Präsenzaufgaben

Hinweis: Einige Teilnehmer des Auffrischungskurses haben erhofft, dass dort wie im letzten Semester einige Inhalte der Vorlesung durch einfache Beispiele erklärt werden. Das wurde im Tutorium bereits gemacht, allerdings empfanden einige die Aufgaben als zu schwierig. Zukünftig werden wir dort wieder einfachere Beispiele zum Verständnis des Vorlesungsinhalts behandeln. Der Auffrischungskurs dient weiterhin zum Einüben der Grundlagen des mathematischen Rechnens. Er ist ein Service der Mathe-Werkstatt und größtenteils unabhängig von der Vorlesung. Das Tutorium findet wieder am 21.06. statt.

Aufgabe 1 (Totale Differenzierbarkeit)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt p partiell differenzierbar.

(a) Wie ist die Linearisierte von f in p definiert? Schreiben Sie sie mit Hilfe des Gradienten und des Skalarprodukts. Wie sieht die Linearisierte für den Fall $n = 1$ aus?

(b) Wann nennen wir eine Funktion total differenzierbar in p? Zeigen Sie, dass im Falle $n = 1$ diese Definition äquivalent zur üblichen Definition der Differenzierbarkeit in p ist.

Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben.

(c) Bestimmen Sie die Linearisierte $L_{f,(0,0)}$ von f im Ursprung.

(d) Zeigen Sie, dass f im Ursprung total differenzierbar ist.

Lösungen zu Aufgabe 1)

(a) Die Linearisierte von f in $p = (p_1, \dots, p_n)$ ist die Funktion:

$$L_{f,p}(x) = f(p) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(p)(x_k - p_k) = f(p) + \langle \nabla f(p), x - p \rangle$$

Im Fall $n = 1$ ist das genau die Tangente von f an der Stelle p:

$$L_{f,p}(x) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) = f(p) + f'(p)(x - p),$$

da $x_1 = x$, $p = p_1$ und $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f'$.

(b) Eine in p partiell differenzierbare Funktion f nennen wir total differenzierbar in p, falls gilt:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - L_{f,p}(x)}{\|x-p\|} = 0$$

Für $n = 1$ lautet diese Bedingung dank Teil (a):

$$0 = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - f'(p)(x-p)}{|x-p|} = \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{|x-p|} - f'(p) \frac{x-p}{|x-p|} \right)$$

$$= \lim_{x \to p} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} - f'(p) \frac{x-p}{x-p}, & x > p \\ & \\ -\frac{f(x)-f(p)}{x-p} + f'(p) \frac{x-p}{x-p}, & x < p \end{array} \right\} = \lim_{x \to p} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} - f'(p), & x > p \\ & \\ -\frac{f(x)-f(p)}{x-p} + f'(p), & x < p \end{array} \right\}$$

In beiden Fällen haben wir demnach:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p)$$

Und das ist genau die übliche Definition der Differenzierbarkeit für $n = 1$ aus dem letzten Semester.

(c) Es sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Damit ist $L_{f,p}(x,y) = f(0,0) = 0$ die konstante Nullfunktion.

(d) Dank Teil (c) müssen wir nur noch prüfen, ob der folgende Grenzwert verschwindet:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - L_{f,p}(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4 y^3}{x^2 + y^2},$$

da $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wir wissen, dass $x^2 \leq x^2 + y^2$ bzw. $y^2 \leq x^2 + y^2$. Dann können wir diese Terme im Betrag wie folgt abschätzen:

$$\frac{x^4 |y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^4 |y|^3}{x^2} = x^2 |y|^3,$$

falls $x \neq 0$ oder

$$\frac{x^4 |y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^4 |y|^3}{y^2} = x^4 |y|,$$

falls $y \neq 0$. Da in beiden Fällen der rechte Term verschwindet für $(x,y) \to (0,0)$, ist insgesamt

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4 y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Daher ist f an der Stelle $(0,0)$ total differenzierbar.

Aufgabe 2 (Kettenregel)

(a) Seien $g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ und $f(u,v) = \begin{pmatrix} ve^u \\ ue^v \\ uve^{u-v} \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie $(g \circ f)_u$ und $(g \circ f)_v$ an der Stelle $(1,0)$.

(b) Seien $g(x_1, x_2) = 1/(x_1^2 - x_2^2)$ und $f(r,t) = (r\cos(t), r\sin(t))$. Berechnen Sie $g \circ f$ sowie die Jacobi-Matrizen von g, f und $g \circ f$ (letzteres mit und ohne Hilfe der Kettenregel).

Lösungen zu Aufgabe 2)

(a) Zunächst berechnen wir :

$$\mathscr{J}_g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Außerdem sind $f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathscr{J}_g(f(1,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $f_u(u,v) = \begin{pmatrix} ve^u \\ e^v \\ (v+uv)e^{u-v} \end{pmatrix}$, $f_v(u,v) = \begin{pmatrix} e^u \\ ue^v \\ (u-uv)e^{u-v} \end{pmatrix}$, $f_u(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_v(1,0) = \begin{pmatrix} e \\ 1 \\ e \end{pmatrix}$. Daher sind

$$(g \circ f)_u(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$(g \circ f)_v(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ 1 \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2e-1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist $(g \circ f)(r,t) = \dfrac{1}{r^2(\cos^2(t) - \sin^2(t))} = \dfrac{1}{r^2\cos(2t)}$. Die entsprechenden Jacobi-Matrizen sind

$$\mathscr{J}_g(\vec{x}) = \Big(- \frac{2x_1}{(x_1^2 - x_2^2)^2}, \frac{2x_2}{(x_1^2 - x_2^2)^2} \Big) = \frac{2}{(x_1^2 - x_2^2)^2}\big(- x_1, x_2\big) = 2g^2(\vec{x})\big(- x_1, x_2\big),$$

$$\mathscr{J}_f(r,t) = \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix}.$$

Mit $\vec{x} = f(r,t)$ ist ferner

$$\mathscr{J}_g(f(r,t)) = 2 \cdot g^2(f(r,t)) \cdot \big(- r\cos(t), r\sin(t)\big) = 2 \cdot (g \circ f)^2(r,t) \cdot \big(- r\cos(t), r\sin(t)\big)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{r^4\cos^2(2t)} \cdot \big(- r\cos(t), r\sin(t)\big) = \frac{2}{r^3\cos^2(2t)} \cdot \big(- \cos(t), \sin(t)\big)$$

Mit der Kettenregel ist

$$\mathscr{J}_{g\circ f}(r,t) = \mathscr{J}_g(f(r,t)) \cdot \mathscr{J}_f(r,t) = \frac{2}{r^3\cos^2(2t)} \cdot \big(- \cos(t), \sin(t)\big) \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{r^3\cos^2(2t)}(\sin^2(t) - \cos^2(t),\ 2r\sin(t)\cos(t)) = \frac{2}{r^3\cos^2(2t)}\big(- \cos(2t), r\sin(2t)\big)$$

$$= \Big(- \frac{2}{r^3\cos(2t)}, \frac{2\tan(2t)}{r^2} \Big)$$

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben können Sie wöchentlich bei Ihrem Tutor/Ihrer Tutorin zur Kontrolle abgeben.

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie die Linearisierte $L_{f,p}$ der Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$ in einem beliebigen Punkt $p = (a,b)$. Berechnen Sie

$$\lim_{(x,y)\to p} \frac{f(x,y) - L_{f,p}(x,y)}{\|(x,y) - p\|}.$$

Ist f total differenzierbar in p?

(b) Bestimmen Sie jeweils die Jacobi-Matrix der nachstehenden Funktionen.

$$\text{(i)} \quad g(\vec{x}) = x_1 x_2 \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad h(\vec{x}) = \frac{1}{1 + x_1 + x_2 + x_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(c) Betrachten Sie für $n \in \mathbb{Z}$ die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^n y^n}{\sqrt{x^2+y^2}} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Für welche $n \in \mathbb{Z}$ ist sie total differenzierbar im Ursprung?

(d) Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2/y^2$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$ im Ursprung differenzierbar?

Lösungen zu Aufgabe 1)

(a) Es sind $f_x(x,y) = 2x$ und $f_y(x,y) = -2y$. Dann ist die Linearisierte gleich

$$L_{f,p}(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(y-b) = a^2 - b^2 + 2a(x-a) - 2b(y-b)$$
$$= a^2 - b^2 + 2ax - 2a^2 - 2by + 2b^2 = -a^2 + 2ax + b^2 - 2ay$$

Der Quotient ist dann im Betrag:

$$\frac{|f(x,y) - L_{f,p}(x,y)|}{\|(x,y) - p\|} = \frac{|x^2 - y^2 - (-a^2 + 2ax + b^2 - 2ay)|}{\|(x,y) - p\|}$$
$$= \frac{|x^2 - y^2 + a^2 - 2ax - b^2 + 2ay)|}{\|(x,y) - p\|} = \frac{|(x-a)^2 - (y-b)^2|}{\|(x-a, y-b)\|}$$
$$\leq \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{\|(x-a, y-b)\|} = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Der letzte Term verschwindet nun, falls x gegen a und y gegen b konvergieren.

(b) (i) Es ist $g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ g_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \\ x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3 \end{pmatrix}$. Die partiellen Ableitungen für die erste Komponentenfunktion lauten

$$(g_1)_{x_1}(\vec{x}) = 2x_1 x_2 + x_2^2 \quad \text{und} \quad (g_1)_{x_2}(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1 x_2.$$

Für die zweite Komponentenfunktion erhalten wir

$$(g_2)_{x_1} = 3x_1^2 x_2 - x_2^3 \quad \text{und} \quad (g_2)_{x_2} = x_1^3 - 3x_1 x_2^2.$$

Insgesamt also

$$\mathscr{J}_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 + x_2^2 & x_1^2 + 2x_1 x_2 \\ 3x_1^2 x_2 - x_2^3 & x_1^3 - 3x_1 x_2^2 \end{pmatrix}$$

(ii) Sei $x = x_1$, $y = x_2$ und $z = x_3$. Wir schreiben $A(x, y, z) := \dfrac{1}{1 + x + y + z}$. Dann wird

$$A_x = A_y = A_z = -\frac{1}{(1 + x + y + z)^2} = -A^2$$

und $f(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax \\ Ay \\ Az \end{pmatrix}$, also nach der Produktregel

$$\mathscr{J}_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} A_x x + A & A_y x & A_z x \\ A_x y & A_y y + A & A_z y \\ A_x z & A_y z & A_z z + A \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - A^2 \begin{pmatrix} x & x & x \\ y & y & y \\ z & z & z \end{pmatrix}$$

(c) Für $n \geq 2$ gehen wir ähnlich vor wie in Präsenzaufgabe 1 und schließen, dass f total differenzierbar im Ursprung ist.

Ist $n \leq 0$, so können wir $(0, 0)$ nicht in den Nenner einsetzen. Genauer wählen wir die Folge $(x_k, y_k) = (1/k, 1/k)$, setzen in f ein und stellen fest, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(1/k, 1/k) = \infty \neq 0 = f(0, 0)$$

Daher kann f dort nicht stetig sein. Da aber aus der totalen Differenzierbarkeit die Stetigkeit folgen würde, kann f dort auch nicht total differenzierbar sein.

Für $n = 1$ ist f stetig, aber nicht total differenzierbar im Urpsrung. Die Stetigkeit erhält man durch die Abschätzungen

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|xy|}{|x|} = |y|,$$

falls $x \neq 0$ bzw.

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|xy|}{|y|} = |x|,$$

falls $y \neq 0$.

Wir berechnen die Linearisierte. Hierfür brauchen wir

$$f_x(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0 \quad \text{und} \quad f_y(0, 0) = 0.$$

Dann ist $L_{f,(0,0)}(x, y) = f(0, 0) + 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) = 0$.

Wir testen auf totale Differenzierbarkeit:

$$\lim_{(x,y)\to p} \frac{f(x, y) - L_{f,p}(x, y)}{\|(x, y) - p\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - 0}{\|(x, y) - (0, 0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Setzen wir allerdings $(x, y) = (x, x)$, so erhalten wir

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Für $x \to 0$ verschwindet das natürlich nicht. Die Funktion ist für $n = 1$ nicht total differenzierbar.

(d) Da $\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x, x) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} 1 = 1$, kann f dort nicht stetig sein, daher auch nicht total differenzierbar.

Aufgabe 2 (Kettenregel)

(a) Seien $g(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$ und $f(r, t) = (r\cos(t), r\sin(t))$. Berechnen Sie $g \circ f$ sowie die Jacobi-Matrizen von g, f und $g \circ f$ (letzteres mit und ohne Hilfe der Kettenregel).

(b) Seien $g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \ln(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 \end{pmatrix}$ und $f(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ uv \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie $(g\circ f)_u$ und $(g\circ f)_v$ an der Stelle $(-2,0)$.

(c) Seien $f : \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von $g(\vec{x}) := f(\|\vec{x}\|)$.

Lösungen zu Aufgabe 1)

(a) Es ist $(g\circ f)(r,t) = e^{r^2(-\cos^2(t)-\sin^2(t))} = e^{-r^2}$. Die entsprechenden Jacobi-Matrizen sind

$$\mathscr{J}_g(\vec{x}) = \Big(-2x_1e^{-x_1^2-x_2^2}, -2x_2e^{-x_1^2-x_2^2}\Big) = -2(x_1,x_2)e^{-x_1^2-x_2^2},$$

$$\mathscr{J}_f(r,t) = \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix}.$$

Mit $(x_1,x_2) = f(r,t)$ ist ferner

$$\mathscr{J}_g(f(r,t)) = \mathscr{J}_g(r\cos(t), r\sin(t)) = -2r(\cos(t),\sin(t))e^{-r^2}$$

Mit der Kettenregel ist

$$\mathscr{J}_{g\circ f}(r,t) = \mathscr{J}_g(f(r,t))\cdot \mathscr{J}_f(r,t) = -2re^{-r^2}(\cos(t),\sin(t))\cdot \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix}$$

$$= -2re^{-r^2}\big(\cos^2(t)+\sin^2(t),\ -r\sin(t)\cos(t)+r\sin(t)\cos(t)\big) = -2re^{-r^2}(1,0)$$

Andererseits rechnen wir $(g\circ f)(r,t) = e^{-r^2}$ ohne die Kettenregel aus. Es sind

$$(g\circ f)_r(r,t) = -2re^{-r^2} \quad \text{und} \quad (g\circ f)_t(r,t) = 0.$$

Also $\mathscr{J}_{g\circ f}(r,t) = (-2re^{-r^2},0) = -2e^{-r^2}(1,0)$.

(c) Wir schreiben $h(\vec{x}) := \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$. Dann sind $g = f\circ h$ und für $k = 1,\dots,n$

$$h_{x_k}(\vec{x}) = \frac{1}{2\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}}\cdot 2x_k = \frac{x_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}} = \frac{x_k}{\|\vec{x}\|}$$

Mit der Kettenregel haben wir dann

$$\mathscr{J}_g(\vec{x}) = \mathscr{J}_{f\circ h}(\vec{x}) = \mathscr{J}_f(h(\vec{x}))\cdot \mathscr{J}_h(\vec{x}) = f'(\|\vec{x}\|)\cdot \frac{(x_1,\dots,x_n)}{\|\vec{x}\|} = \frac{f'(\vec{x})}{\|\vec{x}\|}(x_1,\dots,x_n)$$

Stochastikaufgaben

Die Stochastikaufgaben werden am 28.06. im Tutorium (16-18 Uhr, HS14) besprochen.

Aufgabe 1

200 Disketten wurden auf Bruchfestigkeit und Oberflächenhärte getestet mit dem folgenden Ergebnis:

		Bruchfestigkeit	
		hoch	niedrig
Oberflächenhärte	hoch	170	15
	niedrig	8	7

Wir untersuchen die Beschaffenheit einer willkürlich herausgegriffenen Diskette bezüglich der beiden oben genannten Merkmale. Was ist der richtige Ergebnisraum? A sei das Ereignis " hohe Oberflächenhärte" und B stehe für "hohe Bruchfestigkeit".

(a) Was sind die Elementarereignisse?

(b) Wieviele Elementarereignisse enthalten $A \cap B,\ A \cup B$ und $A^c \cup B^c$?

(c) Welche W'keitsverteilung ist auf diesem Ergebnisraum nahegelegt?

Aufgabe 2

(a) Ein Steuerpult besteht aus 4 Schaltern, von denen jeder 3 Stellungen haben kann. Jede Kombination der Stellungen dieser Schalter habe die gleiche W'keit. Mit welcher W'keit haben je zwei benachbarte Schalter verschiedene Stellungen?

(b) Sei Ω ein Ergebnisraum und A, B und C Ereignisse mit Wahrscheinlichkeiten

$$P(A \cap B) = 0,5, \quad P(A \cap B^c) = 0,25, \quad P(A^c \cap C) = 0,1 \quad \text{und} \quad P(C) = 0,4.$$

Was ist dann $P(A)$ und was ist $P(A \cup C)$?