Mathematik für Ingenieure (Maschinenbau und Sicherheitstechnik)

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1 (Regularität von ebenen Kurven)

(a) Ein Planet startet im Punkt $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ und bewegt sich auf der ellipsoiden Umlaufbahn um eine Sonne, die durch die Gleichung $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ beschrieben wird. Parametrisieren Sie die Umlaufbahn mit Hilfe von

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(t)\cos(t) \\ r_2(t)\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wie sehen $r_1(t)$ und $r_2(t)$ aus? Wie muss man t wählen, wenn der Planet die Sonne ein halbes Mal im Uhrzeigersinn, einmal gegen den Uhrzeigersinn, zweimal im Uhrzeigersinn und dreimal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft?

(b) Ein Teilchen bewegt sich gemäß der Kurve $\alpha(t) = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} t^2+1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}$ für $t > 0$. Skizzieren Sie den Verlauf des Teilchens in der Ebene und weisen Sie nach, dass die Kurve der Gleichung $x^2 - y^2 = 4$ genügt. Ist die Kurve regulär?

(c) Ein Rad rollt auf einer Geraden. Parametrisiert man den Verlauf des Punktes P auf dem Rand des Rades mit Radius $a > 0$, so erhält man die *Zykloide*

$$\alpha(t) = a\begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Überprüfen Sie sie auf Regularität.

Lösungen zu Aufgabe 1)

(a) Wir setzen das vorgegebene $\alpha(t)$ in die Gleichung $(x/a)^2 + (x/b)^2 = 1$ ein. Wählen wir $r_1(t) = a$ und $r_2(t) = b$, dann erfüllt α die vorgegebene Gleichung $(x/a)^2 + (x/b)^2 = 1$. Für $t \in [0, 2\pi]$ entspricht die Kurve einer einfachen ellipsoiden Umlaufbahn um den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn.

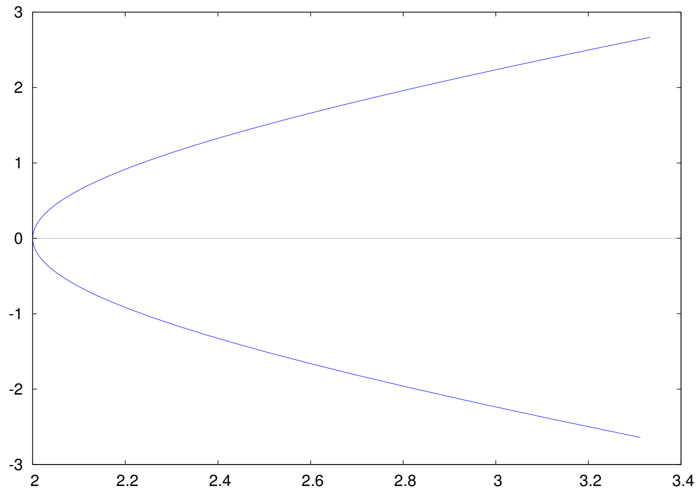
Die Parametrisierung $\gamma_1(t) := \alpha(t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ gibt eine einfache Umlaufbahn gegen Uhrzeigersinn.

Die Parametrisierung $\gamma_{-1/2}(t) := \alpha(-t) = \begin{pmatrix} a\cos(-t) \\ b\sin(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ -b\sin(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, \pi]$ gibt eine halbe Umlaufbahn im Uhrzeigersinn, oder $\gamma^*_{-1/2}(t) = \alpha(-t/2)$, wobei diesmal $t \in [0, 2\pi]$ ist.

Zweimal im Uhrzeigersinn wird durch $\gamma_{-2}(t) = \alpha(-t) = \begin{pmatrix} a\cos(-t) \\ -b\sin(-t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 4\pi]$ realisiert, oder durch $\gamma^*_{-2}(t) = \alpha(-2t)$, wobei diesmal $t \in [0, 2\pi]$ ist.

Dreimal gegen den Uhrzeigersinn verläuft die Kurve $\gamma_3(t) = \alpha(t)$ mit $t \in [0, 6\pi]$, oder wir wählen $\gamma^*_3(t) = \alpha(3t) = \begin{pmatrix} a\cos(3t) \\ b\sin(3t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Das Teilchen bewegt sich auf der Bahn, deren Spur wie folgt aussieht:



Es sind $x(t) = t + \frac{1}{t}$ und $y(t) = t - \frac{1}{t}$. Somit haben wir

$$x^2 - y^2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = 4 \cdot t \cdot \frac{1}{t} = 4.$$

Ferner sind die Ableitungen:

$$x'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2} \quad \text{und} \quad y'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2+1}{t^2}$$

Zwar verschwindet $x'(t)$ offensichtlich für $t = \pm 1$, allerdings ist $y'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Daher ist die Kurve für jedes $t \in \mathbb{R}$ regulär.

(c) Es ist

$$\alpha'(t) = a \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Die erste Komponente verschwindet genau dann, wenn $t = 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ ist. Für diese t verschwindet auch die zweite. Somit ist die Kurve für diese t nicht regulär, sonst regulär.

Aufgabe 2 (Fläche & Bogenlänge)

(a) Sei eine Kurve $\alpha(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$ in Polarkoordinaten gegeben. Zeigen Sie, dass für den Inhalt F_α der von α umrandeten Fläche gilt:

$$F_\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(t)\, dt$$

(b) Das kartesische Blatt α sei durch die Parametrisierung

$$\alpha(t) = \frac{3 \cos t \sin t}{\cos^3 t + \sin^3 t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2]$$

gegeben. Welche Fläche schließt diese *Schleife* ein?

(c) Sei $\alpha(t) = e^{bt} \begin{pmatrix} \cos(at) \\ \sin(at) \end{pmatrix}$ eine logarithmische Spirale (mit $a, b > 0$). Berechnen Sie die Bogenlänge der logarithmischen Spirale für $t \in [0, c]$ mit $c > 0$.

Lösungen zu Aufgabe 2)

(a) Seien $\vec{e}(t) := \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\perp(t) := \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$. Dann ist

$$\alpha'(t) = r'(t)\vec{e}_t + r(t)\vec{e}_\perp(t) = \begin{pmatrix}r'(t)\cos(t) - r(t)\sin(t)\\ r'(t)\sin(t) + r(t)\cos(t)\end{pmatrix}.$$

Für die Determinante $\det(\alpha,\alpha')(t)$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\det(\alpha,\alpha')(t) &= r(t)\cos(t)\big[r'(t)\sin(t) + r(t)\cos(t)\big] - r(t)\sin(t)\big[r'(t)\cos(t) - r(t)\sin(t)\big]\\ &= r(t)r'(t)\sin(t)\cos(t) + r^2(t)\cos^2(t) - r(t)r'(t)\sin(t)\cos(t) + r^2(t)\sin^2(t)\\ &= r^2(t)\underbrace{\big[\cos^2(t) + \sin^2(t)\big]}_{=1} = r^2(t)\end{aligned}$$

Da $r^2(t) \geq 0$ ist, haben wir schließlich

$$F_\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\det(\alpha)(t),\alpha'(t))|dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(t)\ dt.$$

(b) Es folgt für die gesuchte Fläche:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r(t)^2 dt = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t\sin^2 t}{(\cos^3 t + \sin^3 t)^2}dt\\ &= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t\sin^2 t}{\cos^6(t)(1+\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t})^2}dt\\ &= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{\cos^4(t)(1+\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t})^2}dt\\ &= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{\cos^2(t)(1+\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t})^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt\\ &= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2 t}{(1+\tan^3 t)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt\\ &\overset{x=\tan(t)}{=} \frac{9}{2}\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx = \frac{3}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+u)^2}du\\ &= \frac{3}{2}\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{1+u}\right]_0^R = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

(c) Es ist $\alpha'(t) = e^{bt}\begin{pmatrix}b\cos(at) - a\sin(at)\\ b\sin(at) + a\cos(at)\end{pmatrix}$ und somit

$$\begin{aligned}L_\alpha &= \int_0^c e^{bt}\sqrt{(b\cos(t) - \sin(at))^2 + (b\sin(t) + \cos(at))^2}\ dt\\ &= \int_0^c e^{bt}\sqrt{a^2+b^2}\ dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}(e^{bc} - 1).\end{aligned}$$

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben können Sie wöchentlich bei Ihrem Tutor/Ihrer Tutorin zur Kontrolle abgeben.

Aufgabe 1 (Mehr zu ebenen Kurven)

(a) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der Kurve, die durch die nachstehenden Gleichung $xy = 4$ definiert ist. Bestimmen Sie außerdem die Tangente und die Normale.

(b*) Leiten Sie die Kurve in Präsenzaufgabe 1c) her. Nehmen Sie an, die x-Achse sei die Gerade, und t der Winkel, um den sich das Rad mit Mittelpunkt M und Radius a auf der x-Achse in positiver Richtung dreht.

(c) Man fixiere zwei Zahlen $a, b > 0$. Im $\mathbb{R}^2$ sei G die Gerade senkrecht auf der x-Achse durch $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ein Punkt auf G. Sei dann g diejenige Gerade, die durch den Ursprung und B verläuft. Auf der Geraden g befinden sich zwei Punkte P_1 und P_2, die zu B den Abstand b haben. Läuft nun B auf G entlang, beschreiben P_1 und P_2 die "Äste" einer Kurve, die als *Konchoide des Nikomedes* oder *Muschelkurve* bezeichnet wird.

(i) Skizzieren Sie die oben erwähnten Kurven für die Fälle $a > b$, $a = b$ und $a < b$.

(ii) Die Konchoide wird durch die beiden nachstehenden Kurven beschrieben.

$$\alpha_1(t) := \begin{pmatrix} a + b\cos(t) \\ a\tan(t) + b\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha_2(t) := \begin{pmatrix} a - b\cos(t) \\ a\tan(t) - b\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie die beiden Kurven auf Regularität.

(d) Eine Leiter der Länge $a > 0$ stehe senkrecht an einer Wand und rutsche langsam ab. Die Leiter werde im Punkt $\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in zwei Abschnitte der Länge c bzw. d zerteilt. Sei t der Winkel zwischen Leiter und Boden (zur Wand hin zeigend).

(i) Drücken Sie dann a in Abhängigkeit von x, y und t aus, indem Sie die Sinus- und Kosinussätze benutzen.

(ii) ie *Astroide (Sternkurve)* sei gegeben durch die Parametrisierung $\alpha(t) = \begin{pmatrix} a\cos^3(t) \\ a\sin^3(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Weisen Sie nach, dass $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ der Formel aus (i) genügt. Wo ist sie regulär? Wie lauten die Tangente und Normale an α?

Lösungen zu Aufgabe 1)

(a) Im Folgenden sind $\dot{x}(t) = x'(t)$ und $\dot{y}(t) = y'(t)$. Wir schreiben $x(t) = r(t)\cos t,\ y(t) = r(t)\sin t$ und setzen es in die Gleichung ein. In Polarkoordinaten ist der Tangentialvektor gleich

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \dot{r}(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + r(t) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

und der dazugehörige Normalenvektor

$$n(t) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Tangente und die Normale sind daher

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \mathbb{R}n(t).$$

Im Folgenden geben wir daher nur die Tangentialvektoren an. Die Tangente und Normale ergibt sich dann einfach aus den obigen Formeln.

Die gesuchte Darstellung ist

$$r(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin(2t)}}, \qquad t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}),$$

denn

$$4 = xy = r^2(t)\cos(t)\sin(t) = r^2(t)\frac{\sin(2t)}{2}.$$

Die Tangentialrichtung ist dann

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\sin^3(2t)}} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

$$\text{also} \quad T_{\alpha,t} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin(2t)}} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

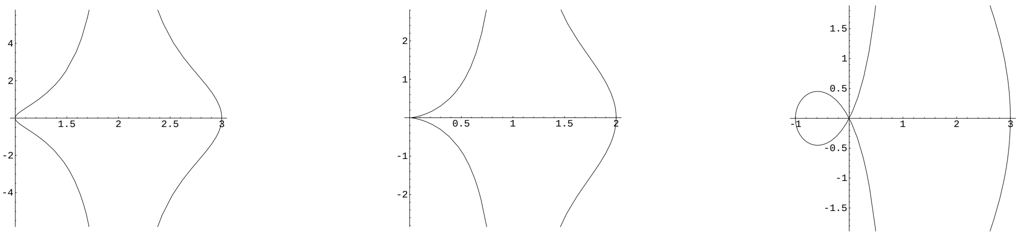
$$\text{und} \quad N_{\alpha,t} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin(2t)}} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

(b) Die x-Achse sei die Gerade, und t der Winkel, um den sich das Rad mit Mittelpunkt M und Radius a auf der x-Achse in positiver Richtung gedreht hat. Dabei legt das Rad einen Weg der Länge at zurück. Das ist genau die Bogenlänge des Kreisabschnitts mit Winkel $t \geq 0$ und Radius a. Somit ist der Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix}$. Der Punkt P startet auf der x-Achse und bewegt sich gegen den Uhrzeigersinn auf dem Rand des Rades gemäß den Koordinaten

$$a \begin{pmatrix} \cos(3\pi/2 - t) \\ \sin(3\pi/2 - t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

Somit ist $\alpha(t) = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$.

(c) Hier die Kurven für $a > b$, $a = b$ und $a < b$.



Es sind

$$\alpha_1'(t) := \begin{pmatrix} -b\sin(t) \\ a/\cos^2(t) + b\cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha_2'(t) := \begin{pmatrix} b\sin(t) \\ a/\cos^2(t) - b\cos(t) \end{pmatrix}$$

Soll die erste Komponente von $\alpha_1'(t)$ verschwinden, so muss $t = \pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$ gelten; genauso bei $\alpha_2'(t)$.

Für die zweite Komponente von $\alpha_1'(t)$ bedeutet dies die Bedingung $a \pm b = 0$, falls $\alpha_1'(t)$ verschwinden soll. Da $a, b > 0$, kommt also nur die Bedingung $a = b$ in Frage. Für $a \neq b$ ist α_1 überall regulär. Für $a = b$ ist α_1 singulär für $t = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ ungerade, sonst überall regulär.

Analog zu den vorherigen Überlegungen folgert man, dass α_2 überall regulär ist, falls $a \neq b$. Für $a = b$ ist α_2 singulär für $t = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ gerade, sonst überall regulär.

(d) (i) Die Leiter lehne an der y-Achse und rutsche entlang der x-Achse in positiver Richtung ab. Der Parameter t sei nun der Winkel zwischen x-Achse und Leiter. Es ist $a = c + d$. Mit den Kosinus- und Sinussätzen gilt nun

$$c = \frac{x}{\cos(t)} \quad \text{und} \quad d = \frac{y}{\sin(t)}.$$

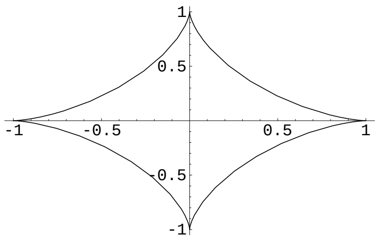
Das ergibt

$$a = \frac{x}{\cos(t)} + \frac{y}{\sin(t)}.$$

(ii) Da $x = a\cos^3(t)$ und $y = a\sin^3(t)$ sind, folgt

$$c + d = \frac{x}{\cos(t)} + \frac{y}{\sin(t)} = a\cos^2(t) + a\sin^2(t) = a.$$

Beobachtet man also die Leiter, wie sie auf der x-Achse rutscht, wird ihr Verlauf von dem rechten oberen Teil einer Astroide umhüllt. Sie hat folgende Gestalt:



Es gilt

$$\alpha'(t) = 3a\sin t\,\cos t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \frac{3a}{2}\sin(2t) \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Die Kurve ist also bei $0, \frac{\pi}{2}, \pi$, $\frac{3\pi}{2}$ und 2π nicht regulär, an allen anderen Stellen auf $[0, 2\pi]$ besteht Regularität.

Die Tangente ist dann

$$T_\alpha(t) = \alpha(t) + \mathbb{R}\alpha'(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix} + \mathbb{R}\sin t\,\cos t \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Die Normale lautet

$$N_\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix} + \mathbb{R}\sin t\,\cos t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

da $\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ senkrecht liegt.

Aufgabe 2 (Fläche & Bogenlänge)

(a) Wie ist der Inhalt der von $\alpha(t) = \cos(2t)\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, umschlossenen Fläche?

(b) Welche Fläche umschließt die Astroide α, die durch die Parametrisierung $\alpha(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ für $t \in [0, 2\pi]$ gegeben ist? Wie ist die Bogenlänge?

(c) Sei eine Kurve $\alpha(t) = r(t)\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$ in Polarkoordinaten gegeben. Zeigen Sie, dass für die Bogenlänge L_α von α gilt:

$$L_\alpha = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(t) + (r')^2(t)}\; dt$$

Lösungen zu Aufgabe 2)

(a) Es ist $r^2(t) = \cos^2(2t)$. Dann ist die gesuchte Fläche

$$F_\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(2t)\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{4\pi} \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{16}\left[\sin(2x) + 2x\right]_{x=0}^{4\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Wir berechnen zunächst

$$\dot\alpha(t) = \left(-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t)\right).$$

Dann bestimmen wir noch

$$\begin{aligned}
\det(\alpha(t),\dot\alpha(t)) &= \det\begin{pmatrix} \cos^3(t) & \sin^3(t) \\ -3\cos^2(t)\sin(t) & 3\sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix} \\
&= 3\sin^2(t)\cos^4(t) - (-3\cos^2(t)\sin^4(t)) \\
&= 3\sin^2(t)\cos^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t)) \\
&= \frac{3}{4}\sin^2(2t),
\end{aligned}$$

da $2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$ und $\cos^2(t)+\sin^2(t) = 1$.

Der Flächeninhalt ist dann:

$$\begin{aligned}
F_\alpha &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big|\det(\alpha(t),\dot\alpha(t))\Big| dt \\
&= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)dt = \frac{3}{8}\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(4t)}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{8}
\end{aligned}$$

Die Bogenlänge ist nun:

$$\begin{aligned}
L_\alpha = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_2'(t))^2}\ dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin(2t)|\ dt = \frac{3}{4}\int_0^{4\pi} |\sin(t)|\ dt \\
= 3\int_0^{\pi} \sin(t)\ dt = 6
\end{aligned}$$

(c) Seien $\vec{e}(t) := \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\perp(t) := \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$. Dann ist

$$\alpha'(t) = r'(t)\vec{e}_t + r(t)\vec{e}_\perp(t) = \begin{pmatrix} r'(t)\cos(t) - r(t)\sin(t) \\ r'(t)\sin(t) + r(t)\cos(t)\end{pmatrix}.$$

Wir müssen für die Bogenlänge die Länge des Vektors $\|\alpha'(t)\|$ ausrechnen. Es ist

$$\begin{aligned}
\|\alpha'(t)\|^2 = (r'(t)\cos(t) - r(t)\sin(t))^2 + (r'(t)\sin(t) + r(t)\cos(t))^2 \\
= (r')^2(t)\cos^2(t) + r^2(t)\sin^2(t) + (r')^2(t)\sin^2(t) + r^2(t)\cos^2(t) \\
= (r')^2(t) + r(t).
\end{aligned}$$

Also ist $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(r')^2(t) + r(t)}$.

Test: (Dauer: 12 min)

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für diejenige Kurve an, die durch $(x-2)^2 + y^2 = 3$ beschrieben wird. Benutzen Sie Polarkoordinaten. Zeichnen Sie die Kurve.

(b) Sei $\alpha(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$, wobei $t \in [0,1]$, $x(t) = t(1-t)^2$ und $y(t) = t^2x(t)$ ist. Wo ist α regulär?

Lösungen

(a) Wir wählen $\alpha(t) = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\cos(t) + 2\\ \sqrt{3}\sin(t)\end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Die Kurve ist dann ein Kreis mit Radius $\sqrt{3}$ mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$.

(b) Mit der Produktregel rechnet man leicht nach:

$$\alpha'(t) = (1-t)\big(1-3t\ ,\ t^2(3-5t)\big).$$

α ist genau dann regulär in t, wenn $\alpha'(t) \neq 0$ ist. Dies gilt für alle $t \neq 1$. Denn die erste Komponente verschwindet genau dann, wenn $t = 1/3$ ist. Für dieses t verschwindet die zweite aber nicht. Die zweite ist nämlich genau dann Null, falls $t = 0$ oder $t = 3/5$ ist. Dann ist aber wiederum die erste nicht Null. Damit bleibt nur, dass $\alpha(t) = 0$ ist, falls der Koeffizient $1 - t = 0$ ist.