M}\right) + \Delta\sigma_2\left(\frac{1}{E} - \frac{t_2}{\eta_M}\right)\right]}{\left(\frac{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2}{\eta_M}\right)} \\ &= \frac{\frac{7 \cdot 10^{-3}}{6} - \left[8\left(\frac{1}{16000} - \frac{50}{1.2 \cdot 10^6}\right) - 4\left(\frac{1}{16000} - \frac{100}{1.2 \cdot 10^6}\right)\right]}{\left(\frac{8-4}{1.2 \cdot 10^6}\right)} = 275d \end{aligned}$$

- Relaxation lässt sich nur mittels Maxwell'schem Modell beschreiben. Daraus ergibt sich: $t_4 = t_3 + \frac{\eta_M}{E} ln2 = 275 + \frac{1.2 \cdot 10^6}{16000} ln2 = 327$ d.





-

$$\eta_{KV} = -\frac{E(t_2 - t_1)}{ln\left(1 - \frac{E\Delta l(t_2)}{l_1 \Delta\sigma_1}\right)} = -\frac{16000 \cdot (100-50)}{ln\left(1 - \frac{16000 \cdot 2 \cdot 10^{-3})}{6 \cdot 8}\right)} = 0.73 \cdot 10^6 kN \cdot d/cm^2$$

Hyperelastizität

Kolloquium SS2021
6. Beispiel: Hyperelastizität – Streckung λ_I

Angabe:

Gegeben ist eine Gummiprobe mit neo-HOOKEschem Materialverhalten ($c = 1{,}091\,\mathrm{MNm/kg}$, $d = 0{,}727\,\mathrm{MNm/kg}$), initialer Massendichte $\rho_0 = 1075\,\mathrm{kg/m^3}$ und momentaner Massendichte $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$. Diese Probe ist einem Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}$ unterworfen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} +717{,}142 & 0 & 0 \\ 0 & +105{,}154 & 0 \\ 0 & 0 & -107{,}591 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}} \mathrm{MN/m^2}$$

Hinweis: Der Zusammenhang zwischen dem verformten und unverformten Volumenelement lautet: $dV = \det(\boldsymbol{F})dV_0 = JdV_0$, *mit der Jacobi-Determinante* J.

Gesucht ist die zugehörige Streckung λ_I.

Lösung:

Mit Hilfe der initialen und momentanen Massendichte kann die Jacobi-Determinante J wie folgt ermittelt werden [siehe Gl.(1.130) des IM-VO-Skriptums]:

$$J = \frac{\rho_0}{\rho} = 1{,}075\,[\text{-}]$$

Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ für ein hyperelastisches neo-HOOKEsches Materialmodell ist wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{J}\left[c\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T - \mathbf{1}\right) + d\ln(J)\,\mathbf{1}\right]$$

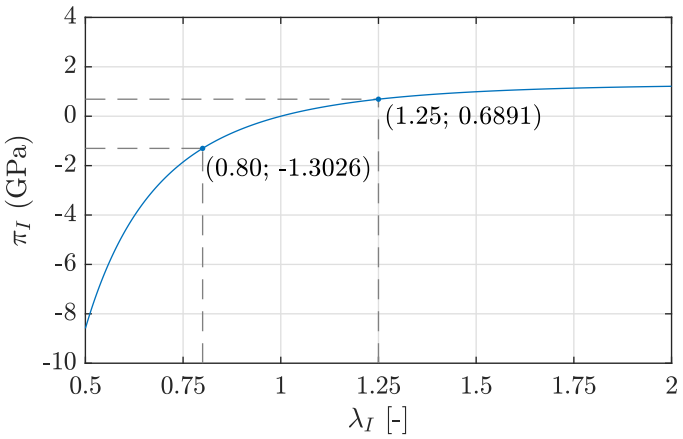
und die Betrachtung der $\mathbf{e}_I$-Richtung liefert eine Gleichung für die gesuchte Streckung λ_I.

$$\sigma_I = \frac{2\rho_0}{J}\left[c\left(\lambda_I^2 - 1\right) + d\ln(J)]\right] \rightarrow \lambda_I = \pm 1{,}1316 = +1{,}1316$$

Kolloquium SS2021
7. Beispiel: Hyperelastizität – Kompakte Polystyrolprobe

Angabe:

Gegeben ist eine kompakte Polystyrolprobe mit neo-HOOKEschem Materialverhalten und einer initialen Massendichte von $\rho_0 = 1040\,\mathrm{kg/m^3}$. Weiters bekannt ist das nachfolgende Spannungs-Streckungsdiagramm der Probe, welche nur in $\mathbf{e}_I$-Richtung gestreckt bzw. gestaucht wird.



Gesucht ist der Materialparameter c in [MNm/kg] und d in [MNm/kg].

Lösung:

Da ein einaxialer Spannungszustand in $\mathbf{e}_I$-Richtung vorliegt, folgen die Streckungen λ_{II} und λ_{III} mit Eins. Somit ergibt sich die Jacobi-Determinante J_i zu:

$$J_1 = \det(\mathbf{F}) = \lambda_{I,1}\lambda_{II}\lambda_{III} = 0{,}80\,[\text{-}]\,,\;\; J_2 = \det(\mathbf{F}) = \lambda_{I,2}\lambda_{II}\lambda_{III} = 1{,}25\,[\text{-}]$$

wobei $\lambda_{I,1} = 0{,}80\,[\text{-}]$ und $\lambda_{I,2} = 1{,}25\,[\text{-}]$ gemäß dem Spannungs-Dehnungsdiagramm berücksichtigt wurde. Basierend auf dem neo-HOOKEschen Materialverhalten kann die Spannungskomponente $\pi_{I,i}$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$\pi_{I,1} = 2\rho_0\left\{c\left[1-\frac{1}{\lambda_{I,1}^2}\right]+d\ln\left(J_1\right)\frac{1}{\lambda_{I,1}^2}\right\} \rightarrow\; -1{,}3026 = 2\rho_0\left\{c\left[1-\frac{1}{0{,}80^2}\right]+d\ln\left(0{,}80\right)\frac{1}{0{,}80^2}\right\}$$

$$\pi_{I,2} = 2\rho_0\left\{c\left[1-\frac{1}{\lambda_{I,2}^2}\right]+d\ln\left(J_2\right)\frac{1}{\lambda_{I,2}^2}\right\} \rightarrow\; +0{,}6891 = 2\rho_0\left\{c\left[1-\frac{1}{1{,}25^2}\right]+d\ln\left(1{,}25\right)\frac{1}{1{,}25^2}\right\}$$

und auflösen der beiden Gleichungen nach c und d liefert:

$$\begin{aligned} c &= 0{,}000\,577\,053\,\mathrm{GNm/kg} \;\;\hat{=}\;\; 0{,}577\,053\,\mathrm{MNm/kg} \\ d &= 0{,}000\,865\,187\,\mathrm{GNm/kg} \;\;\hat{=}\;\; 0{,}865\,187\,\mathrm{MNm/kg} \end{aligned}$$

Kolloquium SS2021
8. Beispiel: Hyperelastizität – Streckung λ_{III}

Angabe:

Gegeben ist ein Hartgummi-Auflager mit hyperelastischem Materialverhalten, welches einer reinen Schubverzerrung in der $\mathbf{e}_x$-$\mathbf{e}_y$-Ebene ausgesetzt ist.

$$\mathbf{E} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & E_{xy} & 0 \\ E_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z} \qquad \text{mit } E_{xy} = E_{yx} = 0{,}20\,[\text{-}]$$

Hinweis: Beachten Sie den Zusammenhang zwischen dem Green-Lagrange*schen Verzerrungstensor* $\mathbf{E}$*, dem* Cauchy-Green*schen Strecktensor* $\mathbf{C}$ *und dem Deformationsgradienten* $\mathbf{F}$*.*

Gesucht ist die Streckung λ_{III} in [-].

Lösung:

Der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor $\mathbf{E}$ wird zunächst auf die Verzerrungshauptrichtungen $\mathbf{e}_I$-$\mathbf{e}_{II}$-$\mathbf{e}_{III}$ bezogen. Und mit der Beziehung $\mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{1}$ kann der Cauchy-Greensche Strecktensor angeschrieben werden.

$$\mathbf{E} \;=\; \begin{bmatrix} +E_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{xy} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}} \;\rightarrow\; \mathbf{C} \;=\; 2\mathbf{E} + \mathbf{1} \;=\; \begin{bmatrix} 2E_{xy}+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2E_{xy} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}}$$

Abschließend kann mit der Beziehung $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$, bzw. in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} 2E_{xy}+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2E_{xy} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}} = \begin{bmatrix} \lambda_I^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{II}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{III}^2 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}}$$

die Streckung λ_{III} ausgedrückt werden.

$$\lambda_{III}^2 \;=\; 1 - 2E_{xy} \;\rightarrow\; \lambda_{III} \;=\; \sqrt{1-2E_{xy}} \;=\; +0{,}7746$$

Kolloquium SS2020
6. Beispiel: Hyperelastizität – Spannungen

Angabe:

Gegeben ist ein hyperelastisches Materialgesetz mit dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$, den Materialparametern $D = 1000\,\text{MPa}$ und $C = 375\,\text{MPa}$, sowie dem Deformationsgradienten $\mathbf{F}$ und der Jacobi-Determinante $J = det(\mathbf{F})$.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\,D\,J\,(J-1)\cdot\mathbf{1} + 2\,C\left(\mathbf{F} * \mathbf{F}^T\right) \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2,56 & 0 & 0 \\ 0 & 0,625 & 0 \\ 0 & 0 & 0,625 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}}$$

Gesucht ist die Spannungskomponente σ in Richtung von $\mathbf{e}_I$ in [MPa].

Lösung:

Berechnen der Determinante: $\qquad J = det(\mathbf{F}) = 1$

Einsetzen der Parameter in das hyperelastische Materialgesetz:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\cdot 100\,\text{MPa}\cdot 1\,(1-1)\cdot\mathbf{1} + 2\cdot 375\,\text{MPa}\cdot\left(\begin{bmatrix} 2{,}56 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}625 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}625 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2{,}56 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}625 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}625 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 4915{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 292{,}97 & 0 \\ 0 & 0 & 292{,}97 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}} \text{MPa}$$

Spannungskomponente von σ in Richtung von $\mathbf{e}_I$: $\qquad \sigma_{\mathbf{e}_I} = 4915{,}2\,\text{MPa}$

Ersatz-Kolloquium SS2020
8. Beispiel: Hyperelastizität – Ebene Verzerrung

Angabe:

Gegeben ist die massenbezogene elastische Energiedichte (Energie pro Masse) des hyperelastischen neo-HOOKEschen Materialmodells für ein isotropes Gummimaterial,

$$\bar{\psi}_\rho^{NH}(\mathbf{C}) = c\,(I_1^C - 3 - 2\ln J) + d\,(\ln J)^2\,, \qquad J = \sqrt{I_3^C}\,,$$

mit den Materialparametern $c = 1{,}091\,\mathrm{MNm/kg}$ und $d = 0{,}727\,\mathrm{MNm/kg}$, sowie der initialen Massendichte $\rho_0 = 1100\,\mathrm{kg/m^3}$. Die Invarianten des CAUCHY-GREENschen Strecktensors als Funktion der Streckungen lauten: $I_1^C = \lambda_I^2 + \lambda_{II}^2 + \lambda_{III}^2$ und $I_3^C = \lambda_I^2\,\lambda_{II}^2\,\lambda_{III}^2$.
Gesucht ist die Spannung $\boldsymbol{\sigma}_I$ in Richtung von $\mathbf{e}_I$ in $[\mathrm{MN/m^2}]$, bei einer ebenen Verzerrung $\lambda_I = \lambda_{II} = 1{,}1$ und $\lambda_{III} = 1$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}^{NH} &= \tfrac{1}{J}\boldsymbol{F}\boldsymbol{\pi}^{NH}\boldsymbol{F}^T, && \text{wobei:}\\
\boldsymbol{\pi}^{NH} &= 2\rho_0\tfrac{\partial\bar{\psi}_\rho^{NH}(\boldsymbol{C})}{\partial\boldsymbol{C}}, \quad \tfrac{\partial I_1^C}{\partial\boldsymbol{C}} = \tfrac{\partial\left(\lambda_I^2+\lambda_{II}^2+\lambda_{III}^2\right)}{\partial\boldsymbol{C}} = \mathbf{1}, \quad \tfrac{\partial I_3^C}{\partial\boldsymbol{C}} = \tfrac{\partial\left(\lambda_I^2\lambda_{II}^2\lambda_{III}^2\right)}{\partial\boldsymbol{C}} = I_3^C\boldsymbol{C}^{-1}\\
\Rightarrow \boldsymbol{\pi}^{NH} &= 2\rho_0\left[c\,(\mathbf{1}-\boldsymbol{C}^{-1}) + d\,\ln(J)\,\boldsymbol{C}^{-1}\right]
\end{aligned}$$

Formulieren der Komponente $\boldsymbol{\sigma}_I^{NH}$ durch Einsetzen von $\boldsymbol{\pi}_I^{NH}$ mit $\boldsymbol{C}_I = \lambda_I^2$, $\boldsymbol{F}_I = \lambda_I$ und $J = \lambda_I\lambda_{II}$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_I^{NH} &= 2\tfrac{\rho_0}{\lambda_I\lambda_{II}}\lambda_I\left[c\left(1-\tfrac{1}{\lambda_I^2}\right) + d\tfrac{\ln(\lambda_I\lambda_{II})}{\lambda_I^2}\right]\lambda_I \quad = 2\tfrac{\rho_0}{\lambda_I\lambda_{II}}\left[c\,(\lambda_I^2-1) + d\ln(\lambda_I\lambda_{II})\right]\\
&= 2\tfrac{1100\,kg/m^3}{1{,}1^2}\left[1{,}091\,\mathrm{MNm/kg}\cdot(1{,}1^2-1) + 0{,}727\,\mathrm{MNm/kg}\cdot\ln(1{,}1^2)\right] \;= 668{,}53\,\mathrm{MN/m^2}
\end{aligned}$$

Ersatz-Kolloquium SS2020
9. Beispiel: Hyperelastizität – Ableitung

Angabe:

Gegeben ist die folgende Ableitung

$$\frac{\partial\left(E_I^3 + E_{II}^3 + E_{III}^3\right)}{\partial \mathbf{E}} \qquad \text{wobei} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_I & 0 & 0 \\ 0 & E_{II} & 0 \\ 0 & 0 & E_{III} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$

Gesucht ist die Ableitung.

Lösung:

$$\frac{\partial\left(E_I^3 + E_{II}^3 + E_{III}^3\right)}{\partial \mathbf{E}} = 3\mathbf{E}^2$$

Ersatzkolloquium SS2019
3. Beispiel: Hyperelastizität

Angabe:

Gegeben ist die massenbezogene Energiedichte (Energie pro Masse) des hyperelastischen neo-HOOKEschen Materialmodells für ein isotropes Gummimaterial,

$$\psi_\rho^{NH}(\mathbf{C}) = c\,(I_1^C - 3 - 2\ln J) + d\,(\ln J)^2\,, \qquad J = \sqrt{I_3^C}\,,$$

mit den Materialparametern $c = 1{,}091\,\mathrm{MNm/kg}$ und $d = 0{,}727\,\mathrm{MNm/kg}$, sowie der initialen Massendichte $\rho_0 = 1100\,\mathrm{kg/m^3}$. Die Invarianten des CAUCHY-GREENschen Strecktensors als Funktion der Streckungen lauten: $I_1^C = \lambda_I^2 + \lambda_{II}^2 + \lambda_{III}^2$ und $I_3^C = \lambda_I^2\,\lambda_{II}^2\,\lambda_{III}^2$.

Gesucht:

a. Bestimmen Sie alle Komponenten des CAUCHYschen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}_a$ für einen einaxialen (Zug-)Verzerrungszustand in $\mathbf{e}_I$-Richtung ($\lambda_{II} = \lambda_{III} = 1$) und werten Sie diese für eine Streckung von $\lambda_I = 1{,}08$ aus.

b. Bestimmen Sie alle Komponenten des CAUCHYschen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}_b$ für einen biaxialen Verzerrungszustand in $\mathbf{e}_I$- und $\mathbf{e}_{III}$-Richtung ($\lambda_{II} = 1$) und werten Sie diese für die Streckungen von $\lambda_I = 1{,}12$ und $\lambda_{III} = 0{,}95$ aus.

c. Bestimmen Sie alle Komponenten des CAUCHYschen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}_c$ für einen hydrostatischen (Druck-)Verzerrungszustand ($\lambda_I = \lambda_{II} = \lambda_{III}$) und werten Sie diese für die Streckungen von $\lambda_I = \lambda_{II} = \lambda_{III} = 0{,}91$ aus.

d. Für ein weiteres Material seien nun zwei Energiedichten für einaxiale Verzerrungszustände gegeben: $\psi_\rho^{NH}(\lambda_I = 1{,}05) = 0{,}714 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{MNm/kg}$, $\psi_\rho^{NH}(\lambda_I = 1{,}1) = 2{,}776 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{MNm/kg}$. Berechnen Sie die zugehörigen Materialparameter c und d bei Zugrundelegung des neo-HOOKEschen Modells.

Lösung:

a.

$\lambda_{II} = \lambda_{III} = 1 \quad \Rightarrow \quad J = \lambda_I$

$$\boldsymbol{\sigma}_a = 2\,\frac{\rho_0}{\lambda_I}\begin{bmatrix} c\left(\lambda_I^2 - 1\right) + d\ln\lambda_I & 0 & 0 \\ 0 & d\ln\lambda_I & 0 \\ 0 & 0 & d\ln\lambda_I \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}}$$

für $\lambda_I = 1{,}08$: $\quad \boldsymbol{\sigma}_a = \begin{bmatrix} 483.782 & 0 & 0 \\ 0 & 113.9736 & 0 \\ 0 & 0 & 113.9736 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}} \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}^2}$

b.

$\lambda_{II} = 1 \quad \Rightarrow \quad J = \lambda_I \lambda_{III}$

$$\boldsymbol{\sigma}_a = 2\,\frac{\rho_0}{\lambda_I \lambda_{III}}\begin{bmatrix} c\left(\lambda_I^2 - 1\right) + d\ln(\lambda_I\lambda_{III}) & 0 & 0 \\ 0 & d\ln(\lambda_I\lambda_{III}) & 0 \\ 0 & 0 & c\left(\lambda_{III}^2 - 1\right) + d\ln(\lambda_I\lambda_{III}) \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}}$$

für $\lambda_I = 1{,}12, \lambda_{III} = 0{,}95$: $\quad \boldsymbol{\sigma}_a = \begin{bmatrix} 667.134 & 0 & 0 \\ 0 & 93.251 & 0 \\ 0 & 0 & -126.692 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}} \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}^2}$

c.

$\lambda_I = \lambda_{II} = \lambda_{III} \quad \Rightarrow \quad J = \lambda_I^3$

$$\boldsymbol{\sigma}_a = 2\,\frac{\rho_0}{\lambda_I^3}\begin{bmatrix} c\left(\lambda_I^2 - 1\right) + d\ln(\lambda_I^3) & 0 & 0 \\ 0 & c\left(\lambda_I^2 - 1\right) + d\ln(\lambda_I^3) & 0 \\ 0 & 0 & c\left(\lambda_I^2 - 1\right) + d\ln(\lambda_I^3) \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}}$$

für $\lambda_I = \lambda_{II} = \lambda_{III} = 0{,}91$: $\quad \boldsymbol{\sigma}_a = \begin{bmatrix} -1148.022 & 0 & 0 \\ 0 & -1148.022 & 0 \\ 0 & 0 & -1148.022 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I,\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}} \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}^2}$

d.

Einaxialer Verzerrungszustand: $\lambda_{II} = \lambda_{III} = 1$

$\lambda_I = 1{,}05$: $\quad \psi_\rho^{NH}(\lambda_I = 1{,}05) = c\left[(1^2 + 1^2 + 1{,}05^2) - 3 - 2\ln 1{,}05\right] + d\left[\ln 1{,}05\right]^2 = 0{,}714 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{MNm/kg}$

$\lambda_I = 1{,}05$: $\quad \psi_\rho^{NH}(\lambda_I = 1{,}10) = c\left[(1^2 + 1^2 + 1{,}10^2) - 3 - 2\ln 1{,}10\right] + d\left[\ln 1{,}10\right]^2 = 2{,}776 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{MNm/kg}$

$\Rightarrow$ 2 Gleichungen für 2 Unbekannte:

2. Gleichung: $d = 3{,}0559 - c \cdot 2{,}1334 \quad \Rightarrow \quad$ Einsetzen in 1. Gleichung:

$c = 0{,}847\,\mathrm{MNm/kg}$

$d = 1{,}248\,\mathrm{MNm/kg}$

Abschnitt II

ELASTOPLASTIZITÄT

Kolloquium SS2021
1. Beispiel: Elastoplastizität – Mises-Plastizizät

Angabe:

Gegeben sei ein Spannungszustand mit den Hauptspannungen $\sigma_I = 2\sigma_{II} = 2\sigma_{III}$. Dieser wirke in einem gemäß assoziierter J_2 Plastizität (nach von Mises) fließenden Stück Stahl mit dem Konsistenzparameter $\dot{\lambda} = 0.001$.

Gesucht ist die plastische Volumenänderungsrate $\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$.

Lösung:

Die Fließregel für assoziierte J_2-Plastizität lautet (gemäß UE-Skriptum 4.17)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\,\frac{1}{6\sqrt{J_2^\sigma}} \begin{bmatrix} (\sigma_I - \sigma_{II}) + (\sigma_I - \sigma_{III}) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{II} - \sigma_I) + (\sigma_{II} - \sigma_{III}) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_{III} - \sigma_I) + (\sigma_{III} - \sigma_{II}) \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I,II,III}}$$

Für den gegebenen Spannungszustand erhält man mit $\sigma_{III} = \sigma_A$,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\,\frac{1}{6\sqrt{J_2^\sigma}} \begin{bmatrix} (2\sigma_A - \sigma_A) + (2\sigma_A - \sigma_A) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_A - 2\sigma_A) + (\sigma_A - \sigma_A) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_A - 2\sigma_A) + (\sigma_A - \sigma_A) \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I,II,III}}$$

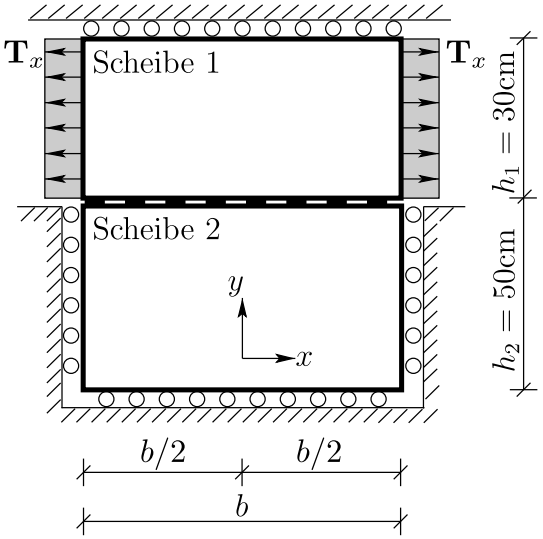
$$\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = (\dot{\lambda}\,\frac{1}{6\sqrt{J_2^\sigma}}) \cdot \mathrm{tr} \begin{bmatrix} 2\sigma_A & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_A & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_A \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I,II,III}} = 0$$

$$\mathrm{tr}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{s} \equiv 0$$

Ersatz-Kolloquium SS2021
11. Beispiel: Elastoplastizität – Scheibe

Angabe:

Gegeben sind zwei isotrope Stahlscheiben (Dicke $t = 1{,}0\,\mathrm{cm}$), siehe Abbildung. Auf Scheibe 1 werden horizontale Traktionskräfte aufgebracht. Scheibe 1 und 2 erfahren beide keine Temperaturänderungen. Die Materialparameter lauten: $E = 21000\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\nu = 0{,}25$, $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ und $f_y = 35{,}5\,\mathrm{kN/cm^2}$. Die Breite der Scheiben beträgt $b = 60\,\mathrm{cm}$.



Hinweise: Es liegt ein ebener Spannungszustand vor. Mit Ausnahme der belasteten Ränder wird an allen anderen Rändern die Verschiebung normal auf die Berandung verhindert. Alle Berandungen und die Kontaktflächen sind reibungsfrei. Aufgrund der Gleichgewichtsbedingungen in den Kontaktflächen sind die Druck-Normalspannungen der beiden Scheiben in y-Richtung gleich groß – die Kontaktfläche kann jedoch keine Zug-Normalspannungen übertragen. Verwenden Sie die linearisierte Elastizitätstheorie.

Gesucht: Welche Traktionskraft-Komponenten $T_x(\mathbf{n} = \mathbf{e}_x, \mathbf{x} = b/2\mathbf{e}_1)$ $T_x(\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x, \mathbf{x} = -b/2\mathbf{e}_1)$ müssen auf Scheibe 1 aufgebracht werden, sodass es gerade zum Fließen (nach Tresca) kommt (T_x soll dabei in Scheibe 1 in x-Richtung eine Zugspannung erzeugen)?

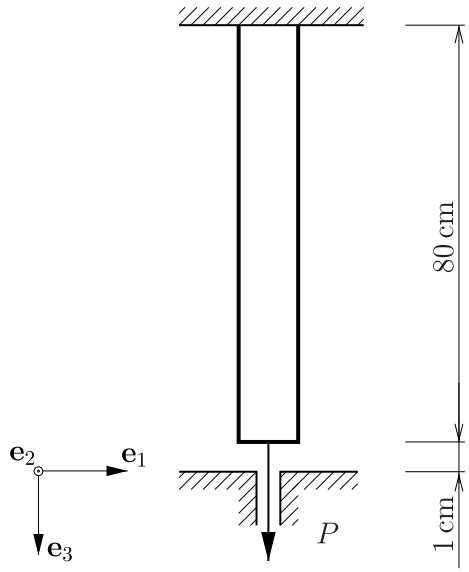
Lösung:

Da keine Zug-Normalspannungen in der Fuge übertragen werden und
da Gleichgewicht und Symmetrie $T_x(\mathbf{n} = \mathbf{e}_x, \mathbf{x} = b/2\mathbf{e}_1) = T_x(\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x, \mathbf{x} = -b/2\mathbf{e}_1)$.
Außerdem Zugspannung in x-Richtung bei positiven $T_x(\mathbf{n} = \mathbf{e}_x, \mathbf{x} = b/2\mathbf{e}_1)$ an Scheibe 1.
Für die Fließspannung nach Tresca folgt $T_x = 35{,}5\,\mathrm{kN/cm^2} \quad \sigma_I = f_y, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$.

Ersatz-Kolloquium SS2021
12. Beispiel: Elastoplastizität – Stab

Angabe:

Gegeben ist ein Stab wie in der nachstehenden Abbildung dargestellt, welcher eine Zugfließgrenze von $f_t^y = 35{,}5\text{kN/cm}^2$ aufweist. Er wird mit einer konstanten Zugspannung, die gleich der Zugfließgrenze f_t^y ist, in der $\mathbf{e}_3$-Richtung belastet.



Gesucht: Bestimmen Sie die Richtung des plastischen Flusses bei Zugrundelegung der Fließfunktion nach $TRESCA$, bezüglich der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$-Basis. Geben Sie hierfür die einzelnen Komponenten im Textfeld an.

Lösung:

$$\sigma_I = f_t^y, \quad \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{II} = \sigma_{III} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{III} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_I \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}$$

$$\Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\sigma_I - \sigma_{III} - 1)}{\partial \sigma_{III}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\sigma_I - \sigma_{III} - 1)}{\partial \sigma_{III}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\sigma_I - \sigma_{III} - 1)}{\partial \sigma_I} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}$$

Kolloquium SS2020
3. Beispiel: Elastoplastizität – Drucker-Prager

Angabe:

Gegeben ist das plastische DRUCKER-PRAGER-Potential mit $\alpha = 0$ und $k = 167\,\text{MPa}$. Es herrscht assozierte Plastizität ($g = f$). Gehen Sie von einem einaxialen Spannungszustand aus mit $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$ und $\sigma_I > 0$.

$$g_{DP}(\boldsymbol{\sigma}) = f_{DP}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2^\sigma} + \alpha\sigma^m - k$$

Gesucht ist das Verhältnis x zwischen der Größe des plastischen Flusses in Richtung von $\mathbf{e}_{III}$ und der Größe des plastischen Flusses in Richtung von $\mathbf{e}_I$.

$$x = \frac{\dot{\varepsilon}_{III}^p}{\dot{\varepsilon}_I^p}$$

Lösung:

Analog nach VON MISES und $\alpha = 0$:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2} - k$$

Die zweite Invariante des Spannungsdeviators:

$$J_2^\sigma = \frac{1}{3}\sigma_I^2$$

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda}\frac{1}{6\sqrt{J_2}}\begin{bmatrix} 2\,\sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_I & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_I \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\dot{\varepsilon}_{III}^p}{\dot{\varepsilon}_I^p} = -0{,}5$$

Ersatz-Kolloquium SS2020
11. Beispiel: Elastoplastizität – Mises

Angabe:

Gegeben ist ein Material, das nach der Fließregel von von mises versagt und bei dem ein Spannungszustand der Form $\boldsymbol{\sigma}_I > \boldsymbol{\sigma}_{II} > \boldsymbol{\sigma}_{III}$ sowie $\boldsymbol{\sigma}_{III} = 0$ vorliegt. Es herrscht assozierte Plastizität ($\mathbf{g} = \mathbf{f}$).

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} \qquad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} \qquad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} \qquad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} \qquad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$

Gesucht: Welche der gezeigten Optionen geben die zugehörige Fließregel korrekt dar?

Lösung:

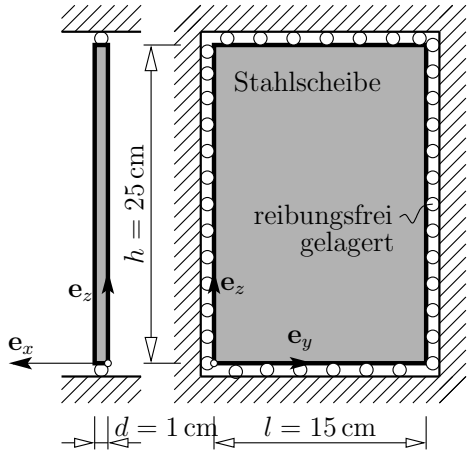
Für die erste Invariante muss folgendes gelten: $I_1 = \mathbf{sp}\left(\frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma}\right) = 0$

Dieses Kriterium erfüllen die mittlere Option der oberen Reihe sowie die letzten beiden der unteren Reihe.

2.Kolloquium WS2014/2015

Angabe:

Gegeben ist eine homogene Scheibe aus Stahl, die gemäß nebenstehender Abbildung in einen starren Rahmen eingebettet ist. Im spannungs- und verzerrungsfreien Ausgangszustand hat die Scheibe eine Temperatur von $T_0 = 20°\mathrm{C}$. Der verwendete Stahl weist eine Querdehnungszahl von $\nu = 0{,}30$, einen Schubmodul von $G = 87{,}5\,\mathrm{GPa}$ und einen Wärmeausdehnungskoeffizienten von $\alpha_T = 13 \times 10^{-5}\,1/\mathrm{K}$ auf. Die Festigkeit des Stahls kann durch ein von Mises-Festigkeitskriterium mit Festigkeitsparameter $k = 136\,\mathrm{MPa}$ beschrieben werden.



Gesucht:

1. Berechnen Sie die kritische Temperatur bei der die Stahlscheibe zu fließen beginnt. Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle *Erwärmung* der Stahlscheibe $T_{kr}^E > T_0$ sowie *Abkühlung* $T_{kr}^A < T_0$.

2. Ermitteln Sie die Richtung des plastischen Flusses $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ für $T = T_{kr}^A$ unter Annahme assoziierter Plastizität und geben Sie die Tensorkomponenten von $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ in der Basis $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, und $\mathbf{e}_z$ an.

Anmerkungen: Es ist die linearisierte Elastizitätstheorie zu Grunde zu legen. Alle Kontaktflächen sind als reibungsfrei anzunehmen. Das Eigengewicht kann vernachlässigt werden. Mögliches Ausknicken der Stahlscheibe wird konstruktiv verhindert.

Lösung:

Aus der Lagerung folgen **Spannungstensor** $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

und **Verzerrungstensor** $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Auswertung des **Hookeschen Gesetzes** (2. und 3. Zeile) liefert ein Gleichungssystem:
$0 = \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} + \alpha_T \Delta T$ sowie $0 = -\frac{\nu}{E}\sigma_{yy} + \frac{1}{E}\sigma_{zz} + \alpha_T \Delta T$.
Auflösen ergibt $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\frac{\alpha_T \Delta T\, E}{1-\nu}$ mit $E = 2G(1+\nu) = 227\,\text{GPa}$.
2. Invariante des Spannungsdeviators $J_2 = \frac{1}{3}\sigma_{yy}^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{J_2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\frac{\alpha_T \Delta T\, E}{1-\nu}$
Einsetzen in **von Mises** Kriterium $\sqrt{J_2} - k = 0$ mit $\Delta T = \Delta T_{kr}$ ergibt $\Delta T_{kr} = \pm\frac{k(1-\nu)\sqrt{3}}{\alpha_t E} = \pm 5{,}58°\text{C}$.
kritische Temperatur Erwärmung: $T_{kr}^E = T_0 + |\Delta T_{kr}| = 25{,}58°\text{C}$, Abkühlung $T_{kr}^A = T_0 - |\Delta T_{kr}| = 14{,}42°\text{C}$

bei assoziierter **von Mises-Plastizität** gilt $g = \sqrt{J_2} - k$ und daher $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\frac{1}{2\sqrt{J_2}}\mathbf{s}$
Für $T = T_{kr}^A$ folgt $\sigma_{yy} = 235{,}24\,\text{MPa}$ und $\sqrt{J_2} = k = 136\,\text{MPa}$
mit dem Spannungsdeviator $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\sigma_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma_{yy} \end{pmatrix}$ folgt $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} -0{,}577 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}288 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}288 \end{pmatrix}$

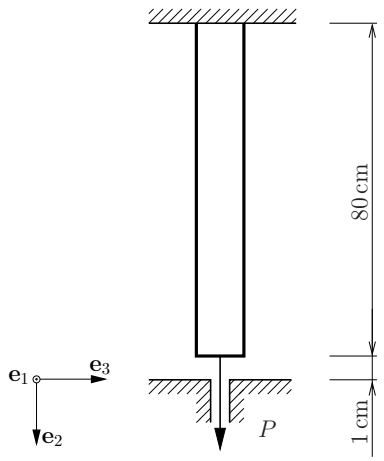
2.Kolloquium WS2013/2014

Angabe:

Gegeben sind zwei Stäbe mit der in der nachstehenden Abbildung definierten Länge und einer Querschnittsfläche von $12\,\mathrm{cm}^2$.

Stab I ist durch die drei Parameter des viskoelastischen Modells nach ZENER charakterisiert: $E_v = 20500\,\mathrm{kN/cm^2}$, $E_{el} = 19500\,\mathrm{kN/cm^2}$ und $\eta = 5{,}85 \cdot 10^6\,\mathrm{kN\,d/cm^2}$. Außerdem wird er mit einer konstanten Zugkraft $P = 360\,\mathrm{kN}$ in $\mathbf{e}_2$-Richtung belastet.

Stab II weist eine Zugfließgrenze von $f_t^y = 35{,}5\,\mathrm{kN/cm^2}$ auf. Außerdem wird er mit einer konstanten Zugspannung, die gleich der Zugfließgrenze f_t^y ist, in der $\mathbf{e}_2$-Richtung belastet.

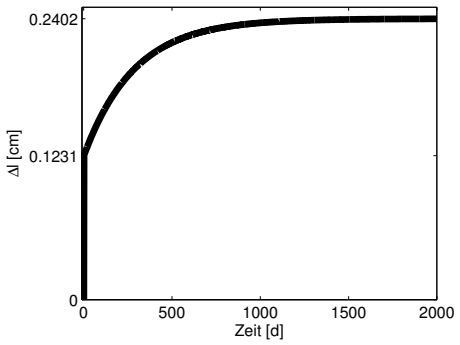


Gesucht:

1. Die Verlängerung von Stab I unmittelbar nach Lastaufbringung ($t = t_0^+ = 0$).
2. Bestimmen Sie ob und ggf. zu welchem Zeitpunkt Stab I die Unterlage berührt. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf der Stablängenänderung für $0 < t < 2000\,\mathrm{d}$ *qualitativ* dar.
3. Bestimmen Sie die Richtung des plastischen Flusses in Stab II, bei Zugrundlegung der Fließfunktion nach TRESCA, bzgl. der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$-Basis.
4. Wird das Volumen von Stab II im Zuge plastischer Deformationen, bei Zugrundlegung der Fließfunktion nach TRESCA, kleiner oder größer? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1) $\varepsilon(t_0^+) = \left\{ \frac{1}{E_{el}} + \frac{1}{E_v} \left[1 - e^{-\frac{E_v}{\eta}(t_0^+ - t_0)} \right] \right\} \Delta\sigma_0 =$
$= \frac{\Delta\sigma_0}{E_{el}} = 0{,}0015 \Rightarrow u(t_0^+) = \varepsilon(t_0^+) \cdot l_0 = 0{,}1231\,\text{cm}$



2) $\varepsilon(t = \infty) = \left\{ \frac{1}{E_{el}} + \frac{1}{E_v} \left[1 - e^{-\frac{E_v}{\eta}(\infty - t_0)} \right] \right\} \Delta\sigma_0 =$
$= (\frac{1}{E_{el}} + \frac{1}{E_v}) \Delta\sigma_0 = 0{,}0030$

$u(t = \infty) = \varepsilon(t = \infty) \cdot l_0 = 0{,}2402\,\text{cm} < 1\,\text{cm}$
$\Rightarrow$ Die Unterlage wird nie berührt.

3) $\sigma_I = f_t^y, \quad \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{II} = \sigma_{III} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_I & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}$$

$$\Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\sigma_I - \sigma_{III} - 1)}{\partial \sigma_{III}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\sigma_I - \sigma_{III} - 1)}{\partial \sigma_I} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\sigma_I - \sigma_{III} - 1)}{\partial \sigma_{III}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}$$

4) Da die plastischen Flüsse betragsmäßig gleich groß sind und einer ein positives Vorzeichen und zwei ein negatives Vorzeichen haben, wird das Volumen des Stabes kleiner.

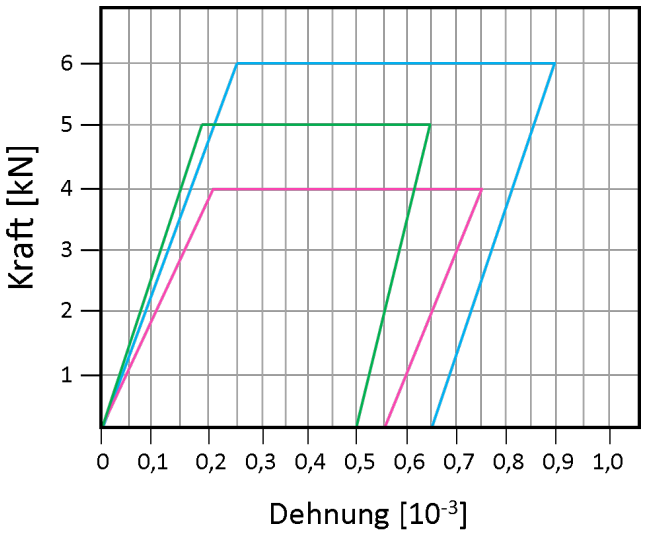
Abschnitt III

MECHANISCHE WERKSTOFFPRÜFUNG

Kolloquium SS2021
10. Beispiel: Erwartungswert E-Modul

Angabe:

Gegeben: Drei einaxiale Versuche mit Kraftbeanspruchung in axialer Richtung wurden für ein Prisma mit quadratischer Grundfläche ($= s^2$, wobei $s = 22\,\mathrm{mm}$) durchgeführt. Die Dehnungen wurden mit Dehnmessstreifen gemessen.



Gesucht ist der Erwartungswert für den Elastizitätsmodul in [GPa] als Mittelwert der über die drei gezeigten Test ermittelten Elastizitätsmoduln.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_1 &= (0{,}9 - 0{,}65)\cdot 10^{-3} &&= 0{,}25\cdot 10^{-3}\\
\Delta\varepsilon_2 &= (0{,}65 - 0{,}5)\cdot 10^{-3} &&= 0{,}15\cdot 10^{-3}\\
\Delta\varepsilon_3 &= (0{,}75 - 0{,}55)\cdot 10^{-3} &&= 0{,}20\cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_1 &= \frac{\Delta F_1}{s^2} = \frac{6\,\mathrm{kN}}{484\,\mathrm{mm}^2} &&= 0{,}0123967\,\mathrm{kN/mm^2}\\
\Delta\sigma_2 &= \frac{\Delta F_2}{s^2} = \frac{5\,\mathrm{kN}}{484\,\mathrm{mm}^2} &&= 0{,}0103306\,\mathrm{kN/mm^2}\\
\Delta\sigma_3 &= \frac{\Delta F_3}{s^2} = \frac{4\,\mathrm{kN}}{484\,\mathrm{mm}^2} &&= 0{,}0082645\,\mathrm{kN/mm^2}
\end{aligned}$$

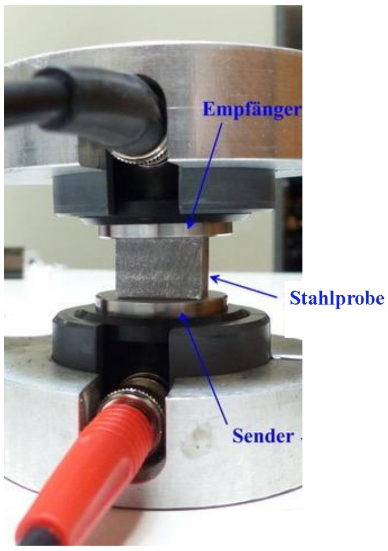
$$\text{mit: } E_{x,i} = \frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\varepsilon_i} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} &= \frac{1}{3}\cdot\left(E_{x,1} + E_{x,2} + E_{x,3}\right) =\\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{0{,}0123967\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2}}{0{,}25\cdot 10^{-3}} + \frac{0{,}0103306\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2}}{0{,}15\cdot 10^{-3}} + \frac{0{,}0082645\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2}}{0{,}20\cdot 10^{-3}}\right)\\
&= 53{,}2599\,\mathrm{GPa}
\end{aligned}$$

Kolloquium SS2021
11. Beispiel: Wellenlänge der Transversalwelle

Angabe:

Gegeben sind Messergebnisse aus einem Ultraschalltest an einer Stahlprobe mit einer Höhe $h = 8\,\mathrm{mm}$; der Querschnitt ist quadratisch, die Seitenlänge beträgt $1{,}9\,\mathrm{cm}$ und die Masse $24{,}1$ Gramm. Die Stahlprobe wird bei einer Frequenz von $10\,\mathrm{MHz}$ untersucht. Versuchsaufbau ist der Skizze zu entnehmen. **Ohne** Stahlprobe werden für die Longitudinalwelle eine Signal-Laufzeit (zwischen Sender und Empfänger) von $4\,\mu\mathrm{s}$ gemessen, für die Transversalwelle $6{,}95\,\mu\mathrm{s}$. **Mit** Stahlprobe werden Laufzeiten von $5{,}96\,\mu\mathrm{s}$ bzw. $9{,}58\,\mu\mathrm{s}$ gemessen.



Gesucht ist die Wellenlänge in [mm] der Transversalwellen in der Stahlprobe.

Lösung:

Nach dem Übungsskript ab Seite 46 folgt:

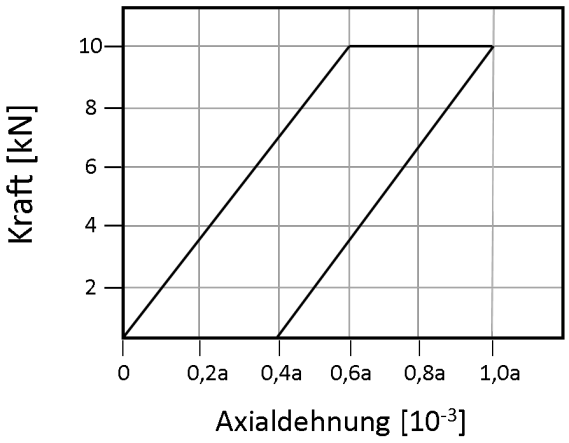
$$v_T = \frac{h}{t_T} = \frac{8\,\mathrm{mm}}{9{,}58\,\mu\mathrm{s} - 6{,}95\,\mu\mathrm{s}} = 3{,}04183\,\mathrm{mm}/\mu\mathrm{s}$$

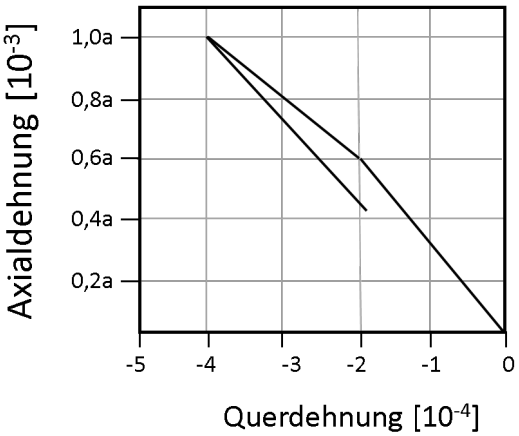
$$\lambda_T = \frac{v_T}{f} = \frac{3{,}04183\,\mathrm{mm}/\mu\mathrm{s}}{10\,\mathrm{MHz}} = 0{,}30418\,\mathrm{mm}$$

Ersatz-Kolloquium SS2021
4. Beispiel: Querdehnungszahl während Fließen

Angabe:

Gegeben sind die nachfolgenden Kraft/Axialdehnungs- bzw. Axialdehnung/Querdehnungs- Diagramme eines einaxialen Zugversuchs mit $a = 2$.





Gesucht ist die Querdehnungszahl des Materials während des Fließens.

Lösung:

$$\Delta\epsilon_{quer,x} = ((-4) - (-2)) \cdot 10^{-4} = -2 \cdot 10^{-4}$$

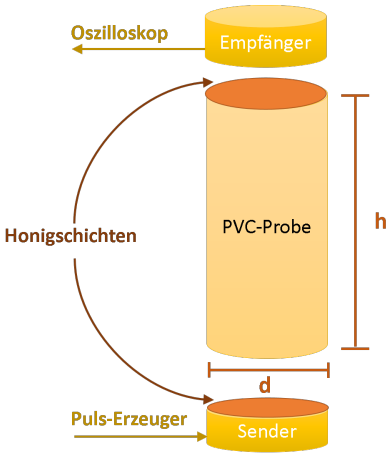
$$\Delta\epsilon_{axial,x} = (1{,}0 \cdot 2 - 0{,}6 \cdot 2) \cdot 10^{-3} = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$$

$$\nu = -\frac{\Delta\epsilon_{quer,x}}{\Delta\epsilon_{axial,x}} = -\frac{-2{,}0 \cdot 10^{-4}}{0{,}8 \cdot 10^{-3}} = 0{,}25$$

Ersatz-Kolloquium SS2021
5. Beispiel: E-Modul – Ultraschall

Angabe:

Gegeben sind Messergebnisse für eine zylindrische PVC-Probe. Der Zylinder hat eine Höhe von $h = 200\,\mathrm{mm}$ einen Durchmesser von $d = 30\,\mathrm{mm}$ und eine Masse von $m = 250\,\mathrm{g}$. Der PVC-Zylinder wird in axialer Richtung mittels Ultraschall untersucht. Die Messfrequenz beträgt $1\,\mathrm{MHz}$. Zur Verbesserung der Signalübertragung zwischen Sender, Probe und Empfänger wird Honig verwendet; siehe Skizze unten. Die Laufzeit durch beide Honigschichten zusammen (ohne Probe) beträgt $380\,\mathrm{ns}$. Die Gesamt-Wellenlaufzeiten durch den Zylinder (plus beide Honigschichten) betragen $88{,}68\,\mu\mathrm{s}$ (Longitudinalwelle) beziehungsweise $191{,}56\,\mu\mathrm{s}$ (Transversalwelle).



Gesucht Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul des Materials (in [GPa]).

Lösung:

Laufzeit Longitudinalwelle:

$$t_L = 88{,}68\,\mu\mathrm{s} - 0{,}38\,\mu\mathrm{s} = 88{,}30\,\mu\mathrm{s}$$

Laufzeit Transversalwelle:

$$t_T = 191{,}56\,\mu\mathrm{s} - 0{,}38\,\mu\mathrm{s} = 191{,}18\,\mu\mathrm{s}$$

Geschwindigkeit der Longitudinalwelle:

$$v_L = \frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{88{,}30\,\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} = 2265{,}0057\,\mathrm{m/s}$$

Geschwindigkeit der Transversalwelle:

$$v_T = \frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{191{,}18\,\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} = 1046{,}0798\,\mathrm{m/s}$$

Dichte des Materials:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0{,}250\,\mathrm{kg}}{0{,}2\,\mathrm{m}\cdot\pi\cdot\left(\frac{0{,}03\,\mathrm{m}}{2}\right)^2} = 1768{,}3883\,\mathrm{kg/m^3}$$

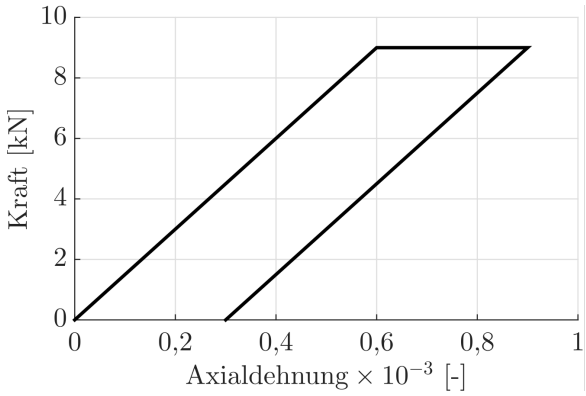
Elastizitätsmodul:

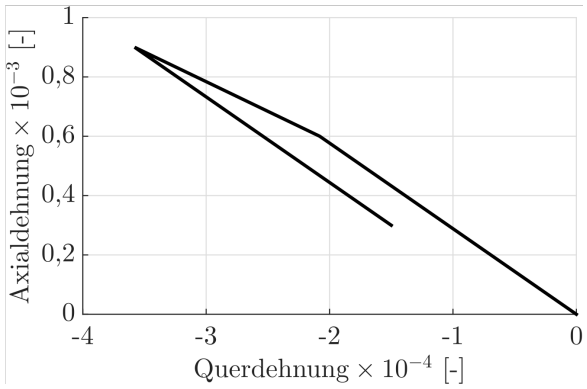
$$\begin{aligned} E &= \rho v_T^2 \cdot \frac{3v_L^2 - 4v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} = \\ &= 1768{,}3883\,\mathrm{kg/m^3}\cdot(1046{,}0798\,\mathrm{m/s})^2\cdot\frac{3\cdot(2265{,}0057\,\mathrm{m/s})^2 - 4\cdot(1046{,}0798\,\mathrm{m/s})^2}{(2265{,}0057\,\mathrm{m/s})^2 - (1046{,}0798\,\mathrm{m/s})^2} = \\ &= 5281160419{,}6374\,\mathrm{Pa} \mathrel{\hat{=}} 5{,}2812\,\mathrm{GPa} \end{aligned}$$

Kolloquium SS2020
4. Beispiel: Experimentelle Methoden – Querdehnungszahl

Angabe:

Gegeben sind die nachfolgenden Kraft/Axialdehnungs- bzw. Axialdehnungs/Querdehnungs-Diagramme eines einaxialen Zugversuchs.





Gesucht: Die Querdehnungszahl des Materials während des Fließens.

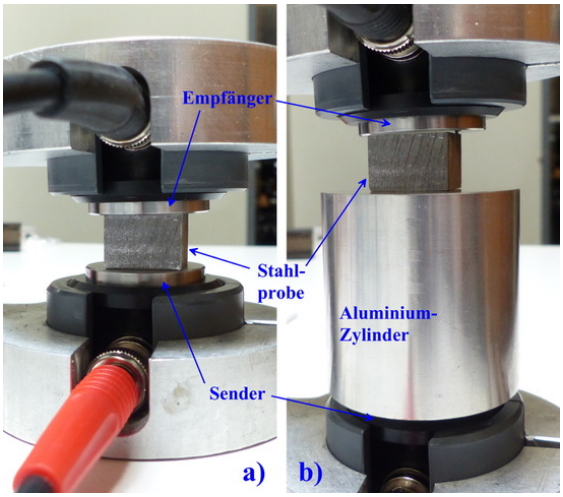
Lösung: Querdehnungszahl des Materials:

$$\Delta\epsilon_{quer,x} = (-3,5-(-2))\cdot 10^{-4} = -1{,}5\cdot 10^{-4}$$

$$\Delta\epsilon_{axial,x} = (0,9-0,6)\cdot 10^{-3} = 0{,}3\cdot 10^{-3}$$

$$\nu = -\frac{\Delta\epsilon_{quer,x}}{\Delta\epsilon_{axial,x}} = 0{,}5$$

Kolloquium SS2020
5. Beispiel: Experimentelle Methoden – Signallaufzeiten



Angabe:

Gegeben ist die Stahlprobe laut Abbildung a). Die Höhe der Probe (in Messrichtung) beträgt $8{,}5\,\mathrm{mm}$. Die Stahlprobe wird bei einer Frequenz von 10 MHz untersucht. Ohne Stahlprobe werden für die Longitudinalwelle eine Signal-Laufzeit (zwischen Sender und Empfänger) von $4{,}44\,\mu s$ gemessen, für die Transversalwelle $6{,}69\,\mu s$. Mit Stahlprobe werden Laufzeiten von $5{,}68\,\mu s$ bzw. $9{,}45\,\mu s$ gemessen.

Gesucht ist die Transversalwellengeschwindigkeit v_T.

Lösung:

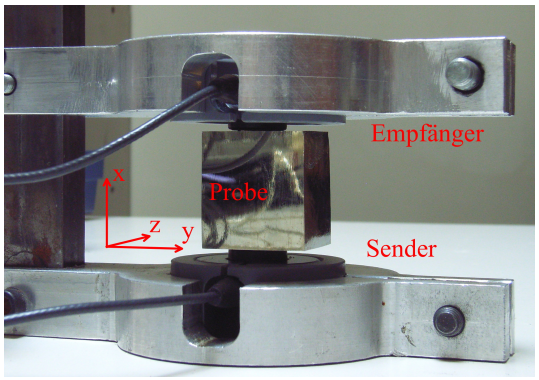
Signallaufzeit mit Probe: $t_T = 9{,}45\,\mu s - 6{,}69\,\mu s = 2{,}76\,\mu s$

Ermitteln der Transversalwellengeschwindigkeit: $v_T = \frac{8{,}5\,mm}{2{,}76\,\mu s} = 3079{,}71\,\mathrm{m/s}$

Ersatz-Kolloquium SS2020
7. Beispiel: Experimentelle Methoden – Elastizitätsmodul

Angabe:

Gegeben ist eine Aluminiumprobe mit Probenhöhe 8,5 mm laut Abbildung. Die Dichte des Materials beträgt 2,5 g/cm^3. Außerdem wurde eine Transversalwellengeschwindigkeit von 3,1 km/s und eine Longitudinalwellengeschwindigkeit von 6,4 km/s gemessen. **Gesucht** ist der Elastizitätsmodul der Aluminiumprobe in [MPa].



Lösung:

$$E = \rho\, v_T^2\, \frac{3v_L^2 - 4v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} = 2500\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (3100\,\mathrm{m/s})^2\, \frac{3\cdot(6400\,m/s)^2 - 4\cdot(3100\,m/s)^2}{(6400\,m/s)^2 - (3100\,m/s)^2}$$

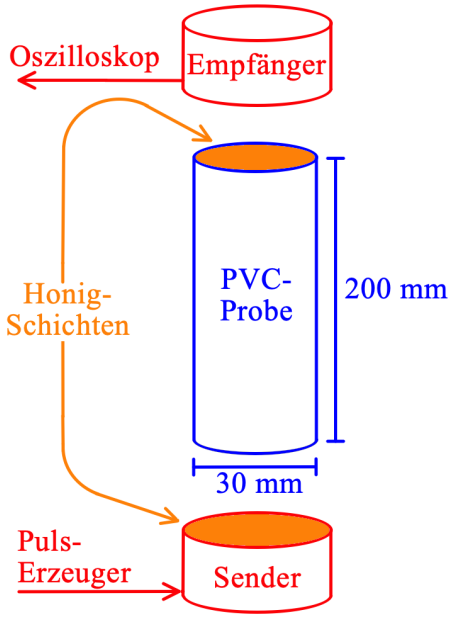
$$= 64{,}71 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa} \quad \Rightarrow \quad E = 64710\,\mathrm{MPa}$$

Ersatzkolloquium SS2019
1. Beispiel: Mechanische Werkstoffprüfung

Angabe:

Gegeben sind Messergebnisse für eine zylindrische PVC-Probe, die mit zwei verschiedenen Messmethoden erzielt wurden. Der Zylinder hat eine Höhe von 200 mm, einen Durchmesser von 30 mm und eine Masse von 200 g.

1. Der PVC-Zylinder wird in axialer Richtung mittels Ultraschall untersucht. Die Messfrequenz beträgt 1 MHz. Zur Verbesserung der Signalübertragung zwischen Sender, Probe und Empfänger wird Honig verwendet; siehe Skizze rechts. Die Laufzeit durch beide Honigschichten zusammen (ohne Probe) beträgt 400 ns. Die Gesamt-Wellenlaufzeiten durch den Zylinder (plus beide Honigschichten) betragen 88,68 μs (Longitudinalwelle) beziehungsweise 191,56 μs (Transversalwelle).



2. Der gleiche Zylinder wird ebenfalls entlang der Achse einem einaxialen Druckversuch unterworfen. Gemessen wird die Längenänderung der Probe zwischen Druckkraftniveaus von 0,95 kN und 3,63 kN mittels digitaler Wegaufnehmer. Über die Messstrecke von 80 mm ergibt sich eine Verkürzung von 110 μm.

Gesucht:

a. Bestimmen Sie die Dichte der Probe.

b. Bestimmen Sie aus dem Ultraschall-Versuch die Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit in der Probe, sowie die Wellenlängen, den Elastizitätsmodul (in GPa) und die Querdehnungszahl des Materials.

c. Bestimmen Sie außerdem aus dem Belastungsversuch die maximale Spannung und Dehnung sowie – unter der Annahme einer linearen Kraft-Dehnungs-Kurve – den Belastungsmodul (in GPa).

Lösung:

a.

Volumen des Zylinders: $V = 200\,\mathrm{mm} \cdot \pi \cdot \left(\frac{30\,\mathrm{mm}}{2}\right)^2 \approx 141371{,}67\,\mathrm{mm}^3 = 1{,}4137167 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^3$

Dichte des Materials: $\rho = m/V = \frac{200\,\mathrm{g}}{141371{,}67\,\mathrm{mm}^3} = \frac{0{,}2\,\mathrm{kg}}{1{,}4137167 \cdot 10^{-5}\mathrm{m}^3} \approx 1414{,}7\,\mathrm{kg/m}^3$ b.

Laufzeit Longitudinalwelle: $t_L = 88{,}68\,\mu\mathrm{s} - 0{,}4\,\mu\mathrm{s} = 88{,}28\,\mu\mathrm{s}$

Laufzeit Transversalwelle: $t_T = 191{,}56\,\mu\mathrm{s} - 0{,}4\,\mu\mathrm{s} = 191{,}16\,\mu\mathrm{s}$

Geschwindigkeit der Longitudinalwelle: $v_L = \frac{200\,\mathrm{mm}}{88{,}28\,\mu\mathrm{s}} = \frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{88{,}28 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} \approx 2266\,\mathrm{m/s} = 2{,}266\,\mathrm{km/s}$

Geschwindigkeit der Transversalwelle: $v_T = \frac{200\,\mathrm{mm}}{191{,}16\,\mu\mathrm{s}} = \frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{191{,}16 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} \approx 1046\,\mathrm{m/s} = 1{,}046\,\mathrm{km/s}$

Wellenlänge der Longitudinal-Welle: $\lambda_L = v_L/f = \frac{2{,}266\,\mathrm{km/s}}{1\,\mathrm{MHz}} = \frac{2{,}266 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}}{1 \cdot 10^6\,s^{-1}} = 2{,}266\,\mathrm{mm}$

Wellenlänge der Transversal-Welle: $\lambda_T = v_T/f = \frac{1{,}046\,\mathrm{km/s}}{1\,\mathrm{MHz}} = \frac{1{,}046 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}}{1 \cdot 10^6\,s^{-1}} = 1{,}046\,\mathrm{mm}$

Elastizitätsmodul: $E = \rho v_T^2 \cdot \frac{3v_L^2 - 4v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} \approx 1414{,}7\,\mathrm{kg/m}^3 \cdot 1{,}095\,(\mathrm{km/s})^2 \cdot \frac{11{,}025}{4{,}040}$
$= 1{,}5489 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m \cdot s}} \cdot 2{,}729 \approx 4{,}227\,\mathrm{GPa}$

Querdehnungszahl: $\nu = \frac{v_L^2/2 - v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} \approx \frac{1{,}473}{4{,}040} \approx 0{,}3645$

c.

Kraft-Differenz: $\Delta F = 3{,}63\,\mathrm{kN} - 0{,}95\,\mathrm{kN} = 2{,}68\,\mathrm{kN} = 2680\,\mathrm{N}$

Fläche Zylinder-Oberseite: $A = \pi \cdot \left(\frac{30\,\mathrm{mm}}{2}\right)^2 \approx 706{,}86\,\mathrm{mm}^2 = 7{,}0686 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2$

Spannung: $\sigma = \frac{\Delta F}{A} = \frac{2680\,\mathrm{N}}{7{,}0686 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2} \approx 3791162{,}5\,\mathrm{Pa} \approx 3{,}79\,\mathrm{MPa}$

Dehnung: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0{,}110\,\mathrm{mm}}{80\,\mathrm{mm}} = 0{,}001375$

Belastungsmodul: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{3791162{,}5\,\mathrm{Pa}}{0{,}001375} \approx 2{,}7572\,\mathrm{GPa}$

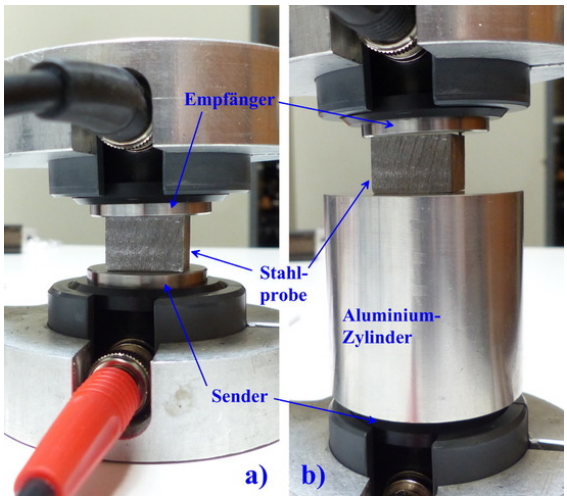
Kolloquium SS2018
1. Beispiel: Mechanische Werkstoffprüfung

Angabe:

Gegeben sind Messergebnisse aus zwei Ultraschall-Tests an einer Stahlprobe. Die Höhe der Probe (in Messrichtung) beträgt 8,5 mm; der Querschnitt ist quadratisch, und die Seitenlänge beträgt 1,9 cm. Die Masse beträgt 24,1 Gramm.

1. Im *ersten Test* wird die Stahlprobe bei einer Frequenz von 10 MHz untersucht. Abbildung a) zeigt den Versuchsaufbau. *Ohne* Stahlprobe werden für die Longitudinalwelle eine Signal-Laufzeit (zwischen Sender und Empfänger) von 4,44 μs gemessen, für die Transversalwelle 6,96 μs. *Mit* Stahlprobe werden Laufzeiten von 5,86 μs bzw. 9,54 μs gemessen.

2. Im *zweiten Test* wird ein Aluminium-Zylinder verwendet, um die Laufzeit zu erhöhen. Abbildung b) zeigt den Versuchsaufbau. Außerdem wird bei einer Frequenz von 5 MHz gemessen. Die Höhe wie der Durchmesser des Zylinders betragen 5,0 cm, die Masse beträgt 263 Gramm. Die Laufzeiten durch den Versuchsaufbau mit Aluminium-Zylinder, aber ohne Stahlprobe werden zu 7,94 bzw. 16,11 μs bestimmt. Mit Zylinder und Stahlprobe ergeben sich 9,35 bzw. 18,73 μs für Longitudinal- bzw. Transversalwellen.



Gesucht:

a. Bestimmen Sie die Dichte der Stahlprobe.

b. Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten der Longitudinal- und Transversalwellen in der Stahlprobe für beide Tests.

c. Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul und die Querdehnungszahl für beide Tests, sowie die entsprechenden Mittelwerte.

d. Bestimmen Sie die Wellenlängen der Longitudunal- und Transversalwellen in der Stahlprobe für beide Tests.

Lösung:

a.

Dichte Stahlprobe: $\rho_{Stahl} = 24{,}1\,\mathrm{g}/(8,5\,\mathrm{mm}\cdot(1{,}9\,\mathrm{cm})^2) \approx 24{,}1\,\mathrm{g}/3{,}07\,\mathrm{cm}^3 \approx 7{,}85\,\mathrm{g}/cm^3 = 7850\,\mathrm{kg/m}^3$

b.

Test 1:

Signallaufzeiten ohne Probe: $t_{L,1} = 5{,}86\,\mu\mathrm{s} - 4{,}44\,\mu\mathrm{s} = 1{,}42\,\mu\mathrm{s}$, $t_{T,1} = 9{,}54\,\mu\mathrm{s} - 6{,}96\,\mu\mathrm{s} = 2{,}58\,\mu\mathrm{s}$

Geschwindigkeiten: $v_{L,1} = 8{,}5\,\mathrm{mm}/1{,}42\,\mu\mathrm{s} \approx 5986\,\mathrm{m/s}$, $v_{T,1} = 8{,}5\,\mathrm{mm}/2{,}58\,\mu\mathrm{s} \approx 3295\,\mathrm{m/s}$

Test 2:

Signallaufzeiten ohne Probe: $t_{L,2} = 9{,}35\,\mu\mathrm{s} - 7{,}94\,\mu\mathrm{s} = 1{,}41\,\mu\mathrm{s}$, $t_{T,2} = 18{,}73\,\mu\mathrm{s} - 16{,}11\,\mu\mathrm{s} = 2{,}62\,\mu\mathrm{s}$

Geschwindigkeiten: $v_{L,2} = 8{,}5\,\mathrm{mm}/1{,}41\,\mu\mathrm{s} \approx 6028\,\mathrm{m/s}$, $v_{T,2} = 8{,}5\,\mathrm{mm}/2{,}62\,\mu\mathrm{s} \approx 3244\,\mathrm{m/s}$

c.

Test 1:

$E_1 = \rho \cdot v_T^2 \cdot (3v_L^2 - 4v_T^2)/(v_L^2 - v_T^2) \approx 218{,}7\,\mathrm{GPa}$, $\nu_1 = (v_L^2/2 - v_T^2)/(v_L^2 - v_T^2) \approx 0{,}2827$

Test 2:

$E_2 = \rho \cdot v_T^2 \cdot (3v_L^2 - 4v_T^2)/(v_L^2 - v_T^2) \approx 214{,}3\,\mathrm{GPa}$, $\nu_2 = (v_L^2/2 - v_T^2)/(v_L^2 - v_T^2) \approx 0{,}2961$

$\Rightarrow$ Mittelwert Elastizitätsmodul: $E = (218{,}7 + 214{,}3)/2 = 216{,}5\,\mathrm{GPa}$

$\Rightarrow$ Mittelwert Querdehnungszahl: $\nu = (0{,}2827 + 0{,}2961)/2 = 0{,}2894\,\mathrm{GPa}$

d.

Test 1:

Longitudinalwellenlänge $\lambda_{L,1} = v_{L,1}/f = 5986\,\mathrm{m/s}/10\,\mathrm{MHz} = 0{,}5986\,\mathrm{mm}$

Transversalwellenlänge: $\lambda_{T,1} = v_{T,1}/f = 3295\,\mathrm{m/s}/10\,\mathrm{MHz} = 0{,}3295\,\mathrm{mm}$

Test 2:

Longitudinalwellenlänge $\lambda_{L,2} = v_{L,2}/f = 6028\,\mathrm{m/s}/5\,\mathrm{MHz} = 1{,}2056\,\mathrm{mm}$

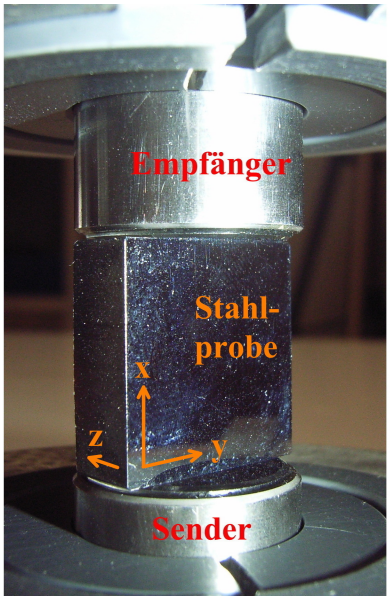
Transversalwellenlänge: $\lambda_{T,2} = v_{T,2}/f = 3244\,\mathrm{m/s}/5\,\mathrm{MHz} = 0{,}6488\,\mathrm{mm}$

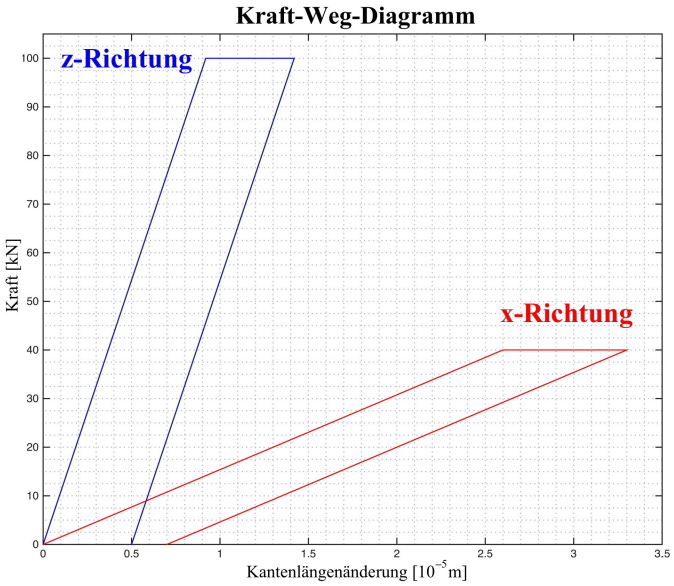
2.Kolloquium WS2016/2017

Angabe:

Gegeben sind Messergebnisse aus zwei Materialtests:

- Ein Quader aus isotropem Stahl (Kantenlängen in x-, y- und z-Richtung wie im Foto eingezeichnet: 20 mm, 20 mm und 7,4 mm; Masse 22,9 g) wird mittels Ultraschall untersucht. Die Messfrequenz beträgt 10 MHz. In Sender und Empfänger sind „delay lines“ integriert, die die Laufzeiten erhöhen. Infolgedessen betragen die Wellenlaufzeiten durch den Versuchsaufbau ohne Stahlprobe 4,44 μs (Longitudinalwelle) und 6,94 μs (Transversalwelle). Die Gesamtlaufzeiten mit Probe betragen in x-Richtung 7,80 μs (Longitudinalwelle) beziehungsweise 13,09 μs (Transversalwelle), und in z-Richtung 5,66 μs (Longitudinalwelle) beziehungsweise 9,16 μs (Transversalwelle).
- Derselbe Stahlquader wird zudem in x-Richtung und unabhängig davon in z-Richtung jeweils einer einaxialen Druckbeanspruchung unterworfen. Die Versuche werden verschiebungsgesteuert mit konstanter Längenänderungsrate bis in den Fließbereich durchgeführt. Anschließend wird die Belastung gestoppt und mit ebenfalls konstanter Längenänderungsrate vollständig entlastet. Gemessen werden die Kräfte sowie die Kantenlängenänderungen in der jeweiligen Belastungsrichtung. Das Diagramm zeigt die Messkurven für beide Richtungen.





Gesucht:

1. Bestimmen Sie aus den Ultraschall-Versuchen die Mittelwerte für die Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit in der Stahlprobe (km/s) und aus den Mittelwerten den Elastizitätsmodul (GPa) sowie die Querdehnungszahl des Materials.

2. Bestimmen Sie aus dem Diagramm der Druckversuche ebenfalls den Elastizitätsmodul (GPa) für beide Messrichtungen und berechnen Sie den Mittelwert.

Lösung:

1. Laufzeit in x-Richtung, Longitudinalwelle: $t_L = 7{,}8\,\mu\text{s} - 4{,}44\,\mu\text{s} = 3{,}36\,\mu\text{s}$

   Laufzeit in x-Richtung, Transversalwelle: $t_T = 13{,}09\,\mu\text{s} - 6{,}94\,\mu\text{s} = 6{,}15\,\mu\text{s}$

   Geschwindigkeit der Longitudinalwelle: $v_L = \frac{2{,}0\,\text{cm}}{3{,}36\,\mu\text{s}} = \frac{2{,}0\cdot 10^{-2}\,\text{m}}{3{,}36\cdot 10^{-6}\,\text{s}} \approx 5952\,\text{m/s} = 5{,}952\,\text{km/s}$

   Geschwindigkeit der Transversalwelle: $v_T = \frac{2{,}0\,\text{cm}}{6{,}15\,\mu\text{s}} = \frac{2{,}0\cdot 10^{-2}\,\text{m}}{6{,}15\cdot 10^{-6}\,\text{s}} \approx 3252\,\text{m/s} = 3{,}252\,\text{km/s}$

   Laufzeit in z-Richtung, Longitudinalwelle: $t_L = 5{,}66\,\mu\text{s} - 4{,}44\,\mu\text{s} = 1{,}22\,\mu\text{s}$

   Laufzeit in z-Richtung, Transversalwelle: $t_T = 9{,}16\,\mu\text{s} - 6{,}94\,\mu\text{s} = 2{,}22\,\mu\text{s}$

   Geschwindigkeit der Longitudinalwelle: $v_L = \frac{7{,}4\,\text{mm}}{1{,}22\,\mu\text{s}} = \frac{7{,}4\cdot 10^{-3}\,\text{m}}{1{,}22\cdot 10^{-6}\,\text{s}} \approx 6066\,\text{m/s} = 6{,}066\,\text{km/s}$

   Geschwindigkeit der Transversalwelle: $v_T = \frac{7{,}4\,\text{mm}}{2{,}22\,\mu\text{s}} = \frac{7{,}4\cdot 10^{-3}\,\text{m}}{2{,}22\cdot 10^{-6}\,\text{s}} \approx 3333\,\text{m/s} = 3{,}333\,\text{km/s}$

   Mittelwert der Longitudinal-Geschwindigkeit: $v_L = \frac{5{,}952+6{,}066}{2}\,\text{km/s} \approx 6{,}009\,\text{km/s}$

   Mittelwert der Transversal-Geschwindigkeit: $v_T = \frac{3{,}252+3{,}333}{2}\,\text{km/s} \approx 3{,}293\,\text{km/s}$

   Volumen: $V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 = 20{,}0\,\text{mm} \cdot 20{,}0\,\text{mm} \cdot 7{,}4\,\text{mm} = 2960\,\text{mm}^3$

   Dichte des Materials: $\rho = m/V = \frac{22{,}9\,\text{g}}{2960\,\text{mm}^3} = \frac{0{,}0229\,\text{kg}}{2{,}96\cdot 10^{-6}\text{m}^3} \approx 7736{,}5\,\text{kg/m}^3$

   Elastizitätsmodul: $E = \rho v_T^2 \cdot \frac{3v_L^2 - 4v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} \approx 8{,}388\cdot 10^{10}\text{kg/ms}^2 \cdot \frac{6{,}496\cdot 10^7}{2{,}527\cdot 10^7} \approx 215{,}6\,\text{GPa}$

   Querdehnungszahl: $\nu = \frac{v_L^2/2 - v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} \approx \frac{7{,}212\cdot 10^6}{2{,}527\cdot 10^7} \approx 0{,}285$

2. Stauchung in x-Richtung: $\epsilon_x = \Delta l_x / l_x = \frac{33\,\mu\text{m} - 7\,\mu\text{m}}{20{,}0\,\text{mm}} = \frac{26\cdot 10^{-6}\text{m}}{20\cdot 10^{-3}\text{m}} = 1{,}3\cdot 10^{-3}$

   Stauchung in z-Richtung: $\epsilon_z = \Delta l_z / l_z = \frac{14\,\mu\text{m} - 5\,\mu\text{m}}{7{,}4\,\text{mm}} = \frac{9\cdot 10^{-6}\text{m}}{7{,}4\cdot 10^{-3}\text{m}} = 1{,}216\cdot 10^{-3}$

   Spannung in x-Richtung: $\sigma_x = 40\,\text{kN}/(20\cdot 7{,}4\,\text{mm}^2) = \frac{4\cdot 10^4\,\text{N}}{1{,}48\cdot 10^{-4}\text{m}^2} = 2{,}7\cdot 10^8\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

   Spannung in z-Richtung: $\sigma_z = 100\,\text{kN}/(20\cdot 20\,\text{mm}^2) = \frac{10\cdot 10^4\,\text{N}}{4\cdot 10^{-4}\text{m}^2} = 2{,}5\cdot 10^8\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

   Elastizitätsmodul in x-Richtung: $E_x = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{2{,}7\cdot 10^8\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1{,}3\cdot 10^{-3}} \approx 2{,}079\cdot 10^{11}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 207{,}9\ \text{GPa}$

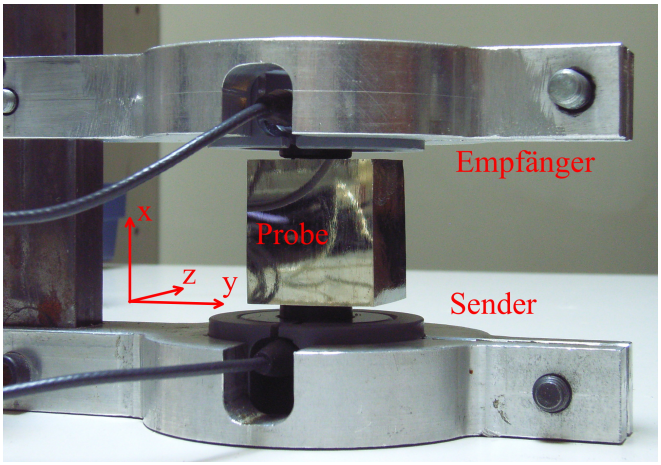
   Elastizitätsmodul in z-Richtung: $E_z = \frac{\sigma_z}{\epsilon_z} = \frac{2{,}5\cdot 10^8\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1{,}216\cdot 10^{-3}} \approx 2{,}056\cdot 10^{11}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 205{,}6\ \text{GPa}$

   Mittelwert: $E = (207{,}9\ \text{GPa} + 205{,}6\ \text{GPa})/2 \approx 206{,}7\ \text{GPa}$

Ersatzkolloquium WS2016/2017

Angabe:

Gegeben: Ein quaderförmiger Pyrit-Kristall (Kantenlängen der Probe in x-, y- und z-Richtung: 34,3 mm, 31,0 mm und 29,5 mm; Masse 145,4 g) wird mittels Ultraschall untersucht. Die Messfrequenz beträgt 5 MHz. Zur Verbesserung der Signalübertragung zwischen Sender, Probe und Empfänger wird Honig verwendet. Die Laufzeit durch die Honigschichten allein beträgt 150 ns. Die Gesamt-Wellenlaufzeiten durch den Kristall (plus Honigschichten) betragen in x-Richtung 4,24 μs (Longitudinalwelle) beziehungsweise 7,67 μs (Transversalwelle), in y-Richtung 3,86 μs (Longitudinalwelle) beziehungsweise 6,94 μs (Transversalwelle) und in z-Richtung 3,61 μs (Longitudinalwelle) beziehungsweise 6,50 μs (Transversalwelle).



Gesucht:

Bestimmen Sie die Dichte der Probe. Bestimmen Sie außerdem aus den Ultraschall-Versuchen die Mittelwerte für die Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit in der Probe und aus den Mittelwerten der Geschwindigkeiten die Wellenlängen, den Elastizitätsmodul (in Gigapascal), die Querdehnungszahl des Materials sowie die Werte für die Steifigkeitstensorkomponenten C_{1111} und C_{1212} (ebenfalls in Gigapascal).

Lösung:

Volumen des Kristalls: $V = 34{,}3\,\mathrm{mm} \cdot 31{,}0\,\mathrm{mm} \cdot 29{,}5\,\mathrm{mm} = 31367{,}35\,\mathrm{mm}^3 = 3{,}136735 \cdot 10^{-5}\mathrm{m}^3$

Dichte des Materials: $\rho = m/V \approx \frac{145{,}4\,\mathrm{g}}{31367\,\mathrm{mm}^3} = \frac{0{,}1454\,\mathrm{kg}}{3{,}1367 \cdot 10^{-5}\mathrm{m}^3} \approx 4635{,}4\,\mathrm{kg/m}^3$

Laufzeit in x-Richtung, Longitudinalwelle: $t_L = 4{,}24\,\mu\mathrm{s} - 0{,}15\,\mu\mathrm{s} = 4{,}09\,\mu\mathrm{s}$

Laufzeit in x-Richtung, Transversalwelle: $t_T = 7{,}67\,\mu\mathrm{s} - 0{,}15\,\mu\mathrm{s} = 7{,}52\,\mu\mathrm{s}$

Geschwindigkeit der Longitudinalwelle: $v_L = \frac{34{,}3\,\mathrm{mm}}{4{,}09\,\mu\mathrm{s}} = \frac{3{,}43 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{4{,}09 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} \approx 8386\,\mathrm{m/s} = 8{,}386\,\mathrm{km/s}$

Geschwindigkeit der Transversalwelle: $v_T = \frac{34{,}3\,\mathrm{cm}}{7{,}52\,\mu\mathrm{s}} = \frac{3{,}43 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{7{,}52 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} \approx 4561\,\mathrm{m/s} = 4{,}561\,\mathrm{km/s}$

Laufzeit in y-Richtung, Longitudinalwelle: $t_L = 3{,}86\,\mu\mathrm{s} - 0{,}15\,\mu\mathrm{s} = 3{,}71\,\mu\mathrm{s}$

Laufzeit in y-Richtung, Transversalwelle: $t_T = 6{,}94\,\mu\mathrm{s} - 0{,}15\,\mu\mathrm{s} = 6{,}79\,\mu\mathrm{s}$

Geschwindigkeit der Longitudinalwelle: $v_L = \frac{31{,}0\,\mathrm{mm}}{3{,}71\,\mu\mathrm{s}} = \frac{3{,}10 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{3{,}71 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} \approx 8356\,\mathrm{m/s} = 8{,}356\,\mathrm{km/s}$

Geschwindigkeit der Transversalwelle: $v_T = \frac{31{,}0\,\mathrm{cm}}{6{,}79\,\mu\mathrm{s}} = \frac{3{,}10 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{6{,}79 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} \approx 4566\,\mathrm{m/s} = 4{,}566\,\mathrm{km/s}$

Laufzeit in z-Richtung, Longitudinalwelle: $t_L = 3{,}61\,\mu\mathrm{s} - 0{,}15\,\mu\mathrm{s} = 3{,}46\,\mu\mathrm{s}$

Laufzeit in z-Richtung, Transversalwelle: $t_T = 6{,}50\,\mu\mathrm{s} - 0{,}15\,\mu\mathrm{s} = 6{,}35\,\mu\mathrm{s}$

Geschwindigkeit der Longitudinalwelle: $v_L = \frac{29{,}5\,\mathrm{mm}}{3{,}46\,\mu\mathrm{s}} = \frac{2{,}95 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{3{,}46 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} \approx 8526\,\mathrm{m/s} = 8{,}526\,\mathrm{km/s}$

Geschwindigkeit der Transversalwelle: $v_T = \frac{29{,}5\,\mathrm{cm}}{6{,}35\,\mu\mathrm{s}} = \frac{2{,}95 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{6{,}35 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} \approx 4646\,\mathrm{m/s} = 4{,}646\,\mathrm{km/s}$

Mittelwert der Longitudinal-Geschwindigkeit: $v_L = \frac{8{,}386 + 8{,}356 + 8{,}526}{3}\,\mathrm{km/s} \approx 8{,}423\,\mathrm{km/s}$

Mittelwert der Transversal-Geschwindigkeit: $v_T = \frac{4{,}561 + 4{,}566 + 4{,}646}{3}\,\mathrm{km/s} \approx 4{,}591\,\mathrm{km/s}$

Wellenlänge der Longitudinal-Welle: $\lambda_L = v_L/f = \frac{8{,}423\,km/s}{5MHz} = \frac{8{,}423 \cdot 10^3\,m/s}{5 \cdot 10^6\,s^{-1}} = 1{,}685\,\mathrm{mm}$

Wellenlänge der Transversal-Welle: $\lambda_T = v_T/f = \frac{4{,}591\,km/s}{5MHz} = \frac{4{,}591 \cdot 10^3\,m/s}{5 \cdot 10^6\,s^{-1}} = 0{,}981\,\mathrm{mm}$

Elastizitätsmodul: $E = \rho v_T^2 \cdot \frac{3v_L^2 - 4v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} \approx 4635{,}4\,\mathrm{kg/m}^3 \cdot 21{,}075\,(\mathrm{km/s})^2 \cdot \frac{128{,}524}{49{,}867}$
$= 9{,}769 \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m \cdot s}} \cdot 2{,}577 \approx 251{,}8\,\mathrm{GPa}$

Querdehnungszahl: $\nu = \frac{v_L^2/2 - v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} \approx \frac{14{,}396}{49{,}867} \approx 0{,}289$

Komponenten des Steifigkeits-Tensors:

$C_{1111} = \rho \cdot v_L^2 = 4635{,}4\,\mathrm{kg/m}^3 \cdot 7{,}094 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \approx 328{,}8\ \mathrm{GPa}$

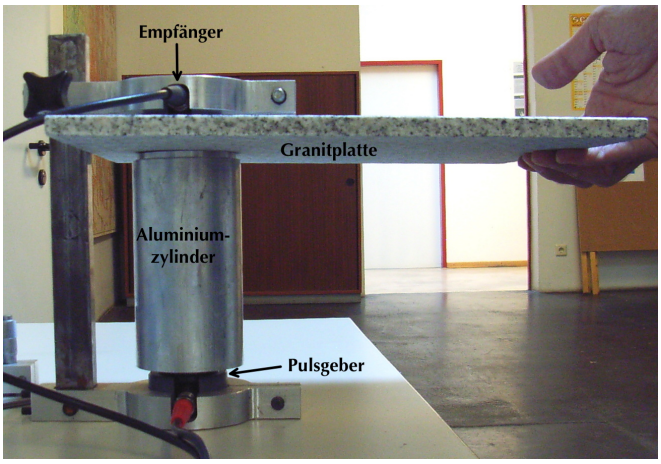
$C_{1212} = \rho \cdot v_T^2 = 4635{,}4\,\mathrm{kg/m}^3 \cdot 2{,}108 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \approx 97{,}7\ \mathrm{GPa}$

2.Kolloquium WS2015/2016

Angabe:

Gegeben sind Messergebnisse aus zwei Materialtests:

- Eine quadratische Granit-Platte (Seitenlänge 30,5 cm, Dicke 10,3 mm, Masse 2,49 kg) wird mittels Ultraschall untersucht. Die Messfrequenz beträgt 1 MHz. Nur für die Messungen in Dickenrichtung wird ein Aluminium-Zylinder benutzt, um die Laufzeit der Wellen zu erhöhen (linke Abbildung). Für den Aluminium-Zylinder allein werden Laufzeiten von 22,02 μs (Longitudinal-Welle) und 45,13 μs (Transversal-Welle) gemessen. Für Aluminium-Zylinder und Granitplatte zusammen werden Laufzeiten von 24,45 μs und 49,42 μs gemessen. In Längsrichtung (rechte Abbildung) werden Laufzeiten von 73,3 μs und 136,5 μs gemessen.
- Ein metallener, zylindrischer Probekörper wird einem einaxialen Druckversuch in Axialrichtung unterworfen. Die Abmessungen des unbelasteten Zylinders betragen: Höhe 20 mm, Durchmesser 10 mm. Bei einer Belastung von 10 kN reduziert sich die Höhe um 32 μm, der Durchmesser wächst um 6 μm. Bei 15 kN liegen die Änderungen bei 49 bzw. 10 μm.



Gesucht:

1. Bestimmen Sie aus den Ultraschall-Versuchen die Mittelwerte für die Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit im Granit (in Kilometer pro Sekunde) und aus den Mittelwerten die Wellenlängen (in Millimeter), den Elastizitätsmodul (in Gigapascal) und die Querdehnungszahl des Granits.

2. Bestimmen Sie aus dem Druckversuch für jede der beiden Laststufen den Elastizitätsmodul (in GPa) und die Querdehnungszahl sowie die Mittelwerte der beiden berechneten elastischen Kenngrößen.

Lösung:

1. Laufzeit entlang der Dicke, Longitudinal-Welle: $t_L = 24{,}45\,\mu\text{s} - 22{,}02\,\mu\text{s} = 2{,}43\,\mu\text{s}$

   Geschwindigkeit der Longitudinal-Welle: $v_L = \frac{1{,}03\,cm}{2{,}43\,\mu s} = \frac{1{,}03\cdot 10^{-2}\,m}{2{,}43\cdot 10^{-6}\,s} \approx 4239\,\text{m/s} = 4{,}239\,\text{km/s}$

   Laufzeit entlang der Dicke, Transversal-Welle: $t_T = 49{,}42\,\mu\text{s} - 45{,}13\,\mu\text{s} = 4{,}29\,\mu\text{s}$

   Geschwindigkeit der Transversal-Welle: $v_T = \frac{1{,}03\,cm}{4{,}29\,\mu s} = \frac{1{,}03\cdot 10^{-2}\,m}{4{,}29\cdot 10^{-6}\,s} \approx 2401\,\text{m/s} = 2{,}401\,\text{km/s}$

   Laufzeit entlang der Länge, Longitudinal-Welle: $t_L = 73{,}3\,\mu\text{s}$

   Geschwindigkeit der Longitudinal-Welle: $v_L = \frac{30{,}5\,cm}{73{,}3\,\mu s} = \frac{3{,}05\cdot 10^{-1}\,m}{7{,}33\cdot 10^{-5}\,s} \approx 4160\,\text{m/s} = 4{,}16\,\text{km/s}$

   Laufzeit entlang der Länge, Transversal-Welle: $t_T = 136{,}5\,\mu\text{s}$

   Geschwindigkeit der Transversal-Welle: $v_T = \frac{30{,}5\,cm}{136{,}5\,\mu s} = \frac{3{,}05\cdot 10^{-1}\,m}{136{,}5\cdot 10^{-5}\,s} \approx 2235\,\text{m/s} = 2{,}235\,\text{km/s}$

   Mittelwert der Longitudinal-Geschwindigkeit: $v_L = (4{,}239\,\text{km/s} + 4{,}160\,\text{km/s})/2 \approx 4{,}20\,\text{km/s}$

   Mittelwert der Transversal-Geschwindigkeit: $v_T = (2{,}401\,\text{km/s} + 2{,}235\,\text{km/s})/2 \approx 2{,}32\,\text{km/s}$

   Wellenlänge der Longitudinal-Welle: $\lambda = v_L/f = \frac{4{,}20\,km/s}{1MHz} = \frac{4{,}20\cdot 10^3\,m/s}{1\cdot 10^6\,s^{-1}} = 4{,}20\,\text{mm}$

   Wellenlänge der Transversal-Welle: $\lambda = v_T/f = \frac{2{,}32\,km/s}{1MHz} = \frac{2{,}32\cdot 10^3\,m/s}{1\cdot 10^6\,s^{-1}} = 2{,}32\,\text{mm}$

   Volumen der Platte: $V = h\cdot l^2 = 1{,}03\,\text{cm}\cdot(30{,}5\,\text{cm})^2 \approx 958\,\text{cm}^3$

   Dichte des Materials: $\rho = m/V = \frac{2{,}49\,kg}{958\,cm^3} = \frac{2{,}49\,kg}{9{,}58\cdot 10^{-4} m^3} \approx 2600\,\text{kg/m}^3$

   Elastizitätsmodul: $E = \rho v_T^2 \cdot \frac{3v_L^2 - 4v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} \approx 1{,}396\cdot 10^{10}\text{kg/ms}^2 \cdot \frac{3{,}141\cdot 10^7}{1{,}226\cdot 10^7} \approx 35{,}77\,\text{GPa}$

   Querdehnungszahl: $\nu = \frac{v_L^2/2 - v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} \approx \frac{3{,}443\cdot 10^6}{1{,}226\cdot 10^7} \approx 0{,}281$

2. Zylinder-Querschnittsfgläche: $A = \pi\cdot r^2 \approx 7{,}854\cdot 10^{-5}\,\text{m}^2$

   Schritt 1; Längsdehnungen: $\epsilon_A = \Delta h/h_0 = \frac{-32\,\mu m}{20\,mm} = -1{,}6\cdot 10^{-3}$

   Querdehnung: $\epsilon_Q = \Delta d/d_0 = \frac{6\,\mu m}{10\,mm} = 6{,}0\cdot 10^{-4}$

   Spannung: $\sigma = F/A \approx \frac{1\cdot 10^4 N}{7{,}854\cdot 10^{-5}\,m^2} \approx 1{,}273\cdot 10^8\,\text{Pa} = 127{,}3\,\text{MPa}$

   Elastizitätsmodul: $E_1 = |\sigma/\epsilon| \approx \frac{127{,}3\,MPa}{1{,}6\cdot 10^{-3}} \approx 79{,}58\,\text{GPa}$

   Querdehnungzahl: $\nu_1 = |\epsilon_Q/\epsilon_A| = \frac{0{,}6\cdot 10^{-3}}{1{,}6\cdot 10^{-3}} \approx 0{,}375$

   Schritt 2; Längsdehnungen: $\epsilon_A = \Delta h/h_0 = \frac{-49\,\mu m}{20\,mm} = -2{,}45\cdot 10^{-3}$

   Querdehnung: $\epsilon_Q = \Delta d/d_0 = \frac{10\,\mu m}{10\,mm} = 1{,}0\cdot 10^{-5}$

   Spannung: $\sigma = F/A \approx \frac{1{,}5\cdot 10^4 N}{7{,}854\cdot 10^{-5}\,m^2} \approx 1{,}910\cdot 10^8\,\text{Pa} = 191{,}0\,\text{MPa}$

   Elastizitätsmodul: $E_2 = |\sigma/\epsilon| \approx \frac{191{,}0\,MPa}{2{,}45\cdot 10^{-3}} \approx 77{,}95\,\text{GPa}$

   Querdehnungzahl: $\nu_2 = |\epsilon_Q/\epsilon_A| = \frac{1{,}0\cdot 10^{-3}}{2{,}45\cdot 10^{-3}} \approx 0{,}4082$

   Mittelwerte:

   Elastizitätsmodul: $E = \frac{E_1+E_2}{2} = (79{,}58\,\text{GPa} + 77{,}95\,\text{GPa})/2 = 78{,}765\,\text{GPa}$

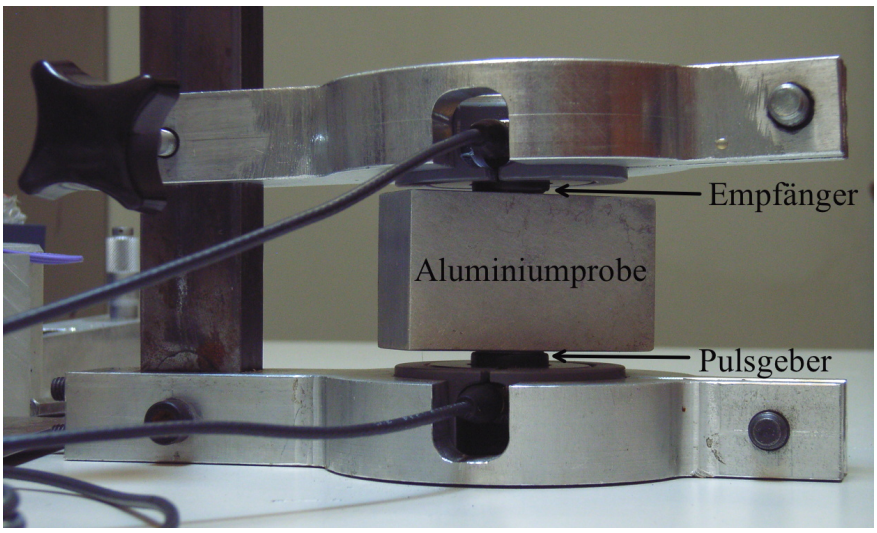
   Querdehnungszahl: $\nu = (0{,}3750 + 0{,}4082)/2 = 0{,}3916$

Ersatzkolloquium WS2015/2016

Angabe:

Gegeben sind Messergebnisse aus zwei Materialtests:

- Ein Quader aus Aluminium (Kantenlängen 1,95 cm, 3,45 cm, 5,95 cm, Masse 108,5 g) wird mittels Ultraschall untersucht. Die Messfrequenz beträgt 5 MHz. Die Wellenlaufzeit durch die als Kontaktmedium dienenden Honigschichten allein beträgt 120 Nanosekunden. Die Laufzeit parallel zur kürzesten Kante beträgt 3,27 μs (Longitudinal-Welle) beziehungsweise 6,33 μs (Transversal-Welle). Parallel zur mittleren Kante (wie in der Abbildung zu sehen) betragen die entsprechenden Laufzeiten 5,70 μs und 10,98 μs, bei der längsten Kante 9,56 μs und 19,25 μs.
- Derselbe Aluminiumkörper wird in einem einaxialen Druckversuch mit einer Kraft von 5 kN belastet, wobei die beiden 1,95 cm $\times$ 5,95 cm großen Oberflächen jeweils einheitlichen Normalkraftdichten unterworfen werden. Durch die Belastung ergibt sich eine Längen-Abnahme in Lastrichtung von 2,0 μm sowie in Längen-Zunahmen von 0,4 μm entlang der kürzesten Kante und 1,2 μm entlang der längsten Kante.



Gesucht:

1. Bestimmen Sie aus den Ultraschall-Versuchen die Mittelwerte für die Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit im Aluminium (in Kilometer pro Sekunde) und aus den Mittelwerten die Wellenlängen (in Millimeter) sowie den Elastizitätsmodul (in Gigapascal) des Materials.

2. Bestimmen Sie aus dem Druckversuch die Querdehnungszahlen, ausgehend von den Längen-Zunahmen entlang der kürzesten sowie der längsten Kanten, und die Änderung des Volumens des Körpers (in Kubikmillimeter).

Lösung:

1. Laufzeit entlang der 1,95 cm-Kante, Longitudinal-Welle: $t_L = 3{,}27\,\mu\text{s} - 0{,}12\,\mu\text{s} = 3{,}15\,\mu\text{s}$

   Laufzeit entlang der 1,95 cm-Kante, Transversal: $t_T = 6{,}33\,\mu\text{s} - 0{,}12\,\mu\text{s} = 6{,}21\,\mu\text{s}$

   Geschwindigkeit der Longitudinal-Welle: $v_L = \frac{1{,}95\,cm}{3{,}15\,\mu s} = \frac{1{,}95\cdot 10^{-2}\,m}{3{,}15\cdot 10^{-6}\,s} \approx 6190\,\text{m/s} = 6{,}190\,\text{km/s}$

   Geschwindigkeit der Transversal-Welle: $v_T = \frac{1{,}95\,cm}{6{,}21\,\mu s} = \frac{1{,}95\cdot 10^{-2}\,m}{6{,}21\cdot 10^{-6}\,s} \approx 3140\,\text{m/s} = 3{,}140\,\text{km/s}$

   Laufzeit entlang der 3,45 cm-Kante, Longitudinal-Welle: $t_L = 5{,}70\,\mu\text{s} - 0{,}12\,\mu\text{s} = 5{,}58\,\mu\text{s}$

   Laufzeit entlang der 3,45 cm-Kante, Transversal: $t_T = 10{,}98\,\mu\text{s} - 0{,}12\,\mu\text{s} = 10{,}86\,\mu\text{s}$

   Geschwindigkeit der Longitudinal-Welle: $v_L = \frac{3{,}45\,cm}{5{,}58\,\mu s} = \frac{3{,}45\cdot 10^{-2}\,m}{5{,}58\cdot 10^{-6}\,s} \approx 6183\,\text{m/s} = 6{,}183\,\text{km/s}$

   Geschwindigkeit der Transversal-Welle: $v_T = \frac{3{,}45\,cm}{10{,}86\,\mu s} = \frac{3{,}45\cdot 10^{-2}\,m}{10{,}86\cdot 10^{-6}\,s} \approx 3177\,\text{m/s} = 3{,}177\,\text{km/s}$

   Laufzeit entlang der 5,95 cm-Kante, Longitudinal-Welle: $t_L = 9{,}56\,\mu\text{s} - 0{,}12\,\mu\text{s} = 9{,}44\,\mu\text{s}$

   Laufzeit entlang der 5,95 cm-Kante, Transversal: $t_T = 19{,}25\,\mu\text{s} - 0{,}12\,\mu\text{s} = 19{,}13\,\mu\text{s}$

   Geschwindigkeit der Longitudinal-Welle: $v_L = \frac{5{,}95\,cm}{9{,}44\,\mu s} = \frac{5{,}95\cdot 10^{-2}\,m}{9{,}44\cdot 10^{-6}\,s} \approx 6303\,\text{m/s} = 6{,}303\,\text{km/s}$

   Geschwindigkeit der Transversal-Welle: $v_T = \frac{5{,}95\,cm}{19{,}13\,\mu s} = \frac{5{,}95\cdot 10^{-2}\,m}{19{,}13\cdot 10^{-6}\,s} \approx 3110\,\text{m/s} = 3{,}110\,\text{km/s}$

   Mittelwert der Longitudinal-Geschwindigkeit: $v_L = \frac{6{,}190+6{,}183+6{,}303}{3}\text{km/s} \approx 6{,}225\,\text{km/s}$

   Mittelwert der Transversal-Geschwindigkeit: $v_T = \frac{3{,}140+3{,}177+3{,}110}{3}\text{km/s} \approx 3{,}142\,\text{km/s}$

   Wellenlänge der Longitudinal-Welle: $\lambda_L = v_L/f = \frac{6{,}225\,km/s}{5MHz} = \frac{6{,}225\cdot 10^3\,m/s}{5\cdot 10^6\,s^{-1}} = 1{,}245\,\text{mm}$

   Wellenlänge der Transversal-Welle: $\lambda_T = v_T/f = \frac{3{,}142\,km/s}{5MHz} = \frac{3{,}142\cdot 10^3\,m/s}{5\cdot 10^6\,s^{-1}} = 0{,}628\,\text{mm}$

   Volumen: $V_0 = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 = 19{,}5\,\text{mm} \cdot 34{,}5\,\text{mm} \cdot 59{,}5\,\text{mm} = 40028{,}625\,\text{mm}^3 \approx 40{,}03\,\text{cm}^3$

   Dichte des Materials: $\rho = m/V = \frac{108{,}5\,g}{40029\,mm^3} = \frac{0{,}1085\,kg}{4{,}0029\cdot 10^{-5} m^3} \approx 2710\,\text{kg/m}^3$

   Elastizitätsmodul: $E = \rho v_T^2 \cdot \frac{3v_L^2 - 4v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} \approx 2{,}676\cdot 10^{10}\text{kg/ms}^2 \cdot \frac{7{,}676\cdot 10^7}{2{,}888\cdot 10^7} \approx 71{,}1\,\text{GPa}$

2. Stauchung entlang der 3,45 cm-Kante: $\epsilon_2 = \epsilon_A = \Delta l_2/l_2 = \frac{-2{,}0\mu m}{34{,}5\,mm} = -5{,}797\cdot 10^{-5}$

   Dehnung entlang der 1,95 cm-Kante: $\epsilon_1 = \epsilon_{Q1} = \Delta l_1/l_1 = \frac{0{,}4\mu m}{19{,}5\,mm} = +2{,}051\cdot 10^{-5}$

   Dehnung entlang der 5,95 cm-Kante: $\epsilon_3 = \epsilon_{Q3} = \Delta l_3/l_3 = \frac{1{,}2\mu m}{59{,}5\,mm} = +2{,}017\cdot 10^{-5}$

   Querdehnungzahl: $\nu_1 = |\epsilon_{Q1}/\epsilon_A| = |\epsilon_1/\epsilon_2| = \frac{2{,}051\cdot 10^{-5}}{5{,}797\cdot 10^{-5}} \approx 0{,}354$

   Querdehnungzahl: $\nu_3 = |\epsilon_{Q3}/\epsilon_A| = |\epsilon_3/\epsilon_2| = \frac{2{,}017\cdot 10^{-5}}{5{,}797\cdot 10^{-5}} \approx 0{,}348$

   Mittelwert: $\nu = (0{,}354 + 0{,}348)/2 = 0{,}351$

   Volumen neu: $V_n = (l_1 + \Delta l_1)\cdot(l_2 + \Delta l_2)\cdot(l_3 + \Delta l_3) = (19{,}5\,\text{mm} + 0{,}4\,\mu\text{m})\cdot(34{,}5\,\text{mm} - 2{,}0\,\mu\text{m})\cdot(59{,}5\,\text{mm} + 1{,}2\,\mu\text{m}) = 19{,}5004\,\text{mm}\cdot 34{,}498\,\text{mm}\cdot 59{,}5012\,\text{mm} \approx 40027{,}933\,\text{mm}^3$

   Volumenabnahme: $\Delta V = V_0 - V_n = 40028{,}625\,\text{mm}^3 - 40027{,}933\,\text{mm}^3 = 0{,}692\,\text{mm}^3$

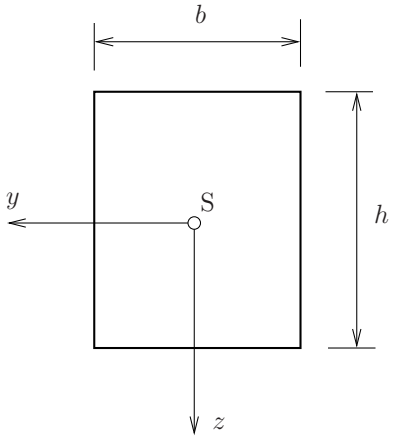
Abschnitt IV

THEORIE GEDRUNGENER STÄBE

Kolloquium SS2021
12. Beispiel: Ermittlung statisches Moment

Angabe:

Gegeben ist ein Rechteckquerschnitt laut nebenstehender Abbildung, mit Breite $b = 25\,\mathrm{mm}$ und Höhe $h = 35\,\mathrm{mm}$.



Gesucht ist das statische Moment an der Stelle $z_1 = h/6$, $S_y(z_1 = h/6)$.

Lösung:

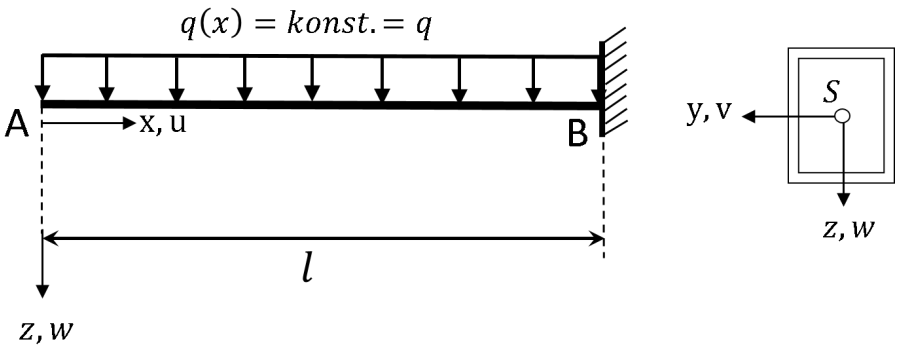
$$S_y(z) = \int_A z\,\mathrm{d}A = b\int_{-h/2}^{z} z\,\mathrm{d}z = b\,\frac{z^2}{2}\bigg|_{-h/2}^{z} = b\left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right) = \frac{b}{2}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)$$

$$S_y(z_1 = h/6) = \frac{b}{2}\cdot\left(\frac{h^2}{36} - \frac{h^2}{4}\right) = -\frac{b\cdot h^2}{9} = -\frac{25\,\mathrm{mm}\cdot(35\,\mathrm{mm})^2}{9} = 3402{,}78\,\mathrm{cm}^3$$

Kolloquium SS2021
9. Beispiel: Integration der Differentialbeziehungen

Angabe:

Gegeben ist ein $3\,\mathrm{m}$ langer gedrungener Träger aus Stahl mit konstantem Rechteckrohr-Querschnitt, welcher durch die Streckenlast $q(x)$ belastet wird. Weiters gegeben sind $EI_y = 100000\,\mathrm{kNm}^2$ und $GA/\kappa = 493880\,\mathrm{kN}$ sowie $q = 20\,\mathrm{kN/\,m}$.



*Hinweis: Geben Sie mindestens **8 Nachkommastellen** an.*

Gesucht ist der Stabneigungswinkel $\frac{dw(x)}{dx}$ an der Einspannstelle.

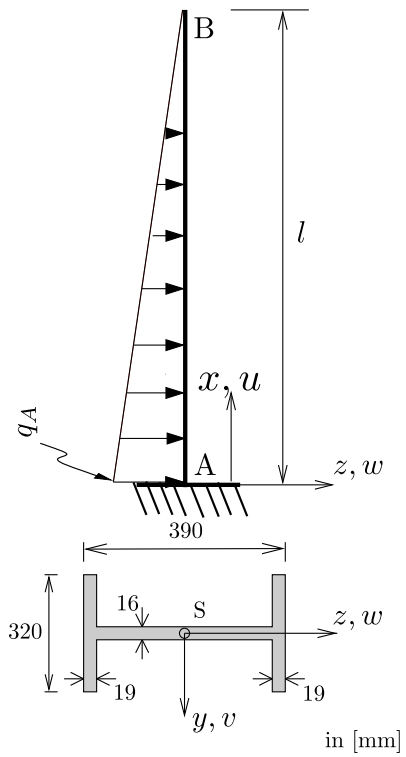
Lösung:

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ\,(x)}{dx} &= -q(x) = -q & \Rightarrow \quad Q\,(x) &= Q_0 - \int_0^x q\;dx \\
&\rightarrow Q_0\,(x=0) = 0 & \Rightarrow \quad Q\,(x) &= -q \cdot x \\
\frac{dw\,(x)}{dx} &= -\phi\,(x) + Q\,(x)\,\tfrac{\kappa}{GA} & \Rightarrow \quad \phi\,(x=l) &= 0 \\
\frac{dw\,(x=l)}{dx} &= Q\,(x=l)\,\tfrac{\kappa}{GA} = \\
&= \frac{-20\,\mathrm{kN/m} \cdot 3\,\mathrm{m}}{493880\,\mathrm{kN}} = -0{,}000121487 \quad \mathrm{rad}
\end{aligned}
$$

Ersatz-Kolloquium SS2021
6. Beispiel: TIMOSHENKO-Gleitung

Angabe:

Gegeben ist eine $3\,\mathrm{m}$ hohe gedrungene Stütze aus Stahl mit konstantem Querschnitt, welche durch eine linear veränderliche Streckenlast $q(x)$ gemäß untenstehender Abbildung beansprucht wird. Weiters gegeben sind die Biegesteifigkeit $EI_y = 100000\,\mathrm{kN/\,m^2}$, und eine Schubsteifigkeit von $GA/\kappa_z = 493880\,\mathrm{kN}$ und $q_A = 20\,\mathrm{kN/\,cm}$.



Gesucht ist die TIMOSHENKO-Gleitung $\gamma_{xz}^{TIM}(x)$ an der Stelle $x = b \cdot l\,\mathrm{m}$ ($b = 0{,}55$).

Lösung:

$$\gamma_{xz}^{TIM}(x = b \cdot l) = Q(x = b \cdot l)\frac{\kappa_z}{GA}$$

$$q(x) = q_A \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \Rightarrow \quad Q(x) = \int -q(x)\,dx = -q_A \cdot \int \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = -q_A\left(x - \frac{x^2}{2\,l}\right) + C_1$$

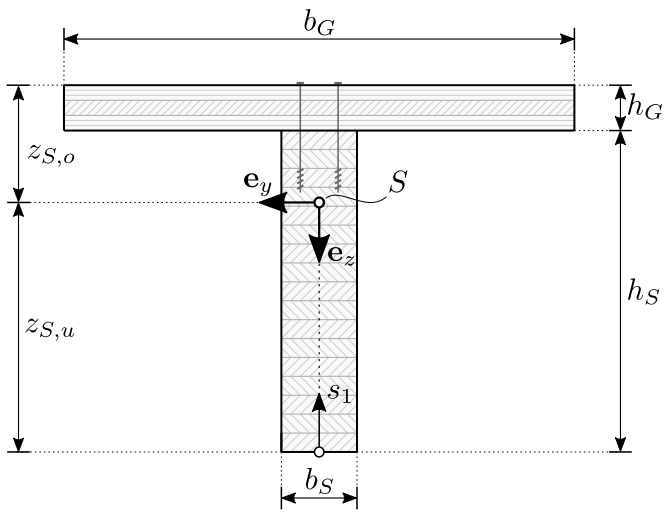
$$Q(x = l) = 0 = -q_A\left(l - \frac{l^2}{2\,l}\right) + C_1 \rightarrow C_1 = \frac{q_A\,l}{2} \quad \Rightarrow \quad Q(b \cdot l) = q_A\,l\left(\frac{b^2}{2} - b + \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}^{TIM}(x = b \cdot l) &= q_A\,l\left(\tfrac{b^2}{2} - b + \tfrac{1}{2}\right) \cdot (493880)^{-1} = \\ &= 20\,\mathrm{kN/m} \cdot 3\,\mathrm{m}\left(\tfrac{0{,}55^2}{2} - 0{,}55 + \tfrac{1}{2}\right) \cdot (493880)^{-1} \;=\; 1{,}2301 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

Ersatz-Kolloquium SS2021
9. Beispiel: Statisches Moment

Angabe:

Gegeben ist ein zusammengesetzter Holzquerschnitt, bestehend aus einer Kreuzlagenholz-Platte (Obergurt, $b_G = 140\,\text{cm}$, $h_G = 12\,\text{cm}$) verschraubt mit einem Brettschichtholzträger (Steg, $b_S = 20\,\text{cm}$, $h_S = 85\,\text{cm}$).



$$z_{Su} = \frac{b_S h_S^2 + b_G h_G (h_G + 2h_S)}{2(b_G h_G + b_S h_S)}$$

Hinweis: Es darf vereinfacht davon ausgegangen werden, dass der zusammengesetzte Querschnitt eben bleibt und einer homogenisierten Einzelfläche (mit konstantem E-Modul) entspricht.

Gesucht: Ermitteln Sie das statische Moment $S_y(s_1)$ in [cm^3] an der Stelle $s_1 = z_{S,u}$.

Lösung:

Das statische Moment $S_y(s_1)$ zwischen $s_1 = 0$ und der Stelle s_1 lässt sich wie folgt anschreiben

$$S_y(s_1) = \int_{s_1} \Big[z(s_1) d(s_1)\Big]\,\mathrm{d}s_1 = b_S \int_{s_1} \Big[z_{S,u} - s_1\Big]\,\mathrm{d}s_1 = b_S z_{S,u} s_1 - b_S \frac{s_1^2}{2},$$

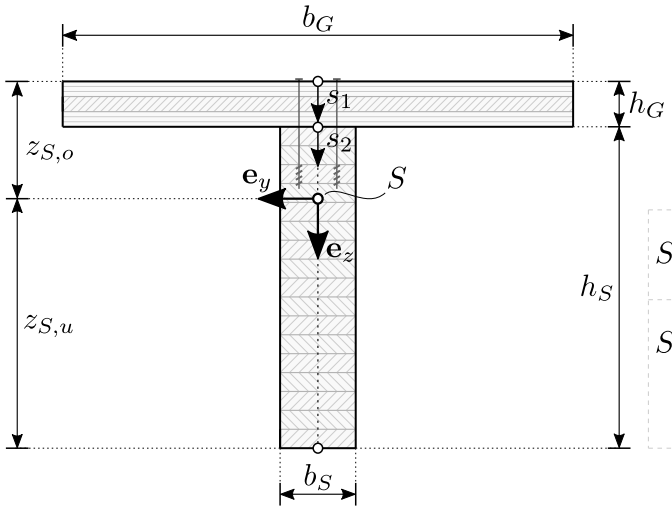
und führt ausgewertet für $s_1 = z_{S,u}$ auf

$$S_y(s_1 = z_{S,u}) = b_S \frac{z_{S,u}^2}{2} = +44.364{,}3\,[\text{cm}^3].$$

Ersatz-Kolloquium SS2021
10. Beispiel: Schubbeiwert

Angabe:

Gegeben ist ein zusammengesetzter Holzquerschnitt, bestehend aus einer Kreuzlagenholz-Platte (Obergurt, $b_G = 140\,\text{cm}$, $h_G = 12\,\text{cm}$) verschraubt mit einem Brettschichtholzträger (Steg, $b_S = 20\,\text{cm}$, $h_S = 85\,\text{cm}$). Weiters gegeben ist $A = 3\,380\,\text{cm}^2$ und $I_y = 3\,031\,280\,\text{cm}^4$. Weiters gegeben sind die Funktionen der quadratischen, statischen Momente in Abhängigkeit der Laufvariable des jeweiligen Teilabschnittes (wie auch in der Abbildung dargestellt):



$$
\begin{aligned}
S_y^2(s_1) &= 1{,}8106 \cdot 10^7\, s_1^2 - 595\,712\, s_1^3 + 4\,900\, s_1^4 \\
S_y^2(s_2) &= 1{,}6795 \cdot 10^9 + 3{,}0151 \cdot 10^7\, s_2 \\
&\quad -684\,293\, s_2^2 - 7\,357\, s_2^3 + 100\, s_2^4
\end{aligned}
$$

Hinweis: Es darf vereinfacht davon ausgegangen werden, dass der zusammengesetzte Querschnitt eben bleibt und einer homogenisierten Einzelfläche (mit konstantem E-Modul) entspricht.

Gesucht: Ermitteln Sie den Schubbeiwert κ_z in [-].

Lösung:

Der Schubbeiwert κ_z kann wie folgt ermittelt werden:

$$\kappa_z = \frac{A}{I_y^2}\left\{\int_0^{h_G}\left[\frac{S_y(s_1)^2}{d(s_1)}\right]\mathrm{d}s_1 + \int_0^{h_S}\left[\frac{S_y(s_2)^2}{d(s_2)}\right]\mathrm{d}s_2\right\}$$

Berücksichtigung der gegebenen statischen Momente führt schließlich auf:

$$
\begin{aligned}
\kappa_z &= +\frac{A}{I_y^2 b_G}\left[1{,}8106 \cdot 10^7\,\frac{s_1^3}{3} - 595\,712\,\frac{s_1^4}{4} + 4\,900\,\frac{s_1^5}{5}\right]\Bigg|_0^{h_G} \\
&\quad +\frac{A}{I_y^2 b_S}\left[1{,}6795 \cdot 10^9\, s_2 + 3{,}0151 \cdot 10^7\,\frac{s_2^2}{2} - 684\,293\,\frac{s_2^3}{3} - 7\,357\,\frac{s_2^4}{4} + 100\,\frac{s_2^5}{5}\right]\Bigg|_0^{h_S}
\end{aligned}
$$

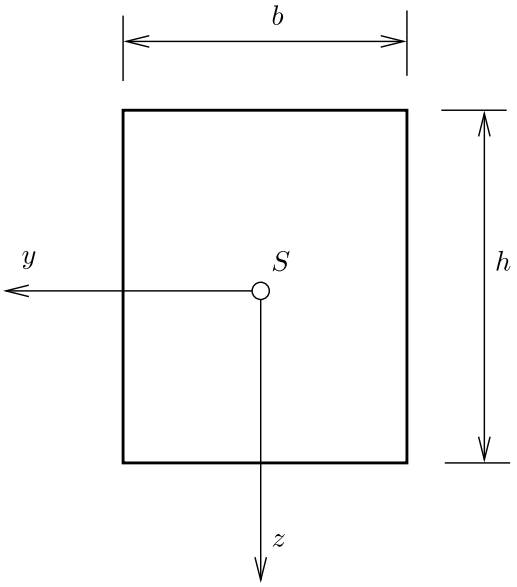
und ergibt folgenden Schubbeiwert:

$$\kappa_z = 0{,}019\,928 + 1{,}918\,680 = 1{,}938\,61\,[\text{-}]$$

Kolloquium SS2020
10. Beispiel: Stabtheorie – Vergleich der Schubsteifigkeiten

Angabe:

Gegeben sind zwei Rechteckquerschnitte, Notation wie in nebenstehender Abbildung, mit der Breite $b = 16\,\text{cm}$ und den Höhen $h_1 = 16\,\text{cm}$ und $h_2 = 18\,\text{cm}$. Für den Querschnitt mit Höhe h_1 ist der Schubmodul mit $G_1 = 0{,}69\,\text{GPa}$ festgelegt.



Gesucht ist die Schubsteifigkeit des Querschnitts mit der Höhe h_1 und der Schubmodul G_2, sodass die Schubsteifigkeit beider Querschnitte gleich groß ist.

Lösung:

Schubsteifigkeit von Querschnitt 1:

$$G_1\tilde{A}_1 = \frac{G_1\,A_1}{\kappa} = \frac{690\,\text{N/mm}^2\,(160\,\text{mm})^2}{1{,}2} = 14{,}72\,\text{MN}$$

Schubmodul von Querschnitt 2:

$$G_2 = \frac{G_1\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2} = \frac{14{,}72\cdot 10^6\,\text{N}}{(160\,\text{mm}\,180\,\text{mm})\,/1{,}2} = 613{,}33\,\text{N/mm}^2 = 0{,}61\,\text{GPa}$$

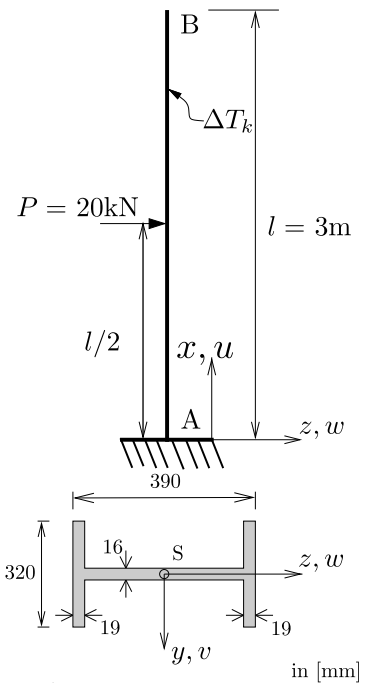
..

Kolloquium SS2020
11. Beispiel: Stabtheorie – Vergleich der Verschiebungsanteile

Angabe:

Gegeben ist eine $3\,\mathrm{m}$ hohe gedrungene Stütze aus Stahl mit konstantem Querschnitt, welche durch eine Einzelkraft P an der Stelle $x = l/2$ gemäß nachstehnder Abbildung, beansprucht wird. Für den doppeltsymmetrischen Querschnitt gilt eine Biegesteifigkeit von $EI_y = 100000\,\mathrm{kN/mm^2}$, und eine Schubsteifigkeit von $GA/\kappa_z = 493880\,\mathrm{kN}$. Gegeben sind weiteres die Durchbiegung und der Querschnittdrehwinkel an der Stelle der Einzelkraft $w\,(l/2) = 0{,}286\,\mathrm{mm}$ und $\phi_y\,(l/2) = -0{,}000225$.

Gesucht sind der Anteil an der Durchbiegung zufolge TIMOSHENKO-Gleitung an der Stelle $x = l/2$ und die Gesamtdurchbiegung an der Stelle $x = l$.



Lösung:

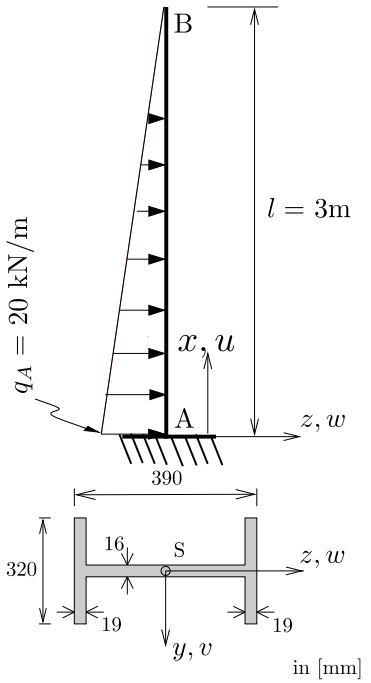
$$
\begin{aligned}
w_{\gamma_{xz}^{TIM}}(x = l/2) &= \int_0^{l/2} \gamma_{xz}^{TIM}(x)\,dx = \int_0^{l/2} Q\,(x)\,\tfrac{\kappa}{GA}\,dx && Q\,(x) = \text{konstant} = 20\,\mathrm{kN} \\
\Rightarrow \quad &= \tfrac{l}{2}\,P\,\tfrac{\kappa}{GA} = 1500\,\mathrm{mm} \cdot (493880\,\mathrm{kN})^{-1} \cdot 20\,\mathrm{kN} && = 0{,}0607\,\mathrm{mm} \\
w\,(l) &= w\,(l/2) - \phi_y\,(l/2) \cdot l/2 && = 0{,}623\,\mathrm{mm}
\end{aligned}
$$

Ersatz-Kolloquium SS2020
3. Beispiel: Stabtheorie – TIMOSHENKO-Gleitung

Angabe:

Gegeben ist eine $3\,\mathrm{m}$ hohe gedrungene Stütze aus Stahl mit konstantem Querschnitt, welche durch eine linear veränderliche Streckenlasten $q(x)$ gemäß nebenstehender Abbildung, beansprucht wird. Für den doppelt-symmetrischen Querschnitt gilt eine Biegesteifigkeit von $EI_y = 100000\,\mathrm{kN/m^2}$, und eine Schubsteifigkeit von $GA/\kappa_z = 493880\,\mathrm{kN}$.

Gesucht ist die TIMOSHENKO-Gleitung $\gamma_{xz}^{TIM}(x)$ an der Stelle $x = l/2$.



Lösung:

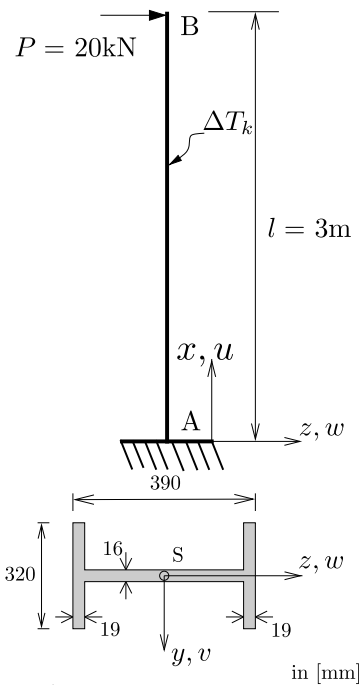
$$\gamma_{xz}^{TIM}(x = l/2) = Q(x = l/2)\,\frac{\kappa}{GA} = 7{,}5\,\mathrm{kN} \cdot (493880\,\mathrm{kN})^{-1} = 1{,}52 \cdot 10^{-5}$$

Ersatz-Kolloquium SS2020
4. Beispiel: Stabtheorie – Temperaturdifferenz und Schubsteifigkeit

Angabe:

Gegeben ist eine $3\,\mathrm{m}$ hohe gedrungene Stütze aus Stahl mit konstantem Querschnitt, welche durch eine Einzelkraft P an der Stelle $x = l$ gemäß nebenstehender Abbildung, beansprucht wird. Für den doppelt-symmetrischen Querschnitt gilt eine Biegesteifigkeit von $EI_y = 100000\,\mathrm{kN/m^2}$, und eine Schubsteifigkeit von $GA/\kappa_z = 493880\,\mathrm{kN}$ sowie ein linearer Temperaturausdehunungskoeffizient von $\alpha_T = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$. Die Biegeordinate am Trägerende kann mit folgender Formel bestimmt werden:

$$w\,(x = l) \quad = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{P\kappa}{GA}l - \frac{\Delta T_k(x)}{h}\alpha_T\frac{l^2}{2}$$



Gesucht: Ermitteln Sie zwei konstante Temperaturdifferenzen ΔT_k, sodass die Biegeordinate am Kragarmende einmal zu Null wird (ΔT_{k1}) und einmal dem zweifachen der Biege- und Schubanteile entspricht (ΔT_{k2}).

Lösung:

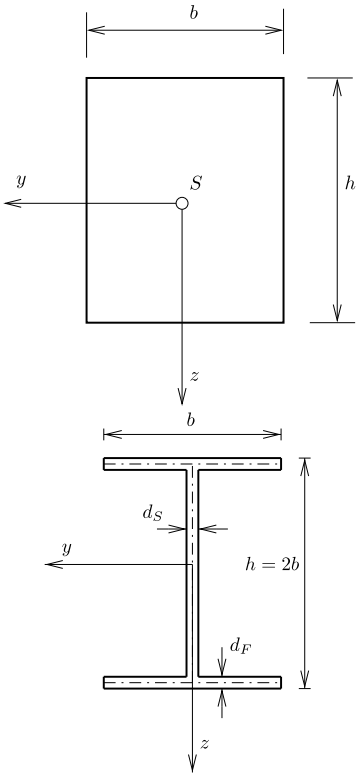
$$w\,(x = l) \;= 0 \qquad = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{P\kappa}{GA}l - \frac{\Delta T_k}{h}\alpha_T\frac{l^2}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta T_{k,1}\,(x = l) \quad = \left(\frac{Pl^3}{3EI} + \frac{P\kappa}{GA}l\right)\frac{2h}{\alpha_T l^2} \;=\; 13{,}88°\mathrm{C}$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta T_{k,2}\,(x = l) \quad = \left(\frac{Pl^3}{3EI} + \frac{P\kappa}{GA}l\right)\frac{-2h}{\alpha_T l^2} \;=\; -13{,}88°\mathrm{C}$$

Ersatz-Kolloquium SS2020
5. Beispiel: Vergleich von Schubbeiwerten

Angabe:



Gegeben sind zwei Querschnitte, ein Rechteckquerschnitt und ein I-Profil, mit demselben Schubmodul G. Die Außenabmessungen der beiden Querschnitte sind dieselben und betragen $b = 10\,\text{cm}$, $h = 2b$ sowie $d_F = d_S = 1\,\text{cm}$, siehe auch nachstehende Abbildung. Der Schubbeiwert für den I-Querschnitt mit den gegebenen Abmessungen beträgt $\kappa_{I-Profil,z} = 2{,}11875$.

Gesucht:

1. Berechnen Sie das Verhältnis

   $x = \frac{\kappa_{I-Profil,z}/GA_{I-Profil}}{\kappa_{Rechteck}/GA_{Rechteck}}$

2. Nehmen Sie nun an dass $d_S \to b$ und beschreiben

   Sie in Worten die Entwicklung des Verhältnisses x.

Lösung:

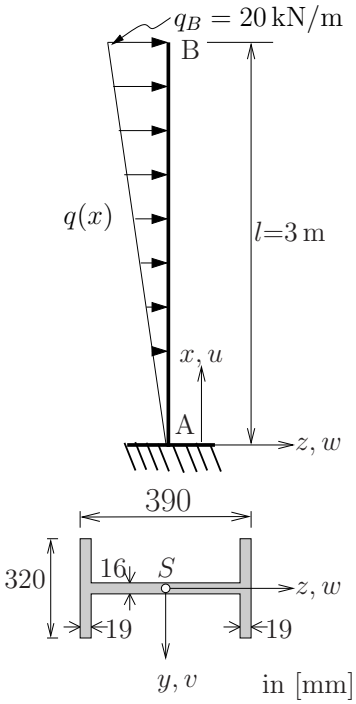
1. $x = \frac{2{,}11875 \cdot 200\,cm^2}{1{,}2 \cdot 38\,cm^2} = 9{,}29$

2. Das Verhältnis x nähert sich 1 an.

Kolloquium SS2019
3. Beispiel: Integration der Differentialbeziehungen

Angabe:

Gegeben ist eine 3 m hohe gedrungene Stütze aus Stahl mit konstantem Querschnitt, welche durch eine linear veränderliche Streckenlast $q(x)$ gemäß nachstehender Abbildung, beansprucht wird. Für den doppelt-symmetrischen Querschnitt gilt eine Biegesteifigkeit von $EI_y = 100000\,\mathrm{kNm^2}$, und eine Schubsteifigkeit von $GA/\kappa_z = 493880\,\mathrm{kN}$.



Gesucht:

a. Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen A und M_A an der Einspannstelle, sowie die Funktionen der Verläufe von Biegemoment $M(x)$ und Timoshenko-Gleitung $\gamma_{xz}^{TIM}(x)$.

b. Bestimmen Sie die Funktionen der Verläufe von Verschiebung $w(x)$ und Querschnittsdrehwinkel $\phi(x)$ durch Integration der Differentialbeziehungen der linearen Stabtheorie für gedrungene Stäbe *ausgehend von der Differentialgleichung 2. Ordnung.*

c. Bestimmen Sie die maximale Verschiebung w_{max} und die Position an der diese auftritt.

Lösung:

a.

$q(x) = q_B \cdot x/l$

Auflagerreaktionen: $A = q_B \frac{l}{2} = 30\,\text{kN} \qquad M_A = -q_B \frac{l^2}{3} = -60\,\text{kNm}$

Momentenlinie: $M(x) = q_B(\frac{l\,x}{2} - \frac{x^3}{6\,l} - \frac{l^2}{3}) = -\frac{20}{18}x^3 + 30x - 60$ [kNm]

Querkraftlinie: $Q(x) = \dfrac{dM(x)}{dx} = q_B(\frac{l}{2} - \frac{x^2}{2\,l}) = -\frac{20}{6}x^2 + 30$ [kN]

Timoshenkogleitung: $\gamma_{xz}^{TIM} = Q(x)\dfrac{\kappa}{GA} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{xz}^{TIM} = \frac{q_B\,\kappa}{GA}(\frac{l}{2} - \frac{x^2}{2\,l}) = \frac{1}{493880}(-\frac{20}{6}x^2 + 30)$ [-]

b.

Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$EI\,\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -M(x) - \frac{q(x)\,\kappa\,EI}{GA} \quad \Leftrightarrow \quad EI\,\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\left[q_B(\tfrac{l\,x}{2} - \tfrac{x^3}{6\,l} - \tfrac{l^2}{3})\right] - \frac{q_B\,x}{l}\frac{\kappa\,EI}{GA}$$

$$\Rightarrow \quad 100000\,\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \tfrac{20}{18}x^3 - 31{,}350x + 60 \quad \text{(Auswertung für [kN] und [m])}$$

Zweimalige Integration der Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} EI\,\frac{dw(x)}{dx} &= -q_B\left(\frac{l\,x^2}{4} - \frac{x^4}{24\,l} - \frac{l^2x}{2}\right) - \frac{q_B\,x^2}{2\,l}\frac{\kappa\,EI}{GA} + C_1 \\ \Rightarrow \quad 100000\,\frac{dw(x)}{dx} &= \frac{20}{72}x^4 - 15{,}675x^2 + 60x + C_1 \quad \text{(Auswertung für [kN] und [m])} \\ EI\,w(x) &= -q_B\left(\frac{l\,x^3}{12} - \frac{x^5}{120\,l} - \frac{l^2x^2}{6}\right) - \frac{q_B\,x^3}{6\,l}\frac{\kappa\,EI}{GA} + C_1x + C_2 \\ \Rightarrow \quad 100000\,w(x) &= \frac{1}{18}x^5 - 5{,}225x^3 + 30x^2 + C_1x + C_2 \quad \text{(Auswertung für [kN] und [m])} \end{aligned}$$

Anpassung der Integrationskonstanten an die Randbedingungen:

$w(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$\phi(x=0) = 0 \Rightarrow dw/dx(0) = Q(x=0)\frac{\kappa}{GA} \Rightarrow C_1 = A\frac{EI\,\kappa}{GA} = \frac{q_B\,l}{2}\frac{EI\,\kappa}{GA} = 6{,}074\,\text{kNm}^2$

Biegelinie:

$$\begin{aligned} w(x) &= -\frac{q_B}{EI}\left(-\frac{x^5}{120\,l} + \frac{l\,x^3}{12} - \frac{l^2x^2}{6}\right) - \frac{q_B\,x^3}{6\,l}\frac{\kappa}{GA} + \frac{q_B\,l}{2}\frac{\kappa}{GA}x \\ &= \frac{1}{100000}\left(\frac{1}{18}x^5 - 5{,}225x^3 + 30x^2 + 6{,}074\,x\right) \end{aligned}$$

Querschnittsdrehwinkel:

$$\phi = -\frac{dw(x)}{dx} + \gamma^{TIM} = \frac{q_B}{EI}\left(-\frac{x^4}{24\,l} + \frac{l\,x^2}{4} - \frac{l^2x}{2}\right) = \frac{1}{100000}\left(-\frac{20}{72}x^4 + 15\,x^2 - 60x\right)$$

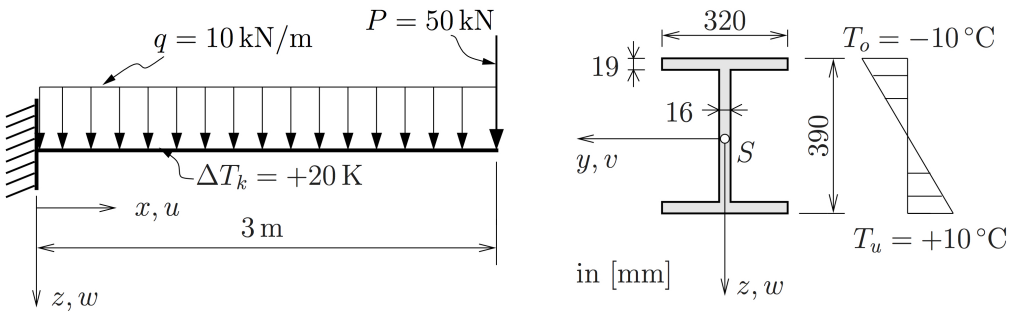
c.

$$w_{max} = w(x=l) = \frac{q_B}{EI}\frac{11\,l^4}{120} + \frac{q_B\,l^2}{3}\frac{\kappa}{GA} = (0{,}001485 + 0{,}000121)\,\text{m} = 0{,}001606\,\text{mm} = 1{,}606\,\text{mm}$$

Kolloquium SS2018
3. Beispiel: Integration der Differentialbeziehungen

Angabe:

Gegeben ist ein 3 m langer gedrungener Träger aus Stahl mit konstantem Querschnitt, welcher durch eine konstante Streckenlast q, eine Einzellast P, und eine eingeprägte über den Querschnitt linear veränderliche Temperatur ΔT_k, gemäß nachstehender Abbildung, beansprucht wird. Für den doppelt-symmetrischen Querschnitt gilt eine Biegesteifigkeit von $EI_y = 100000\,\mathrm{kNm^2}$, und eine Schubsteifigkeit von $GA/\kappa_z = 493880\,\mathrm{kN}$, sowie ein Wärmeausdehnungskoeffizient von $\alpha_T = 13 \cdot 10^{-6}\,1/\mathrm{K}$.



Gesucht:

a. Bestimmen Sie die Funktionen der Verläufe von Durchbiegung $w(x)$, Querschnittsdrehwinkel $\phi(x)$, Biegemoment $M(x)$, sowie Querkraft $Q(x)$ durch Integration der Differentialbeziehungen der linearen Stabtheorie für gedrungene Stäbe *ausgehend von der Differentialgleichung 2. Ordnung*, sowie mit Hilfe von Gleichgewichtsbedingungen.

b. Bestimmen Sie das maximale und das minimale Biegemoment M_{max} bzw. M_{min}, sowie die Positionen, an denen diese Extremwerte auftreten – stellen Sie $M(x)$ maßstäblich dar.

c. Bestimmen Sie die maximale Durchbiegung w_{max} sowie die Position, an der diese auftritt.

d. Bestimmen Sie für den gegebenen Querschnitt den zugehörigen Schubbeiwert κ_z (mit $G = 7930\,\mathrm{kN/cm^2}$), sowie die Timoshenko-Gleitung γ_{xz}^{TIM} an der Einspannstelle.

Lösung:

a.

Auflagerreaktionen: $A_v = q\,l + P = 80\,\text{kN}$ $\qquad M_A = -P\,l - q\,l^2/2 = -195\,\text{kNm}$

Momentenlinie: $M(x) = P(x-l) + \frac{q}{2}\left(2lx - l^2 - x^2\right) = -5x^2 + 80x - 195$ [kNm]

Querkraftlinie: $Q(x) = \dfrac{dM(x)}{dx} = P + q(l-x) = 80 - 10x$ [kN]

Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$EI\,\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\left[P(x-l) + \frac{q}{2}\left(2lx - l^2 - x^2\right)\right] - \frac{EI\,\Delta T_k}{h}\alpha_T - \frac{q\,\kappa\,EI}{GA}$$

$$\Rightarrow \quad 100000\,\frac{d^2w(x)}{dx^2} = +5x^2 - 80x + 126{,}308 \quad \text{(Auswertung für [kN] und [m])}$$

Zweimalige Integration der Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} EI\,\frac{dw(x)}{dx} &= \frac{Px}{2}(2l-x) + \frac{q}{2}x\left(-lx + l^2 + \frac{x^2}{3}\right) - \frac{EI\,\Delta T_k\,\alpha_T}{h}x - \frac{q\,\kappa\,EI}{GA}x + C_1 \\ \Rightarrow \quad 100000\,\frac{dw(x)}{dx} &= 5\frac{x^3}{3} - 80\frac{x^2}{2} + 126{,}308\,x + C_1 \quad \text{(Auswertung für [kN] und [m])} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI\,w(x) &= \frac{Px^2}{6}(3l-x) + \frac{q}{2}x^2\left(-\frac{l}{3}x + \frac{l^2}{2} + \frac{x^2}{12}\right) - \frac{EI\,\Delta T_k\,\alpha_T}{h}\frac{x^2}{2} - \frac{q\,\kappa\,EI}{GA}\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \\ \Rightarrow \quad 100000\,w(x) &= 5\frac{x^4}{12} - 80\frac{x^3}{6} + 126{,}308\,\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \quad \text{(Auswertung für [kN] und [m])} \end{aligned}$$

Anpassung der Integrationskonstanten an die Randbedingungen:

$w(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$\phi(x=0) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{A_v\,EI\,\kappa}{GA} = \frac{(ql+P)\,EI\,\kappa}{GA} = 16{,}1983\,\text{kNm}^2$

Biegelinie:

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{Px^2}{6EI}(3l-x) + \frac{q}{2EI}x^2\left(-\frac{l}{3}x + \frac{l^2}{2} + \frac{x^2}{12}\right) - \frac{\Delta T_k\,\alpha_T}{h}\frac{x^2}{2} - \frac{q\,\kappa}{GA}\frac{x^2}{2} + \frac{(ql+P)\,\kappa}{GA}x \\ &= \frac{1}{100000}\left(5\frac{x^4}{12} - 80\frac{x^3}{6} + 126{,}308\,\frac{x^2}{2} + 16{,}1983x\right) \end{aligned}$$

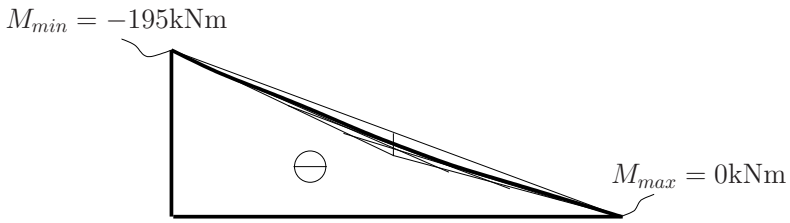
Querschnittsdrehwinkel:

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{dw(x)}{dx} + Q(x)\frac{\kappa}{GA} = -\frac{Px}{2EI}(2l-x) - \frac{qx}{2EI}\left(-lx + l^2 + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{\Delta T_k\,\alpha_T}{h}x \\ &= \frac{1}{100000}\left(-5\frac{x^3}{3} + 80\frac{x^2}{2} - 128{,}333x\right) \end{aligned}$$

b.

$M_{max} = M(x=l) = 0$

$M_{min} = M(x=0) = -195\,\text{kNm}$



c.

$$w_{max} = w(x=l) = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{ql^4}{8EI} - \frac{\Delta T_k\,\alpha_T}{h}\frac{l^2}{2} - \frac{q\,\kappa}{GA}\frac{l^2}{2} + \frac{Pl\,\kappa}{GA} + \frac{ql^2\kappa}{GA} = 0{,}00291\,\text{m} = 2{,}91\,\text{mm}$$

d.

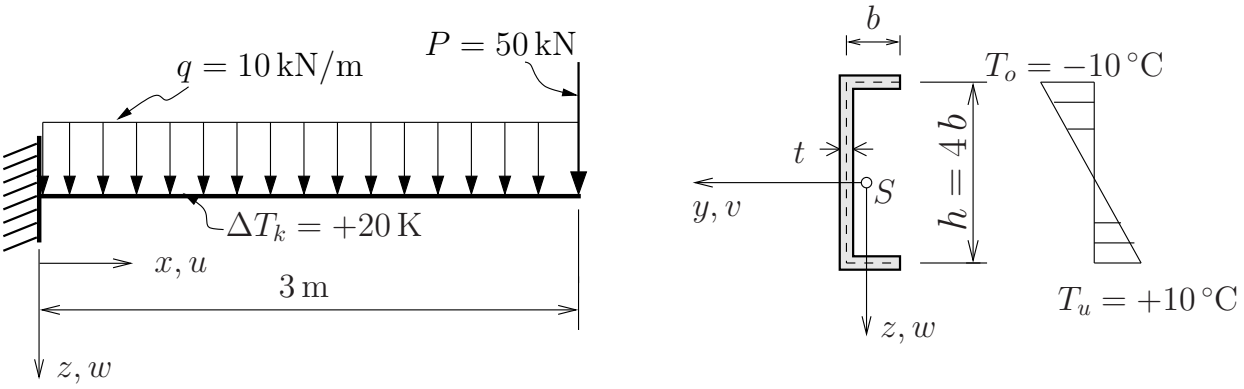
$$\frac{GA}{\kappa} = 493880\,\text{kN} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{GA}{493880} = \frac{7930 \cdot 180{,}96}{493880} = 2{,}9056$$

$$\gamma_{xz}^{TIM}(x=0) = Q(x=0)\frac{\kappa_z}{GA} = \frac{80}{493880} = 1{,}62 \cdot 10^{-4}$$

Ersatzkolloquium SS2018
3. Beispiel: Ermittlung von Schubbeiwerten

Angabe:

Gegeben ist ein $3\,\mathrm{m}$ langer gedrungener Träger aus Stahl mit konstantem Querschnitt, welcher durch eine konstante Streckenlast q, eine Einzellast P, und eine eingeprägte über den Querschnitt linear veränderliche Temperatur ΔT_k, gemäß nachstehender Abbildung, beansprucht wird. Für den einfach-symmetrischen dünnwandigen U-Querschnitt, mit Breite $b = 100\,\mathrm{mm}$, Höhe $h = 400\,\mathrm{mm}$, und Dicke $d = 10\,\mathrm{mm}$, gilt ein Elastizitätsmodul von $E = 2{,}10 \cdot 10^8\,\mathrm{kN/m^2}$, und ein Schubmodul von $G = 7{,}93 \cdot 10^7\,\mathrm{kN/m^2}$, sowie ein Wärmeausdehnungskoeffizient von $\alpha_T = 13 \cdot 10^{-6}\,1/\mathrm{K}$.



Gesucht:

a. Bestimmen Sie den Schubbweiwert κ_z des gegebenen dünnwandigen Querschnitts, für eine zugehörige Querkraft Q_z.

   Hinweis: Zur Vereinfachung dürfen die Eigenträgheitsmomente der Flansche vernachlässigt werden, und alle Berechnungen auf die Profilmittellinien bezogen werden.

b. Bestimmen Sie die Funktion der Timoshenko-Gleitung $\gamma_{xz}^{TIM}(x)$, unter Verwendung des in Punkt a berechneten Schubbeiwerts.

Lösung:

a.

$A = 2\,b\,d + (4\,b)\,d = 6\,b\,d \qquad I_y = \dfrac{d\,(4\,b)^3}{12} + 2\,b\,d\,(2b)^2 = \dfrac{40}{3}\,d\,b^3$

Statische Momente $S_y(s_1)$ und $S_y^{①}$ im Flansch:

$S_y(s_1) = \int_{s_1} z(s_1)\,d(s_1)\,\mathrm{d}s_1 = 2\,s_1\,d\,b \qquad S_y^{①} = b\,d\,2b = 2\,d\,b^2$

Statische Moment $S_y(s_2)$ im Steg:

$$\begin{aligned} S_y(s_2) &= S_y^{①} + \Delta S_y(① \to s_2) \\ &= 2\,d\,b^2 + \int\limits_{s_2} z(s_2)\,d(s_2)\,\mathrm{d}s_2 = 2\,d\,b^2 + d\int\limits_{s_2}(2\,b - s_2)\,\mathrm{d}s_2 \\ &= 2\,d\,b^2 + d\left(2\,s_2\,b - \frac{s_2^2}{2}\right) = d\left(2\,b^2 + 2\,s_2\,b - \frac{s_2^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Schubbeiwert unter Ausnützung der Symmetrien:

$$\begin{aligned} \kappa_z &= 2\cdot\frac{A}{I_y^2}\left[\int\limits_0^b \frac{S_y(s_1)^2}{d}\,\mathrm{d}s_1 + \int\limits_0^{2b}\frac{S_y(s_2)^2}{d}\,\mathrm{d}s_2\right] \\ &= 2\cdot\frac{6\,b\,d}{\left(\frac{40}{3}\,d\,b^3\right)^2}\frac{1}{d}\left[\int\limits_0^b (2\,s_1\,b\,d)^2\,\mathrm{d}s_1 + \int\limits_0^{2b} d^2\left(2\,b^2 + 2\,s_2\,b - \frac{s_2^2}{2}\right)^2\mathrm{d}s_2\right], \end{aligned}$$

Vereinfachung:

$$\kappa_z = \frac{27}{400\,d^2\,b^5}\left[\int\limits_0^b 4\,b^2\,d^2\,s_1^2\,\mathrm{d}s_1 + \int\limits_0^{2b} d^2\left(4\,b^4 + \frac{s_2^4}{4} + 2\,s_2^2 b^2 + 8\,b^3\,s_2 - 2\,s_2^3\,b\right)\mathrm{d}s_2\right].$$

Integration und Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \kappa_z &= \frac{27}{400\,d^2\,b^5}\left[4\,b^2\,d^2\,\frac{s_1^3}{3}\Big|_0^b + d^2\left(4\,b^4\,s_2 + \frac{s_2^5}{20} + 2\,\frac{s_2^3}{3}b^2 + 8\,b^3\,\frac{s_2^2}{2} - 2\frac{s_2^4}{4}\,b\right)\Big|_0^{2b}\right] \\ &= \frac{27}{400\,d^2\,b^5}\left[\frac{4\,b^5\,d^2}{3} + d^2\left(8\,b^5 + 8\frac{b^5}{5} + 16\,\frac{b^5}{3} + 16\,b^5 - 8\,b^5\right)\right] \\ &= \frac{27}{400}\left[\frac{4}{3} + \left(8 + \frac{8}{5} + \frac{16}{3} + 16 - 8\right)\right] \\ &= \frac{27}{400}\left[\frac{4}{3} + \frac{344}{15}\right] = \frac{27}{400}\cdot\frac{364}{15} \\ &= \frac{819}{500} = 1{,}638\,. \end{aligned}$$

b.

$\gamma_{xz}^{TIM}(x) = Q_z(x)\dfrac{\kappa_z}{GA}$ mit $Q_z(x) = q(l-x) + P = 80 - 10x$, und $A = 6bd = 60\,\mathrm{cm}^2$

$\Rightarrow \gamma_{xz}^{TIM}(x) = (80 - 10x)\dfrac{1{,}638}{(7{,}93\cdot 10^7)\cdot(60\cdot 10^{-4})} = 2{,}754\cdot 10^{-4} - 3{,}443\cdot 10^{-5}\cdot x$