INGENIERMECHANIK ÜBUNGEN

Thermodynamik der Werkstoffe und Strukturen

1. Eindimensionale Wärmeleitung	1
Analytische Lösungen der stationären und instationären Wärmeleitungsgleichung	
2. Thermoelastizität	11
Gleichgewichtsbedingungen, HOOKsches Gesetz,	
Mohr-Coulombsches Festigkeitskriterium	
3. Eindimensionale Viskoelastizität	16
MAXWELLsches und KELVIN-VOIGTsches Modell, Kriechen und Relaxation, Erweiterun	gen
4. Elastoplastizität	28
Fließregeln nach RANKINE, TRESCA und MOHR-COULOMB	
5. Hyperelastizität	34
Hyperelastische Modelle zur Ermittlung von Spannungs- und Elastizitätstensoren	
Mechanische werkstonprulung	
6. Methoden der mechanische Werkstoffprüfung	42
Auswertung von einaxialen Zug- und Druckversuchen; Auswertung von Ultraschalltests	
Theorie gedrungener Biegestäbe	
7. Integration der Differentialbeziehungen der Theorie gedrungener Stäbe	49
Integration der Biegelinie ausgehend von der Differentialgleichung 4. bzw. 2. Ordnung	10
8. Ermittlung von Schubbeiwerten	57
Berechung von Schubbeiwerten für Rechteckquerschnitte und dünnwandige offene Profil	e
ייניניו איז אווני ביי	
Mehrskalenmodellierung - Mikromechanik	
9. Mikromechanik	61
Homogenisierungsmethoden: Mori-Tanaka Schema und autokohärentes Schema	

Anhang

A. Räumlicher Spannungszustand	$\mathbf{A1}$
Hauptspannungen, Spannungshauptrichtungen, Transformation des Spannungstensors	
B. Festigkeitskriterien für Boden, Fels und Beton	B1
2-Parametermodelle zur Beschreibung des Versagenseintritts von Boden, Fels und Beto	n
C. Das verallgemeinerte HOOKEsche Gesetz	C1
Allgemeine Form – Ebener Spannungszustand – Ebener Verzerrungszustand	
D. Morphologietensoren	D1

1. EINDIMENSIONALE WÄRMELEITUNG

Die allgemeine Form der Wärmeleitungsgleichung (siehe Vorlesungsskriptum, Kapitel 4.4) beschreibt das Temperaturfeld $T(\mathbf{x}, t)$ als Funktion der Zeit t und des Ortes \mathbf{x} durch

$$\rho c \dot{T} - \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla T) = 0 \rightarrow \qquad \text{keine Wärmequelle.}$$
(1.1)

Darin steht ρ für die Massendichte, c für die spezifische Wärmekapazität (= Energiezunahme pro Masseneinheit pro Kelvin) und **k** bezeichnet den Wärmeleitungstensor des Materials im betrachteten Volumenelement. Gemeinsam mit thermischen Randbedingungen und Anfangsbedingungen, erlaubt (1.1) die Lösung von instationären Wärmeleitungsproblemen in dreidimensionalen Körpern. Gleichung (1.1) ist eine homogene partielle Differentialgleichung, deren Lösung beispielhaft anhand dreier einfacher Beispiele im Folgenden demonstriert werden soll. Für komplexere Aufgaben müssen numerische Methoden, wie z.B. die Methode der finiten Elemente oder die Methode der finiten Differenzen, oder Näherungsgleichungen verwendet werden.

Wir betrachten hier ausschließlich Körper, deren thermisches Verhalten sowohl homogen als auch isotrop ist. Es gilt dann $\mathbf{k} = k\mathbf{1}$; der Wärmeleitungstensor ist also isotrop und außerdem ortsunabhängig. Der skalare Wert k wird oft auch als Wärmeleitfähigkeit (mit Symbol λ) bezeichnet. Die Wärmeleitungsgleichung (1.1) vereinfacht sich unter der vorausgesetzten Homogenität und Isotropie der thermischen Eigenschaften zu:

$$\dot{T} - a\Delta T = 0. \tag{1.2}$$

wobei der Laplace-Operator $\Delta T = \nabla \cdot \nabla T$ verwendet wurde und die drei Materialkonstanten (ρ, c, k) zu einer einzigen Konstanten, nämlich der Temperaturleitfähigkeit $a = k/(\rho c)$, zusammengefasst wurden. Wir beschränken uns weiters auf eindimensionale Wärmeleitungsprobleme, das heißt auf Aufgaben, bei denen das Temperaturfeld nur von einer einzigen Raumkoordinate abhängt. Typische Beispiele dabei sind der Wärmestrom durch unendlich ausgedehnte Wände (siehe das erste und das dritte der nachfolgende Beispiele), der Wärmestrom durch einen Stab, dessen Mantelfläche vollständig isoliert ist, die Wärmeströmung durch den Mantel eines unendlich ausgedehnten, zylindrischen Rohres (siehe das zweite der nachfolgende Beispiele), oder die Wärmeströmung im Erdreich ausgehend von einer Punktquelle. In kartesischen Koordinaten mit ausschließlich in x-Richtung strömender Wärme gilt $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, daher vereinfacht sich die Wärmeleitungsgleichung (1.2) zu

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$
(1.3)

In zylindrischen Koordinaten, mit auschließlich in radialer *r*-Richtung strömender Wärme, gilt $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r},$ die Wärmeleitungsgleichung vereinfacht sich daher zu

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(x,t)}{\partial r}\right) = 0.$$
(1.4)

Beispiel 1: Stationäre Wärmeströmung vom Innenraum zur Außenluft

Geg.: Eine in zwei Richtungen (quasi-) unendlich lange Wand mit Dicke d = 25 cm aus Ziegelmauerwerk (Wärmeleitfähigkeit $k = \lambda = 0.15 \text{ W/(m K)}$) trennt die Innenluft, welche eine Temperatur von $T_i = 22^{\circ}$ C (in "ausreichendem Abstand" zur Wand) aufweist, von der kälteren Außenluft (Temperatur $T_a = 2^{\circ}$ C in "ausreichendem Abstand" zur Wand). Die Wärmeübergangskoeffizienten (als Kehrwerte der Wärmeübergangswiderstände) bei horizontaler Wärmeströmung betragen $\beta_i = 1/0.13 \text{ W/(m^2 K)}$ an der Innenseite und $\beta_a = 1/0.04 \text{ W/(m^2 K)}$ an der Außenseite, siehe auch Vorlesung *Bauphysik*.



Abbildung 1.1: Horizontale Wärmeströmung durch eine Ziegelwand

Ges.: Welches Temperaturprofil stellt sich in der Wand zum Zeitpunkt $t = \infty$ (unter der Annahme, dass sowohl die Innen- als auch die Außentemperatur zeitunabhängig sind und somit konstant bleiben) ein?

Lösung der Differentialgleichung

Für dieses eindimensionale Wärmeleitungsproblem beschreibt die Differentialgleichung (1.3) das Temperaturfeld als Funktion der Laufkoordinate x. Hier ist ausschließlich das Temperaturprofil nach unendlich langer Zeit gefragt. Zeitabhängige Änderungen des Temperaturfeldes werden nicht betrachtet. Daher handelt es um ein stationäres Problem ($\partial T/\partial t = 0$), wodurch sich aus der Differentialgleichung (1.3)

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = 0 \tag{1.5}$$

ergibt. Gemäß (1.5) verschwindet also die zweite Ableitung der Temperatur nach der Ortskoordinate x. Integration von (1.5) liefert einen konstanten Temperaturgradienten in der gesamten Wand $0 \le x \le d$:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x) = \int \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} \, \mathrm{d}x = C_1 \,. \tag{1.6}$$

Der horizontale Wärmefluss $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_x$ ist daher gemäß Fourierschem Wärmeleitungsgesetz (siehe Vorlesung) ebenfalls konstant in x und lautet

$$\mathbf{q} = -k\,\nabla T\,\mathbf{e}_x = -k\,C_1\,\mathbf{e}_x\,.\tag{1.7}$$

Nochmalige Integration von (1.6) liefert die Wandtemperatur als lineare Funktion der Koordinate x:

$$T(x) = \int \frac{\partial T(x)}{\partial x} \, \mathrm{d}x = C_1 \, x + C_2 \tag{1.8}$$

INGENIEURMECHANIK – ÜBUNGEN

Die Temperatur bei stationärer Strömung in x-Richtung durch eine Wand hat also einen linearen Verlauf. Die beiden Integrationskonstanten folgen aus der Anpassung der Randbedingungen, was im Folgenden beschrieben wird.

Anpassung der Randbedingungen

Die Lösung der Differentialgleichung (1.8) wird nun an die Randbedingungen an der Wandoberfläche angepasst. Randbedingungen können vorliegen als Oberflächentemperatur, oder aber, wie in diesem Fall, durch Angabe des Wärmestroms. Der skalare Wärmestrom q_i an der Wandinnenseite folgt aus der Abstrahlungsbedingung

$$q_i = \beta_i \left[T(x=0) - T_i \right].$$
(1.9)

Der Wärmestrom q_i ist gemäß (1.9) dann positiv, wenn die Wärme von der Wand zur Innenluft fließt (unabhänging vom gewählten Koordinatensystem), wenn also die Oberflächentemperatur T(x=0) größer ist als die Innenlufttemperatur T_i . Der Vektor des Wärmestroms an der Wandinnenseite \mathbf{q}_i folgt aus dem skalaren Wärmestrom q_i und der Richtung des vom Körper nach außen gerichteten Normalvektors \mathbf{n} an der Wandinnenseite, $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x$ als

$$\mathbf{q}_i = -q_i \mathbf{e}_x = \beta_i \left[T_i - T(x=0) \right] \mathbf{e}_x \,. \tag{1.10}$$

Der Wärmestrom an der Wandaußenseite wiederum folgt aus der Abstrahlungsbedingung

$$q_a = \beta_a \left[T(x = d) - T_a \right]$$
(1.11)

und die entsprechende vektorielle Größe \mathbf{q}_a aus der Richtung des Normalvektors an der Wandaußenseite $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$:

$$\mathbf{q}_a = q_a \mathbf{e}_x = \beta_a \left[T(x=d) - T_a \right] \mathbf{e}_x \,. \tag{1.12}$$

Da der Wärmefluss in der gesamten Wand konstant ist, siehe dazu Glg. (1.7), muss $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_a = \mathbf{q} = -k C_1 \mathbf{e}_x$ gelten, und somit

$$\beta_i \left[T(x=0) - T_i \right] = k C_1 \,, \tag{1.13}$$

$$\beta_a \left[T(x=d) - T_a \right] = -k C_1 \,. \tag{1.14}$$

Durch Spezialisierung der Oberflächentemperaturen für das lineare Temperaturfeld (1.8) folgt $T(x=0) = C_2$ sowie $T(x=d) = dC_1 + C_2$, was wiederum eingesetzt in (1.13) bzw. (1.14) zwei Bestimmungsgleichungen für die zwei Integrationskonstanten liefert:

$$\beta_i \left[C_2 - T_i \right] = k \, C_1, \,, \tag{1.15}$$

$$\beta_a \left[d C_1 + C_2 - T_a \right] = -k C_1 \,. \tag{1.16}$$

Auflösen dieses linearen Gleichungssystems führt schließlich auf

$$C_{1} = \frac{\beta_{i}\beta_{a}(T_{a} - T_{i})}{k\beta_{a} + k\beta_{i} + d\beta_{a}\beta_{i}} = -72,59^{\circ}\text{C/m}, \qquad (1.17)$$

$$C_2 = \frac{k\beta_a T_a + k\beta_i T_i + d\beta_i \beta_a T_i}{k\beta_a + k\beta_i + d\beta_a \beta_i} = 20,58^{\circ}\mathrm{C}\,, \qquad (1.18)$$

und damit auf das Temperaturprofil

$$T(x) = 20,58^{\circ}\text{C} - 72,59^{\circ}\text{C/m} \times x, \qquad (1.19)$$

wie auch in Abb. 1.2 dargestellt.



Abbildung 1.2: Temperaturprofil bei stationärer Strömung durch die Wand (Wärmeübergangsbereiche hier nicht dargestellt)

Interpretation der Ergebnisse

Die Oberflächentemperaturen folgen dann für die innere Oberfläche als $T(x=0) = C_2 = 20,58$ °C und für die äußere Oberfläche als T(x=d) = 2,43°C. Wie zu erwarten war, ist der Temperaturunterschied zwischen Innenluft und Oberflächentemperatur an der Wandinnenseite wesentlich größer als jener zwischen Außenlufttemperatur und Oberflächentemperatur der Wandaußenseite. Der Grund hierfür liegt darin, dass der Wärmeübergangskoeffizient an der äußeren Oberfläche aufgrund der höheren Strömungsgeschwindigkeiten wesentlich größer ist, als jener an der inneren Oberfläche, $\beta_a > \beta_i$.

In der Bauphysik ist es üblich, die in der Zeitspanne t durch eine Wand mit der Fläche A fließende Wärmemenge Q (Einheit Joule = Wattsekunde) darzustellen als

$$Q = q A t = U (T_i - T_a) A t, \qquad (1.20)$$

wobei U als Wärmedurchgangskoeffizient (U-Wert) bezeichnet wird. In unserem Beispiel folgt dieser nach Einsetzen von $q = -k C_1$ mit C_1 gemäß (1.17) in (1.20) und Koeffizientenvergleich mit der ursprünglichen Glg. (1.20) als

$$U = \frac{k \,\beta_i \beta_a}{k \,\beta_i + d \,\beta_a \beta_i + k \,\beta_a} = \frac{1}{\frac{1}{\beta_i} + \frac{d}{k} + \frac{1}{\beta_a}} = 0,544 \,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \mathrm{K}} \,.$$
(1.21)

Beispiel 2: Stationäre Wärmeströmung durch ein Rohr

Geg.: Ein unendlich langes gerades Rohr mit kreisringförmigem Querschnitt (Innenradius $R_i = 5 \text{ cm}$) und mit auf der Rohraußenseite angebrachten Wärmedämmung (Wandstärke der Dämmung t = 10 cm, Wandstärke des Rohres dagegen vernachlässigbar klein) wird von Wasser mit einer Temperatur von $T_{H_2O} = 60^{\circ}\text{C}$ (diese darf hier vereinfacht auch an der inneren Oberfläche des Rohrs angenommen werden) durchströmt, siehe Abb. 1.3. Die Oberflächentemperatur an der Außenseite der Dämmung beträgt $T_{\text{Oberfl}} = 5^{\circ}\text{C}$.



Abbildung 1.3: Radiale Wärmeströmung durch gedämmtes Rohr (allgemeine Skizze, nicht maßstabsgetreu)

Ges.: Welches Temperaturprofil stellt sich im Rohr nach unendlich langer Zeit ein?

Lösung der Aufgabenstellung

Für dieses eindimensionale Wärmeleitungsproblem beschreibt die Differentialgleichung (1.4) das Temperaturfeld als Funktion der radialen Koordinate r. Wiederum liegt ein stationäres Problem vor, wodurch sich die Differentialgleichung (1.4) vereinfacht zu

$$\frac{\partial^2 T(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r)}{\partial r} = 0.$$
(1.22)

Dabei handelt es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten. Die Lösung dieser Gleichung lautet z.B.

$$T(r) = C_1 \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) + C_2, \qquad (1.23)$$

wovon man sich durch Ableiten und Einsetzen in (1.22) einfach überzeugen kann. Zur Ermittlung der beiden Konstanten C_1 und C_2 müssen die Randbedingungen verwendet werden.

In dieser Aufgabe stehen direkt die Oberflächentemperaturen zur Verfügung: an der Rohrinnenseite gilt $T(r = R_i) = T_{H_2O}$ (es wird vereinfachend angenommen, dass die Temperatur an der inneren Rohroberfläche exakt der Wassertemperatur entspricht), an der Rohraußenseite ist die Oberflächentemperatur ebenfalls bekannt und es gilt $T(r = R_i + t) = T_{\text{Oberfl}}$. Auswertung von (1.23) für die beiden Oberflächen liefert daher

$$T(r = R_i) = T_{H_2O} = 60^{\circ} C = C_1 \ln\left(\frac{R_i}{R_i}\right) + C_2$$
(1.24)

$$T(r = R_i + t) = T_{\text{Oberfl}} = 5^{\circ}\text{C} = C_1 \ln\left(\frac{R_i + t}{R_i}\right) + C_2.$$
 (1.25)

Aus diesem Gleichungssystem folgen die beiden Konstanten als

$$C_1 = -\frac{T_{H_2O} - T_{\text{Oberfl}}}{\ln\left(\frac{R_i + t}{R_i}\right)} = -50,06^{\circ}\text{C}, \qquad (1.26)$$

$$C_2 = \frac{\ln\left(\frac{R_i+t}{R_i}\right) T_{H_2O} - \ln\left(\frac{R_i}{R_i}\right) T_{\text{Oberfl}}}{\ln\left(\frac{R_i+t}{R_i}\right)} = T_{H_2O} = 60^{\circ}\text{C}, \qquad (1.27)$$

und somit das (nicht-lineare) Temperaturprofil

$$T(r) = -50,06 \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) + 60, \qquad (1.28)$$

wie in Abb. 1.4 dargestellt.





Beispiel 3: Abkühlung einer freistehenden Betonwand

Geg.: Eine in zwei Richtungen (quasi-) unendlich ausgedehnte Betonwand mit einer Dicke von 50 cm und einer Temperaturleitfähigkeit von $a = 0.54 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ hat zum Zeitpunkt t=0 eine räumlich konstante Temperatur von $T(x, t=0) = T_k = 20^{\circ}\text{C}$. Plötzlich sinkt die Wandoberflächentemperatur beidseitig auf $T_O = 0^{\circ}\text{C}$ ab und bleibt im Folgenden konstant bei dieser Temperatur.

Ges.: Berechnen Sie das zeitabhängige und ortsabhängige Temperaturfeld der Betonwand.

Lösung der partiellen Differentialgleichung

Hierbei handelt sich nun um ein instationäres Problem, da der Abkühlvorgang der Wand betrachtet werden soll. Es muss also die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung für eine Wärmeströmung in x-Richtung, siehe Differentialgleichung (1.3) gelöst werden. Wir versuchen durch einen Separationsansatz eine Lösung für diese partielle Differentialgleichung zu erhalten. Dabei spalten wir die orts- und zeitabhängige Temperaturfunktion T(x,t) auf in eine ortsabhängige Funktion $T_1(x)$ und eine zeitabhängige Funktion $T_2(t)$: $T(x,t) = T_1(x)T_2(t)$. Einsetzen dieses Produktansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$T_1 \frac{dT_2}{dt} - a \frac{d^2 T_1}{dx^2} T_2 = 0.$$
 (1.29)

Nun wird (1.29) so umgeformt, dass die ortsabhängigen Terme auf der linken Seite stehen und die zeitabhängigen Terme auf der rechten Seite:

$$\frac{1}{T_1}\frac{d^2T_1}{dx^2} = \frac{1}{a\,T_2}\frac{dT_2}{dt} = -\kappa^2 \tag{1.30}$$

Die Identität zwischen der ortsabhängigen linken Seite von (1.30) und der zeitabhängigen rechten Seite von (1.30) kann nur bestehen, wenn beide Seiten einer gemeinsamen Konstante $-\kappa^2$ entsprechen. Dadurch erhalten wir anstatt der in x und t partiellen Differentialgleichung (1.3), zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} + \kappa^2 T_1 = 0, \qquad (1.31)$$

$$\frac{dT_2}{dt} + a\kappa^2 T_2 = 0. (1.32)$$

Wendet man den Exponentialansatz $T_1 = \exp(\gamma x)$ in (1.31) an, erkennt man $\gamma = \pm \kappa i$ mit der imaginären Zahl i. Mithilfe der Eulerschen Formel erhält man schließlich die bekannte Lösung der Differentialgleichung für T_1 in Form von trigonometrischen Funktionen

$$T_1(x) = C_1 \cos(\kappa x) + C_2 \sin(\kappa x).$$
(1.33)

Zur Lösung der zeitabhängigen Differentialgleichung (1.30) verwenden wir ebenfalls einen Exponentialansatz: $T_2 = \exp(\gamma t)$. Eingesetzt in (1.32) ergibt $\gamma = -a\kappa^2$ damit ist die Lösung für die zeitabhängige Funktion T_2 die abklingende Exponentialfunktion

$$T_2(x) = C_3 \exp(-a\kappa^2 t) \tag{1.34}$$

Zusammenfassen der beiden Lösungen (1.33) und (1.34) gemäß des Produktansatzes ergibt schließlich die Lösung der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung (1.3) als

$$T(x,t) = T_1(x) T_2(t) = [C_1 \cos(\kappa x) + C_2 \sin(\kappa x)] C_3 \exp(-a\kappa^2 t) = [A \cos(\kappa x) + B \sin(\kappa x)] \exp(-a\kappa^2 t),$$
(1.35)

wobei die Konstanten C_1 , C_2 und C_3 zu zwei neuen Konstanten A und B zusammengefasst wurden. Durch Einsetzen von (1.35) in die Differentialgleichung (1.3) überzeugt man sich, dass das Temperaturfeld (1.35) tatsächlich die Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Anpassen an Rand- und Anfangsbedingungen

Nun werden zur Berechnung der beiden Konstanten A und B in (1.35) die Randbedingungen an der Wandoberfläche (x = 0 und x = d) sowie die Anfangsbedingung für den Initialzeitpunkt (t = 0) verwendet. Wir beginnen mit den beiden Randbedingungen. Die beidseitige Oberflächentemperatur gleicht zu allen Zeitpunkten t der Referenztemperatur T_O :

$$T(x=0,t) = T_O = 0 \tag{1.36}$$

$$T(x=d,t) = T_O = 0. (1.37)$$

Da die Randbedingungen für alle Zeitpunkte erfüllt sein müssen, muss der zeitunabhänige Klammerausdruck in (1.35) den Randbedingungen genügen:

$$A\cos(\kappa x) + B\sin(\kappa x) = 0 \qquad \forall x = \{0, d\}$$
(1.38)

Aus der Randbedingung bei x=0 erhält man dann direkt A=0, und damit folgt, unter Berücksichtigung der Randbedingung in x=d, dass

$$B\sin(\kappa d) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \kappa = n\frac{\pi}{d} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
 (1.39)

Die Konstante κ muss also einem Vielfachen von π/d entsprechen. Man erhält somit die Gesamtlösung unter Berücksichtigung der beiden Randbedingungen durch Einsetzen von A = 0 und Bgemäß (1.39) als Summe aller Teillösungen und somit als Summe über alle natürlichen Zahlen (inklusive Null):

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(n\frac{\pi}{d}x\right) \exp\left[-a\left(n\frac{\pi}{d}\right)^2 t\right] = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(n\frac{\pi}{d}x\right) \exp\left[-a\left(n\frac{\pi}{d}\right)^2 t\right]$$
(1.40)

Schlussendlich muss (1.40) noch an die Anfangstemperaturverteilung in der Wand angepasst werden. Einsetzen der räumlich konstanten Temperatur $T(0 < x < d, t=0) = T_k$ in die für den Anfangszeitpunkt t=0 spezialisierte Glg. (1.40) liefert

$$T(x,t=0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(n\frac{\pi}{d}x\right) = T_k.$$
 (1.41)

Man erkennt, dass man eine Fourierreihe mit Fourierkoeffizienten B_n an die gegebene Anfangstemperaturverteilung anpassen muss. Die Fourierkoeffizienten folgen dann durch Integration der Anfangstemperaturverteilung als

$$B_n = \frac{2}{d} \int_0^d T(x, t=0) \sin\left(n\frac{\pi}{d}x\right) dx = \frac{2T_k}{d} \int_0^d \sin\left(n\frac{\pi}{d}x\right) dx.$$
(1.42)

Man erkennt, dass alle Fourierkoeffizienten mit n = 2, 4, 6, 8... (alle Koeffizienten mit geradzahligem n) verschwinden. Zusätzlich wird auch der Koeffizient $B_0 = 0$. Es ist also ausreichend, lediglich über alle ungeraden n in (1.40) zu summieren. Bei einer Approximation durch sechs ungerade Reihenglieder n = 1, 3, 5, 7, 9, 11 in (1.40) erhält man bereits eine zufriedenstellend genaue Approximation der realen Ausgangstemperaturkurve, siehe Abbildung 1.5. Je größer n,



Abbildung 1.5: Fourier
approxmiation der konstanten Anfangstemperaturverteilung
 $T(x,t\!=\!0)=T_k=20^\circ\mathrm{C}$ durch sechs Reihenglieder

desto kleiner wird dabei die Periode des entsprechenden Fourierreihenglieds.

Interpretation der Gesamtlösung

Die gesamte Lösung des zeitlich und räumlich variablen Temperaturfeldes lautet also zusammenfassend

$$T(x,t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \sin\left(n\frac{\pi}{d}x\right) \exp\left[-a\left(n\frac{\pi}{d}\right)^2 t\right],$$
(1.43)

mit Fourierkoeffizienten B_n gemäß (1.42). Erwartungsgemäß stellt sich also bezüglich d/2 ein symmetrisches Temperaturprofil ein, siehe Abb. 1.6. Die kalte Temperatur an den beiden Wand-



Abbildung 1.6: Temperaturprofil in der Wand T(x,t) zu verschiedenen Zeitpunkten

oberflächen bewirkt eine kontinuierliche Verringerung der Wandtemperaturen, wobei zuerst nur die weiter außen liegenden Wandschichten abkühlen. Erst nach ca. zwei Stunden beginnt auch der Kern der Wand x = d/2 merkbar abzukühlen. Nach unendlich langer Zeit stellt sich, wenn wie vorausgesetzt die Oberflächentemperatur konstant bei 0°C bleibt, schließlich auch in der gesamten Wand diese Temperatur ein, $T(x, t \to \infty) = T_O = 0$ °C. Aufgrund der Tatsache, dass die einzelnen Reihenglieder jeweils mit Exponentialfunktionen gedämpft werden, reicht für unsere Betrachtung völlig aus, relativ wenige (also sechs) Reihenglieder zu berücksichtigen. Man erkennt, dass die Oszillationen des Temperaturfeldes bereits nach wenigen Minuten abgeklungen sind, siehe Abb. 1.6. Sucht man auch nach kurzer Zeit nach einer exakten Lösung für das Temperaturprofil, müssen selbstverständlich mehr Reihenglieder berücksichtigt werden.

2. THERMOELASTIZITÄT

Geg.: Ein scheibenförmiges Probestück (quadratische Seitenfläche in $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ -Ebene mit Seitenlänge l) aus Asphalt wird an den beiden Schmalseiten $x_1 = \text{const}$ in einen Versuchsrahmen eingespannt. In diesem Ausgangszustand ist das Probestück spannungs- und verzerrungsfrei. Nun wird die Probe um 20 K abgekühlt (d.h. $\Delta T = -20$ K im gesamten Probekörper). Die elastischen und thermischen Eigenschaften des Asphalts sind isotrop und homogen: Elastizitätsmodul E = 7 GPa, Querdehnungszahl $\nu = 0,25$ und linearer Wärmeausdehnungskoeffizient $\alpha_T = 1,7 \cdot 10^{-5}$ K⁻¹. Die Festigkeit des Materials kann durch ein MOHR-COULOMB-Kriterium approximiert werden, wobei der Winkel der inneren Reibung $\varphi = 40^{\circ}$ und die Kohäsion c = 3,45 MPa bekannt sind.



Abbildung 2.1: Asphaltprobe

- **Ges.:** (a) Unter Zuhilfenahme der lokalen Gleichgewichtsbedingung, der Randbedingungen der Asphaltprobe sowie des HOOKEschen Gesetzes sind die Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors und des Spannungstensors zu bestimmen.
 - (b) Ermitteln Sie, mit Hilfe des Festigkeitskriteriums nach MOHR-COULOMB, ob die gegebene Abkühlung zum Versagen der Probe führt, bzw. welche Temperaturdifferenz ΔT_{krit} gerade zu Versagen führen würde.

Annahmen: linearisierte Elastizitätstheorie, Vernachlässigung des Eigengewichtes, sämtliche Kontaktflächen sind reibungsfrei

ad (a): Spannungs- und Verzerrungstensor

Zuerst werden die **Randbedingungen** an den Oberfläche der Probe angeschrieben. Wir beginnen mit den Spannungsrandbedingungen. An allen *freien Oberflächen*, also an den Oberflächen $x_2 = \pm l/2$ sowie $x_3 = \pm d/2$, sind alle Komponenten des Traktionsvektors bezüglich dieser Oberfläche gleich Null:

$$x_2 = +\frac{l}{2}$$
: $\mathbf{T}(\mathbf{n} = +\mathbf{e}_2) = 0$, $x_2 = -\frac{l}{2}$: $\mathbf{T}(\mathbf{n} = -\mathbf{e}_2) = 0$; (2.1)

$$x_3 = +\frac{d}{2}$$
: $\mathbf{T}(\mathbf{n} = +\mathbf{e}_3) = 0$, $x_3 = -\frac{d}{2}$: $\mathbf{T}(\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3) = 0$. (2.2)

Die mittels der Traktionsvektoren formulierten Randbedingungen sind äquivalent zu den folgenden Spannungsrandbedingungen

$$x_2 = \pm \frac{l}{2}: \quad \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{32} = 0,$$
 (2.3)

$$x_3 = \pm \frac{d}{2}: \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0,$$
 (2.4)

An den beiden Oberflächen, die am Prüfrahmen befestigt sind, also bei $x_1 = \pm l/2$, gilt aufgrund der Reibungsfreiheit, dass der Traktionsvektor an der Oberfläche parallel zu \mathbf{e}_1 sein muss. Anders ausgedrückt – die Schubspannungskomponenten an diesen Oberflächen müssen verschwinden,

$$x_1 = +\frac{l}{2}: \quad \mathbf{T}(\mathbf{n} = +\mathbf{e}_1)||\mathbf{e}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \tag{2.5}$$

$$x_1 = -\frac{l}{2}$$
: $\mathbf{T}(\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1)||\mathbf{e}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$ (2.6)

Außerdem liegt an dieser Oberfläche eine Verschiebungsrandbedingung vor: die Verschiebungen in x_1 -Richtung sind durch den Prüfrahmen verhindert,

$$x_1 = \pm \frac{l}{2}: \quad u_1 = 0 \tag{2.7}$$

Basierend auf diesen Randbedingungen und den Feldgleichungen der linearisierten Elastizitätstheorie, soll eine Lösung für die Spannungs- und Verzerrungszustand in der Aspahltprobe gefunden werden. Wir starten ausgehend von einem Ansatz für den Spannungszustand, der die Gleichgewichtsbedingungen und die Spannungsrandbedingungen erfüllt. Mithilfe des HOOKEschen Gesetzes berechnet man daraus den Spannungszustand und schließt den Verzerrungszustand. Abschließend kontrollieren wir, ob die ermittelten Verschiebungen auch die Verschiebungsrandbedingungen erfüllen. Wir versuchen zuerst, einen **Spannungszustand** σ zu finden, der die Gleichgewichtsbedingung und die Spannungsrandbedingungen erfüllt. Bei Vernachlässigung des Eigengewichtes des Probekörpers lautet die lokale Gleichgewichtsbedingung

div
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$
 (2.8)

oder ausführlich in den Komponenten angeschrieben:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$
(2.9)

Aufgrund der Homogenität des Probekörpers und aufgrund der Randbedingungen erwarten wir uns einen homogenen Spannungszustand im gesamten Probekörper. Da folglich alle Ableitungen von σ_{ij} nach den Koordinatenrichtungen Null sind, ist die lokale Gleichgewichtsbedingung automatisch erfüllt. Anpassen des homogenen Spannungsfeldes an die Spannungsrandbedingungen ergibt, dass nur die Spannungskomponente σ_{11} ungleich Null sein kann:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \sigma_{11} = C_1 \tag{2.10}$$

 C_1 ist eine Integrationskonstante, die in weiterer Folge aus dem HOOKEschen Gesetz bestimmt wird. Die Komponenten des Spannungstensors in der Standardbasis lauten im gegenständlichen Fall also wie folgt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} = C_1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{symm.} & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$
(2.11)

Die Komponenten des **linearisierten Verzerrungstensors** ε folgen aus dem HOOKEschen Gesetz. Der einaxiale Spannungszustand (2.11) führt bei der isotropen Probe zu einem spannungsinduzierten räumlichen Verzerrungszustand (Normalverzerrungen treten in allen drei Raumrichtungen auf). Die Temperaturänderung ΔT verursacht ebenfalls Normalverzerrungen. Wir können uns aber auf die ersten drei Zeilen des HOOKEschen Gesetzes (C.2) beschränken, ¹

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T \cdot \Delta T \\ \alpha_T \cdot \Delta T \\ \alpha_T \cdot \Delta T \end{bmatrix}$$
(2.12)

¹Sämtliche Verzerrungs-, Spannung- und Nachgiebigkeitstensoren sind im Folgenden bezüglich des $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Basissystems formuliert. Der Einfachheit halber wird die explizite Indikation dieses Umstandes nachfolgend weggelassen. Alle Schubverzerrungskomponenten sind Null:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \tag{2.13}$$

Wir haben jetzt den Spannungs- und Verzerrungszustand im Probekörper, als Funktion der noch unbekannte Normalspannung $\sigma_{11} = C_1$, ermittelt. Die Größe von σ_{11} folgt aus der noch verbleibenden Verschiebungsrandbedingungen, wie im Folgenden gezeigt wird.

Ganz allgemein sind die Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{1},\mathbf{e}_{2},\mathbf{e}_{3}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_{1}}{\partial x_{1}} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{1}}{\partial x_{2}} + \frac{\partial u_{2}}{\partial x_{1}} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{1}}{\partial x_{3}} + \frac{\partial u_{3}}{\partial x_{1}} \right) \\ & \frac{\partial u_{2}}{\partial x_{2}} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{2}}{\partial x_{3}} + \frac{\partial u_{3}}{\partial x_{2}} \right) \\ & \text{symm.} & \frac{\partial u_{3}}{\partial x_{3}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{1},\mathbf{e}_{2},\mathbf{e}_{3}}$$
(2.14)

Berücksichtigt man die Verschiebungsrandbedingung (2.7) in (2.14) erhält man die Verzerrungstensorkomponente ε_{11} als

$$\varepsilon_{11}(x_1 = \pm l/2) = \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1(x_1 = \pm l/2)}{\partial x_1} = \frac{\partial 0}{\partial x_1} = 0$$
(2.15)

Berücksichtigung von $\varepsilon_{11} = 0$ in (2.14) erlaubt es (bei Betrachtung der ersten Zeile) die Spannungskomponente σ_{11} zu ermitteln:

$$\sigma_{11} = -E \cdot \alpha_T \cdot \Delta T = 2,38 \,\mathrm{MPa} \tag{2.16}$$

Einsetzen dieser Lösung in die zweite und dritte Zeile von (2.14) ergibt

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \alpha_T \cdot \Delta T = -4.25 \cdot 10^{-4}$$
 (2.17)

Anmerkung: Die allgemeine Vorgehensweise zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes aus dem Verzerrungszustand wird hier nicht behandelt. Dazu sei auf die Lehrveranstaltung "Flächentragewerke Theorie" verwiesen. In diesem einfachen Beispiel ist es allerdings noch möglich den Verschiebungszustand, direkt anzuschreiben:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_{22} x \\ \varepsilon_{33} x \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$
(2.18)

Durch Einsetzen in die Definition des linearisierten Verzerrungstensors, mit den Verschiebungsableitungen

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22} \qquad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \quad , \qquad (2.19)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \varepsilon_{33}$$

überzeugt man sich, dass das lineare Verschiebungsfeld (2.18) den gesuchten Verzerrungszustand ergibt. Außerdem erfüllt $u_1 = 0$ auch die durch den Versuchsrahmen vorgegeben Verschiebungsrandbedingung, siehe dazu (2.15). Wir haben daher eine gültige Lösung für Spannungs-, Verzerrungs-, und Verschiebungsfeld nach linearisierter Elastizitätstheorie erhalten.

ad (b): Kritische Temperaturdifferenz – Festigkeit. nach MOHR-COULOMB

Die Hauptnormalspannungen σ_I , σ_{II} und σ_{III} sowie die zugeordneten Richtungen \mathbf{e}_I , \mathbf{e}_{II} und \mathbf{e}_{III} lassen sich direkt identifizieren:

$$\sigma_{I} = \sigma_{11} = -\alpha_{T} \cdot \Delta T \cdot E = 2,38 \text{ MPa} \qquad \sigma_{II} = \sigma_{22} = 0 \qquad \sigma_{III} = \sigma_{33} = 0$$

$$\mathbf{e}_{I} = \mathbf{e}_{1}, \qquad \mathbf{e}_{II} = \mathbf{e}_{2}, \qquad \mathbf{e}_{III} = \mathbf{e}_{3} \qquad (2.20)$$

Die MOHR-COULOMBsche Versagensfunktion (siehe Anhang B) lautet:

$$f_{MC}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_I \cdot \frac{1 + \sin\varphi}{2c\cos\varphi} - \sigma_{III} \frac{1 - \sin\varphi}{2c\cos\varphi} - 1$$
(2.21)

Einsetzen der in (2.20) definierten Hauptnormalspannungen, sowie der Materialparameter c und φ gemäß Angabe in (2.21) ergibt $f_{MC} = -0,2603$. Weil dieser Wert negativ ist, kann man auf Basis des MOHR-COULOMBschen Versagenkriteriums davon ausgehen, dass eine Abkühlung um 20 K (d.h. $\Delta T = -20$ K) *nicht* zum Versagen des Asphaltprobekörpers führt. Nullsetzen der Versagensfunktion (2.21) und Umformen liefert die kritische Temperaturdifferenz ΔT_{krit} , die gerade zum Versagen der Asphaltprobe führen würde:

$$f_{MC}(\boldsymbol{\sigma}) = -\alpha_T \cdot \Delta T_{krit} \cdot E \, \frac{1 + \sin\varphi}{2\,c\,\cos\varphi} - 0 \, \frac{1 - \sin\varphi}{2\,c\,\cos\varphi} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta T_{krit} = -27,038 \,\mathrm{K} \tag{2.22}$$

3. EINDIMENSIONALE VISKOELASTIZITÄT

In diesem Kapitel werden Materialmodelle angewendet, um eindimensionales, linear-viskoelastisches Materialverhalten mathematisch zu beschreiben. Die Differentialgleichung zur Beschreibung des Dreiparamtermodells wurde in der Vorlesung hergeleitet. Im Rahmen der Übung behandeln wir auch die beiden Zweiparamtermodelle: Maxwellsches Modell und Kelvin-Voigtsches Modell. Die Herleitung der zugrundeliegenden Gleichungen dieser beiden Modelle kann analog zu jener für das Dreiparametermodell erfolgen (siehe beispielsweise Buch von Prof. Mang, Kapitel 10.3.3).

1D Materialmodelle zur mathematischen Beschreibung linearer Viskoelastizität						
	Maxwellsches Modell	Kelvin-Voigtsches Modell				
Gedankenmodell:	$\varepsilon = \varepsilon^{\text{elastisch}} + \varepsilon^{\text{viskos}}$	$ \begin{array}{c} \eta \\ \hline \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\$				
Zugnundeliegende		$\sigma = \sigma^{\text{charther}} + \sigma^{\text{visitor}}$				
Differentialgleichung:	$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{n}$	$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{n}\varepsilon = \frac{\sigma}{n}$				
Kriochkurvo:	,					
— Verlauf der Verzernung c						
= verlauf der verzerfung ε, wenn ein Spannungsinkrement $\Delta \sigma$ aufgebracht wird und da-	$\varepsilon(t) = \underbrace{\left[\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}(t - t_0)\right]}_{\Delta \sigma_0} \Delta \sigma_0$	$\varepsilon(t) = \underbrace{\frac{1}{E} \left[1 - e^{-\frac{E}{\eta}(t-t_0)} \right]}_{I(t-t_0)} \Delta \sigma_0$				
nach die Spannung σ konstant	$=J(t-t_0)$	$=J(t-t_0)$				
genalten wird	(3.1)	(3.2)				
Relaxationkurve: = Verlauf der Spannung σ , wenn ein Verzerrungsinkrement	(i) $-\frac{E}{2}(t-t_0)$	$\sigma(t) = E \Delta \varepsilon_0$				
$\Delta \varepsilon$ aufgebracht wird und da- nach die Verzerrung ε konstant	$\sigma(t) = \underbrace{E e^{-\eta (\varepsilon^{-\xi_0})}}_{=R(t-t_0)} \Delta \varepsilon_0$	\rightarrow RELVIN- VOIGTSCHES Modell zur Beschreibung von Relaxati- on <u>nicht</u> geeignet!				
genaiten wird	(3.3)					

 $E\dots$ Elastizitätsmodul, $\eta\dots$ Viskosität (oder Zähigkeit) $J(t-t_0)\dots$ Nachgiebigkeitsfunktion, $R(t-t_0)\dots$ Relaxationsfunktion

Boltzmannsches Superpositionsprinzip

Bei Aufbringen mehrerer Spannungsinkremente lautet der Verzerrungsverlauf:

$$\varepsilon(t) = J(t-t_0)\Delta\sigma_0 + J(t-t_1)\Delta\sigma_1 + J(t-t_2)\Delta\sigma_2 + \dots + J(t-t_n)\Delta\sigma_n = \sum_{i=0}^n J(t-t_i)\Delta\sigma_i . \quad (3.4)$$

Analog dazu lautet der Spannungsverlauf bei Aufbringen mehrerer Verzerrungsinkremente:

$$\sigma(t) = R(t-t_0)\Delta\varepsilon_0 + R(t-t_1)\Delta\varepsilon_1 + R(t-t_2)\Delta\varepsilon_2 + \dots + R(t-t_n)\Delta\varepsilon_n = \sum_{i=0}^n R(t-t_i)\Delta\varepsilon_i .$$
(3.5)

Die Nachgiebigkeits- und Relaxationsfunktionen sind dabei wie folgt definiert:

MAXWELLsches Modell	Kelvin-Voigtsches Modell	
$J(t - t_i) = \frac{1}{E} + \frac{t - t_i}{\eta}, \ R(t - t_i) = Ee^{-\frac{E}{\eta}(t - t_i)}$	$J(t - t_i) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}(t - t_i)} \right)$	(3.6)

Beispiel: Stab unter Zugbeanspruchung

Geg.: Ein Zugstab mit in der nachstehenden Abbildung definierter Länge. Der Stab, dessen Querschnittsfläche 12 cm^2 beträgt, wird mit einer konstanten Zugkraft P = 1800 kN belastet. Weiters weist der gegebene Stab einen Elastizitätsmodul von $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$ und eine Viskosität von $\eta = 5.85 \times 10^6 \text{ kN d/cm}^2$ auf.



Ges.: Für den MAXWELLschen und den KELVIN-VOIGTschen Körper:

- 1. die Stabverlängerung unmittelbar nach Lastaufbringung $(t=t_0^+=0^+), \label{eq:tau}$
- 2. der Zeitpunkt, zu dem der Stab die Unterlage berührt,
- der Zeitpunkt, zu dem die Spannung im Stab auf die Hälfte des ursprünglichen Wertes abgesunken ist,
- 4. die Verzerrungsverläufe für eine gegebene abstufte Belastungsgeschichte.

ad (a): Längenänderung unmittelbar nach Lastaufbringung

Maxwellscher Körper: Bei Betrachtung des MAXWELLschen Körpers muss zwischen dem Zeitpunkt t_0^- und t_0^+ unterschieden werden. Es gilt

$$t_0^- = \lim_{\epsilon \to 0} (t_0 - \epsilon) , \qquad t_0^+ = \lim_{\epsilon \to 0} (t_0 + \epsilon) .$$

$$(3.7)$$

Der Zeitpunkt unmittelbar nach der Lastaufbringung wird daher mit t_0^+ bezeichnet. Mit $\sigma_0 = \Delta \sigma_0 = P/A$ ergibt sich Gleichung (3.1) nach Auswertung für $t = t_0^+$ zu:

$$\varepsilon(t_0^+) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E} + \frac{\overbrace{t_0^+ - t_0}^{=0}}{\eta}\right) = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{P}{EA} = \frac{1800}{20500 \cdot 12} = 0,007317.$$
(3.8)

Die elastische Längenänderung für den MAXWELLschen Körpers ergibt sich somit zu

$$\Delta l(t_0^+) = \varepsilon(t_0^+) \, l_0 = 0,007317 \cdot 80 = 0,585 \, \text{cm} < 2 \, \text{cm}.$$
(3.9)

Kelvin-Voigtscher Körper: Es wird Gleichung (3.2) für $t = t_0^+$ ausgewertet:

$$\varepsilon(t_0^+) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} \left(t_0^+ - t_0 \right)} \right) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - 1) = 0.$$
(3.10)

Unmittelbar nach Lastaufbringung tritt beim KELVIN-VOIGTschen Körper keine Verzerrung auf:

$$\Delta l(t_0^+) = \varepsilon(t_0^+) \, l_0 = 0 \cdot 80 = 0 \, \text{cm} < 2 \, \text{cm}.$$
(3.11)

Folglich erfolgt die Berührung der Unterlage nicht unmittelbar nach Lastaufbringung.

ad (b): Ermittlung des Berührungszeitpunkts t_1

Maxwellscher Körper: Aus Gleichung (3.1) folgt:

$$\Delta l(t_1) = \varepsilon(t_1) \, l_0 = \sigma_0 \left(\frac{1}{E} + \frac{t_1 - t_0}{\eta}\right) \, l_0 = \frac{P}{A} \left(\frac{1}{E} + \frac{t_1 - t_0}{\eta}\right) \, l_0 = 2 \, \mathrm{cm} \,. \tag{3.12}$$

Durch Umformen erhält man jenen Zeitpunkt, an dem der Zugstab die Unterlage berührt:

$$t_1 = t_0 + \eta \left(\frac{2A}{P l_0} - \frac{1}{E}\right) = 0 + 5,85 \cdot 10^6 \left(\frac{2 \cdot 12}{1800 \cdot 80} - \frac{1}{20500}\right) = 689,6 \,\mathrm{d}\,. \tag{3.13}$$

Kelvin-Voigtscher Körper: Aus Gleichung (3.2) folgt:

$$\Delta l(t_1) = \varepsilon(t_1) \, l_0 = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}(t_1 - t_0)} \right) \, l_0 = \frac{P}{EA} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}(t_1 - t_0)} \right) \, l_0 = 2 \, \mathrm{cm} \,. \tag{3.14}$$

Umformen von Gleichung (3.14) ergibt:

$$t_1 = t_0 - \frac{\eta}{E} \ln\left(1 - \frac{2EA}{Pl_0}\right) = t_0 - \frac{\eta}{E} \ln(-2,417) = \dots \quad (\text{error!}). \tag{3.15}$$

Zur Ermittlung des Berührzeitpunktes für einen KELVIN-VOIGTschen Körper ist also der Logarithmus einer negativen Zahl zu bilden. Offenkundig ergibt eine solche Operation keine natürliche Zahl – die physikalische Interpretation dieses Befundes lautet, dass der Stab die Unterlage *nie* berührt. Die maximale Längenänderung ergibt sich für $t = \infty$:

$$\Delta l(t=\infty) = \varepsilon(t=\infty)l_0 = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \underbrace{e^{-\frac{E}{\eta}(\infty - t_0)}}_{=0}\right)l_0 = \frac{P \, l_0}{E \, A} = \frac{1800 \cdot 80}{20500 \cdot 12} = 0,585 \,\mathrm{cm}\,. \tag{3.16}$$

ad (c): Relaxation auf die Hälfte der Ausgangsspannung (Maxwellscher Körper)

Die mathematische Beschreibung von Relaxation in einem MAXWELL-Körper ist in Gleichung (3.3) gegeben. Die Spannung am Relaxationsbeginn, das ist die Spannung zum Berührzeitpunkt, ergibt sich zu $\sigma(t_1) = \sigma_0 = P/A$. Gesucht ist jener Zeitpunkt t_2 , zu dem sich die Spannung im Stab auf die Hälfte der Ausgangsspannung reduziert hat. Somit gilt:

$$\sigma(t_2) = \sigma(t_1) e^{-\frac{E}{\eta}(t_2 - t_1)} = \frac{1}{2} \sigma(t_1) .$$
(3.17)

Nach Kürzen durch $\sigma(t_1)$ und unter Beachtung von $\ln(\frac{1}{2}) = \ln(1) - \ln(2) = 0 - \ln(2) = -\ln(2)$ kann t_2 wie folgt ausgedrückt werden:

$$t_2 = \frac{\eta}{E} \ln 2 + t_1 = \frac{5,85 \cdot 10^6}{20500} \ln 2 + 689, 6 = 197, 8 + 689, 6 = 887, 4 \,\mathrm{d} \,. \tag{3.18}$$



Abbildung 3.1: Spannungs- und Verzerrungsverläufe

ad (d): Abgestufte Belastungsgeschichten

Die Anwendung des BOLTZMANNschen Superpositionsgesetzes, siehe Gleichungen (3.4) - (3.6), wird nun anhand eines Beispiels demonstriert. Gegeben ist ein Körper mit viskoelastischem Materialverhalten. Die Kennwerte E und η sowie die Belastungsgeschichte sind in Abbildung 3.2 angegeben. Gesucht ist die Verzerrung zum Zeitpunkt t = 420 d.



$$\varepsilon(t = 300^{-}d) = \left(\frac{1}{20600} + \frac{300 - 25}{4 \cdot 10^{6}}\right) \cdot 400 - \left(\frac{1}{20600} + \frac{300 - 175}{4 \cdot 10^{6}}\right) \cdot 300 = 0,02298$$
Kelvin-Voigtscher Körper:

$$\varepsilon(t = 175^{+}d) = \frac{1}{20600} \left(1 - e^{-\frac{20600}{4 \cdot 10^{6}}(175 - 25)}\right) \cdot 400 - \frac{1}{20600} \left(1 - e^{-\frac{20600}{4 \cdot 10^{6}}(300 - 175)}\right) \cdot 300 = 0,01045$$

$$\varepsilon(t = 300^{-}d) = \frac{1}{20600} \left(1 - e^{-\frac{20600}{4 \cdot 10^{6}}(300 - 25)}\right) \cdot 400 - \frac{1}{20600} \left(1 - e^{-\frac{20600}{4 \cdot 10^{6}}(300 - 175)}\right) \cdot 300 = 0,007794$$

$$\boxed{300 \ d \le t < 450 \ d:} \text{ (Berechnung analog)}$$
Maxwellscher Körper: $\varepsilon(t = 300^{+}d) = 0,03026; \ \varepsilon(t = 450^{-}d) = 0,03964$
Kelvin-Voigtscher Körper: $\varepsilon(t = 300^{+}d) = 0,007794; \ \varepsilon(t = 450^{-}d) = 0,01013$

$$\boxed{t \ge 450 \ d:} \text{ (Berechnung analog)}$$

Maxwellscher Körper: $\varepsilon(t = 450^{+}d) = 0.0275$; danach bleibt $\varepsilon(t)$ konstant Kelvin-Voigtscher Körper: $\varepsilon(t = 450^{+}d) = 0.01013$; $\varepsilon(t) \to 0$ für $t \to \infty$



 Weitere Angaben zum Üben:

 MAXWELLscher Körper

 $\varepsilon(t = 100 \text{ d}) = 2,692 \cdot 10^{-2}$
 $\varepsilon(t = 200 \text{ d}) = 2,048 \cdot 10^{-2}$
 $\varepsilon(t = 300^- \text{ d}) = 2,298 \cdot 10^{-2}$
 $\varepsilon(t = 300^+ \text{ d}) = 3,026 \cdot 10^{-2}$
 $\varepsilon(t = 500 \text{ d}) = 2,750 \cdot 10^{-2}$
 $\varepsilon(t = 500 \text{ d}) = 2,750 \cdot 10^{-2}$

 KELVIN-VOIGTScher Körper

 $\varepsilon(t = 100 \text{ d}) = 6,221 \cdot 10^{-3}$
 $\varepsilon(t = 300 \text{ d}) = 7,794 \cdot 10^{-3}$
 $\varepsilon(t = 500 \text{ d}) = 7,831 \cdot 10^{-3}$

Erweiterungen zur Viskoelastizität

Für folgende Arten der Lastaufbringung werden Nachgiebigkeitsfunktionen angegeben:

$$\begin{array}{c} \sigma(t) \\ \hline & \Delta \sigma_i \\ \hline & t_i \end{array} \varepsilon(t) = \Delta \sigma_i \cdot J(t-t_i) \quad \forall \ t \ge t_i \ , \\ \hline & t_j \end{array} \begin{array}{c} \sigma(t) \\ \hline & \Delta \sigma_j^* \\ \hline & t_j \end{array} \varepsilon(t) = \Delta \sigma_j^* \cdot J^*(t-t_j) \quad \forall \ t \ge t_j \ . \end{array}$$

Das BOLTZMANNsche Superpositionsgesetz lautet in entsprechend erweiterter Form somit:

Γ

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta \sigma_i \cdot J(t-t_i) + \sum_{j=1}^{m} \Delta \sigma_j^* \cdot J^*(t-t_j).$$
(3.19)

$$E_{v} = \prod_{i=1}^{\sigma(t)} \eta \qquad \int_{t_{i}}^{\sigma(t)} \frac{\int_{t_{i}}^{\sigma(t)} \Delta \sigma_{i}}{\int_{t_{i}}^{\sigma(t)} \Delta \sigma_{j}^{*}} \qquad J(t-t_{i}) = \frac{1}{E_{v}} \left(1 - e^{-\frac{E_{v}}{\eta}(t-t_{i})}\right)$$

$$\mathcal{D}_{j}^{*} \quad J^{*}(t-t_{j}) = \frac{t-t_{j}}{E_{v}} - \frac{\eta}{(E_{v})^{2}} \left(1 - e^{-\frac{E_{v}}{\eta}(t-t_{j})}\right)$$

Relaxation

 t_i

nicht beschreibbar

$$E_{v} \xrightarrow{E_{el}} \eta \xrightarrow{\sigma(t)} J^{*}(t-t_{i}) = \frac{1}{E_{el}} + \frac{1}{E_{v}} \left(1 - e^{-\frac{E_{v}}{\eta}(t-t_{i})}\right)$$

$$E_{v} \xrightarrow{\sigma(t)} \eta \xrightarrow{\sigma(t)} J^{*}(t-t_{j}) = (t-t_{j}) \frac{E_{v} + E_{el}}{E_{v} E_{el}} - \frac{\eta}{(E_{v})^{2}} \left(1 - e^{-\frac{E_{v}}{\eta}(t-t_{j})}\right)$$

$$\sigma(t) = \sigma(t_{r}) e^{-\frac{E_{v} + E_{el}}{\eta}(t-t_{r})} + \varepsilon(t_{r}) \frac{E_{v} E_{el}}{E_{v} + E_{el}} \left(1 - e^{-\frac{E_{v} + E_{el}}{\eta}(t-t_{r})}\right)$$

$$INGENIEURMECHANIK - ÜBUNGEN$$

Anwendungsbeispiel: Pfahlgründung

Gegeben ist ein Bauwerk, welches in guter Näherung eine Flächenlast von $q_{\text{Bauwerk}} = 50 \text{ kN/m}^2$ auf die darunterliegende Gründung ausübt. Es ist eine Tiefengründung durch kreiszylindrische Pfähle aus Beton (mit einem Elastizitätsmodul von E = 30 GPa) vorgesehen, wobei der Pfahldurchmesser mit $d_{\text{Pfahl}} = 40 \text{ cm}$ gegeben ist und die Pfahllänge durch eine in 8 m Tiefe liegende, als unverschieblich anzunehmende Felsschicht ebenfalls festgelegt ist. Das die Pfähle umgebende Erdreich erlaubt es, eine Mantelreibung von $\tau_{\text{Mantel}} = 0.04 \text{ MN/m}^2$ anzusetzen und die Felsschicht, auf welcher die Pfähle zusätzlich gelagert sind, gewährleistet einen Spitzendruck von $\sigma_{\text{Spitze}} = 4 \text{ MN/m}^2$.



Gesucht:

- (a) Der Pfahlabstand a, bei Annahme eines quadratischen Pfahlrasters, sodass die gegebene Bauwerkslast über die Pfähle (deren Eigengewicht als vernachlässigbar angenommen werden kann) ins Erdreich und in die darunterliegende Felsschicht abgetragen werden kann.
- (b) Die Setzung des Bauwerks zufolge elastischer Axialverformungen der Pfähle.
- (c) In 1 cm Tiefe sind vereinzelt Reste eines ehemaligen Streifenfundaments zu finden. Es ist zu überprüfen, ob es durch viskoelastische Axialverformungen der Pfähle zu einer Berührung der Bauwerksunterkante mit diesen Fundamentkörpern kommt.

Bemerkungen: Es ist anzunehmen, dass die Lastabtragung durch Kontakt des Erdreichs mit der Bauwerksunterkante vernachlässigbar klein ist. Weiters sind die zu untersuchenden Pfähle näherungsweise als Dehnstäbe zu betrachten.

(a): Ermittlung des Pfahlabstands

Der Theorie der Dehnstäbe entsprechend, gehen in die Gleichgewichtsbedingung für die resultierenden Kraftgrößen die Normalkräfte N(x) und die sogenannten Streckenlasten $n_x(x)$ ein,

$$\frac{\mathrm{d}N(x)}{\mathrm{d}x} = -n_x(x)\,.\tag{3.20}$$

Da das Eigengewicht der Angabe zufolge zu vernachlässigen ist, $f_x = 0$, wird als Streckenlast die Kraft zufolge Mantelreibung angesetzt, $n_x(x) = n_x = q_{\text{Mantel}}$,¹

$$q_{\text{Mantel}} = U_{\text{Pfahl}} \cdot \tau_{\text{Mantel}} = d_{\text{Pfahl}} \cdot \pi \cdot \tau_{\text{Mantel}} = 0, 4 \cdot \pi \cdot 0, 04 = 5,0265 \cdot 10^{-2} \,\text{MN/m} \,. \tag{3.21}$$

Die Verteilung der im Pfahl vorherrschenden Normalkraft folgt durch Integration von Gleichung (3.20):

$$N_{\text{Pfahl}}(x) = -\int_{0}^{x} q_{\text{Mantel}} \, \mathrm{d}x = -q_{\text{Mantel}} \cdot x + C_1 \,, \qquad (3.22)$$

wobei die Integrationskonstante aus der Randbedingung an der Stelle x = 0 ermittelt wird:

$$N_{\text{Pfahl}}(x=0) = -q_{\text{Mantel}} \cdot 0 + C_1 = C_1.$$
(3.23)

An der Stelle x = 0 entspricht die für die Dimensionierung maßgebliche Normalkraft aber der von der Felsschicht aufnehmbaren Spitzendruckkraft, d.h.

$$N_{\text{Pfahl}}(x=0) = N_{\text{Spitze}} = -\sigma_{\text{Spitze}} \cdot A_{\text{Pfahl}} = -4 \cdot \frac{0.4^2 \cdot \pi}{4} = -5.0265 \cdot 10^{-1} \,\text{MN} \,. \tag{3.24}$$

Das negative Vorzeichen von N_{Spitze} in Gleichung (3.24) ist dadurch begründet, dass es sich bei den in den Pfählen vorherrschenden Normalkräften *ausschließlich* um Druckkräfte handelt. Die maximal in einen der Pfähle einleitbare Normalkraft beträgt unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.22)–(3.24):

$$N_{\text{Pfahl}}^{0} = N_{\text{Pfahl}}(x=l) = -q_{\text{Mantel}} \cdot l + N_{\text{Spitze}} = -5,0265 \cdot 10^{-2} \cdot 8 - 5,0265 \cdot 10^{-1} = -9,0478 \cdot 10^{-1} \text{ MN} .$$
(3.25)

Der Pfahlabstand in einem quadratischen Raster folgt schließlich aus einer Gleichgewichtsbetrachtung:

$$N_{\rm Pfahl}^{0} = -a^{2} \cdot q_{\rm Bauwerk} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{-\frac{N_{\rm Pfahl}^{0}}{q_{\rm Bauwerk}}} = \sqrt{\frac{9,0478 \cdot 10^{-1}}{5 \cdot 10^{-2}}} = 4,2539 \,\mathrm{m.} \tag{3.26}$$

Ein Pfahlabstand von $\approx 4 \,\mathrm{m}$ stellt also unter den getroffenen Annahmen sicher, dass die Bauwerkslast in das Erdreich abgetragen werden kann.

¹Die exakte räumliche Verteilung der Mantelreibungskräfte hängt von der Art des Erdreichs bzw. der gewählten Gründung ab; im gegenständlichen Fall wird eine konstante, positionsunabhängige Mantelreibung angesetzt.

(b): Bauwerkssetzung zufolge elastischer Pfahlverformungen in Axialrichtung

Kombination des Hookeschen Gesetzes für einen (wie im untersuchten Fall maßgeblichen) einaxialen Spannungszustand, $\sigma_{xx}(x) = E \cdot \varepsilon_{xx}(x)$, mit der für Dehnstäbe gültigen Normalkraft-Normalspannungbeziehung $\sigma_{xx}(x) = N(x)/A$ ergibt

$$N(x) = EA \cdot \varepsilon_{xx}(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}N(x)}{\mathrm{d}x} = EA \cdot \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{xx}(x)}{\mathrm{d}x} \,. \tag{3.27}$$

Durch Berücksichtigung der Definition der Komponente ε_{xx} des linearisierten Verzerrungstensors, $\varepsilon_{xx} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, sowie von Gleichung (3.20) bzw. der Spezialisierung $n(x) = q_{\text{Mantel}}$ erhält man nun

$$E_{\text{Beton}} \cdot A_{\text{Pfahl}} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u_{\text{Pfahl}}(x)}{\mathrm{d}x^2} = -q_{\text{Mantel}} \,. \tag{3.28}$$

Durch zweimalige Integration von Gleichung (3.28) folgt:

$$u_{\text{Pfahl}}(x) = \frac{1}{E_{\text{Beton}} \cdot A_{\text{Pfahl}}} \cdot \left[-q_{\text{Mantel}} \cdot \frac{x^2}{2} + N_{\text{Spitze}} \cdot x + C_2 \right], \qquad (3.29)$$

wobei die Integrationskonstante C_1 , welche aus der ersten Integration folgt, wie bei Punkt (a) gezeigt ermittelt wird. Die Integrationskonstante C_2 folgt durch Anpassung von Gleichung (3.29) an die Verschiebungsrandbedingung an der Stelle x = 0,

$$u_{\text{Pfahl}}(x=0) = \frac{1}{E_{\text{Beton}} \cdot A_{\text{Pfahl}}} \cdot \left[-q_{\text{Mantel}} \cdot 0 + N_{\text{Spitze}} \cdot 0 + C_2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$
(3.30)

Die Setzung des Bauwerks entspricht der Axialverschiebung an der Stelle x = l:

$$u_{\text{Pfahl}}(x=l) = \Delta l = -\frac{4}{30000 \cdot 0.4^2 \cdot \pi} \cdot \left[5.0265 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{8^2}{2} + 5.0265 \cdot 10^{-1} \cdot 8 \right]$$

= -1.4933 \cdot 10^{-3} m. (3.31)

(c): Bauwerkssetzung zufolge viskoelast. Pfahlverformungen in Axialrichtung

In Kapitel 3 wurden einfache Feder-Dämpfer-Modelle zur Beschreibung von eindimensionalviskoelastischem Materialverhalten verwendet. Für Materialien, deren Mikrostruktur (und somit deren viskoelastisches Materialverhalten) eine zeitliche Entwicklung durchläuft (wie z.B. Beton) – man spricht von "alternden" Materialien – sind diese einfachen Modelle allerdings nur begrenzt anwendbar, da die zugrundeliegenden Materialparameter, also Federsteifigkeiten und Dämpferviskositäten, ja ebenfalls zeitlich veränderlich sein müssten. In der Praxis haben sich für Beton sogenannte Potenzgesetze ("power laws") als sinnvolle mathematische Beschreibungungen Komponenten der Nachgiebigkeitstensoren $\mathbf{J}(t, t_0)$ und Relaxationstensoren $\mathbf{R}(t, t_0)$ erwiesen.² Für

²Bzw. Nachgiebigkeitsfunktionen $J(t, t_0)$ und Relaxationsfunktionen $R(t, t_0)$ im Falle eindimensionaler Viskoelastizität.

die Betonpfähle, die im gegenständlichen Beispiel untersucht werden, wenden wir die von Bažant vorgeschlagene Kriechfunktion an³:

$$J_{\text{Beton}}(t,t_0) = \frac{1}{E^*} + \frac{\phi_1}{E^*} \left[(t_0)^{-m} + \alpha \right] \cdot (t-t_0)^n , \qquad (3.32)$$

wobei gilt: $E^* = 1,5 \cdot E = 45000 \text{ MN/m}^2$ mit $E = E_{\text{Beton}}, \phi_1 = 4,5, m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{8}$ und $\alpha = \frac{1}{20}$; weiters wird angenommen, dass das Betonalter bei Lastaufbringung $t_0 = 100 \text{ d}$ beträgt. Um die viskoelastisch bedingte zeitliche Entwicklung des Verzerrungsverlaufes entlang der Pfahlachse zu bestimmen, wird die in Gleichung (3.32) definierte Nachgiebigkeitsfunktion in die allgemeine Form des eindimensionalen Kriechgesetzes eingesetzt:

$$\varepsilon_{\text{Pfahl},xx}(x,t) = \sigma_{\text{Pfahl},xx}(x) \cdot J_{\text{Beton}}(t,t_0) = \frac{(-q_{\text{Mantel}} \cdot x + N_{\text{Spitze}})}{A_{\text{Pfahl}}} \cdot J_{\text{Beton}}(t,t_0)$$
(3.33)

Die Verschiebung an der Stelle l folgt durch Integration von Gleichung (3.33):

$$u_{\text{Pfahl}}(x=l,t) = \int_{0}^{l} \varepsilon_{\text{Pfahl},xx}(x,t) \, \mathrm{d}x = -\frac{J_{\text{Beton}}(t,t_{0})}{A_{\text{Pfahl}}} \int_{0}^{l} (q_{\text{Mantel}} \cdot x - N_{\text{Spitze}}) \, \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{J_{\text{Beton}}(t,t_{0})}{A_{\text{Pfahl}}} \left(q_{\text{Mantel}} \cdot \frac{l^{2}}{2} - N_{\text{Spitze}} \cdot l \right) \,.$$
(3.34)

Ersetzen von $J_{\text{Beton}}(t, t_0)$ durch die in Gleichung (3.32) gegebene Definition und entsprechendes Umformen erlaubt es nun auszurechnen, ob bzw. wann eine Bauwerkssetzung von $\bar{u} = 1 \text{ cm}$ erreicht wird:

$$t[u_{\text{Pfahl}}(x=l)=\bar{u}] = t_0 + \left(\frac{\frac{\bar{u}\cdot A_{\text{Pfahl}}}{-q_{\text{Mantel}}\cdot\frac{l^2}{2} + N_{\text{Spitze}}\cdot l} - \frac{1}{E^*}}{\frac{\phi_1}{E^*}\left[(t_0)^{-m} + \alpha\right]}\right)^{n^{-1}} = 5,3424 \cdot 10^7 \,\mathrm{d} \approx 146368 \,\mathrm{y} \ (3.35)$$

Wenn man eine Lebensdauer des gegenständlichen Bauwerks von etwa 150 Jahren zugrundelegt, lautet die Schlussfolgerung also, dass die Bauwerksunterkante die im Erdreich verbliebenen Fundamentkörper, welche zu eventuell ungünstigen Lastumlagerungen führen könnten, zufolge viskoelastischer Axialverformungen der Betonpfähle (bei gleichbleibender Belastung!) *nie* berühren wird.

³Siehe Z.P. Bažant, Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete, 1988, John Wiley & Sons Ltd.

4. ELASTOPLASTIZITÄT

Im Gegensatz zu elastischen Deformationen bleiben plastische Deformationen auch nach der Entlastung bestehen. Im Folgenden wird gezeigt, wie sich Materialien plastisch deformieren, abhängig davon, welcher Fließregel sie gehorchen. Aufbauend auf dem in der Vorlesung gezeigten Anwendungsbeispiel für ein VON MISES-Material sollen nun verschiedene Fließregeln untersucht werden. Dabei interessiert uns die "*Richtung*" (aber nicht die Größe) des plastischen Flusses. Diese "Richtung", d.h. die Verhältnisse aller plastisch hervorgerufenen Winkel- und Längenänderungen, wird durch die sogenannte Fließregel

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \qquad (4.1)$$

mit gals dem plastischen Potential und $\dot{\lambda}$ als Konsistenzparameter oder plastischer Multiplikator, bestimmt.

In diesem Kapitel wird von assoziierter Plastizität ausgegangen, d. h. das plastische Potential gentspricht der Fließfunktion f (g = f). Die Fließfunktion definiert das Auftreten plastischer Prozesse: Solange $f(\boldsymbol{\sigma}) < 0$ liegt rein elastisches Materialverhalten vor ($\dot{\lambda} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0$). Nur für $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \ kann^1$ plastisches Verhalten mit $\dot{\lambda} > 0$ auftreten. Die in diesem Kapitel verwendeten Festigkeitskriterien sind im Anhang auf Seite B1 zusammengefasst.

Der Einfachheit halber gehen wir von isotropen Materialien aus und alle theoretischen Überlegungen erfolgen in der Basis der Hauptnormalspannungen $(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III})$.²

Fließregel nach RANKINE (Zugkriterium)

Für Materialien, die unter Zugbeanspruchung gemäß dem RANKINEkriterium mit der Fließgrenze $f_{y,t}$ versagen, lautet das plastische Potential g wie folgt:

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_I - f_{y,t} \tag{4.2}$$

Die daraus folgende Fließregel und die resultierenden plastischen Verzerrungen (4.1) lassen sich wie folgt beschreiben:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\sigma_{I} - f_{y,t})}{\partial \sigma_{I}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial(\sigma_{I} - f_{y,t})}{\partial \sigma_{II}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial(\sigma_{I} - f_{y,t})}{\partial \sigma_{III}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I},\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I},\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}}$$
(4.3)

¹Es kann für bestimme Zustände sowohl f als auch $\dot{\lambda}$ ident null sein.

²Mit den Komponenten des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_I \mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_I + \sigma_{II} \mathbf{e}_{II} \otimes \mathbf{e}_{II} + \sigma_{III} \mathbf{e}_{III} \otimes \mathbf{e}_{III}$

Fließregel nach RANKINE (Druckkriterium)

Für Materialien, die unter Druckbeanspruchung gemäß dem RANKINE
kriterium mit der Fließgrenze $f_{y,c}$ versagen, lautet das plastische Potential g wie folgt:

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}) = -f_{y,c} - \sigma_{III} \tag{4.4}$$

Die daraus folgende Fließregel und die resultierenden plastischen Verzerrungen (4.1) lassen sich wie folgt beschreiben:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial(-f_{y,c} - \sigma_{III})}{\partial \sigma_{I}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial(-f_{y,c} - \sigma_{III})}{\partial \sigma_{II}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial(-f_{y,c} - \sigma_{III})}{\partial \sigma_{III}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I},\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I},\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}}$$
(4.5)

Interpretation für einen eindimensionalen Spannungszustand:

Aus (4.3) und (4.5) kann man sofort sehen, dass die betrachteten Spannungszustände, die nach der entsprechend formulierten RANKINEschen Fließfunktion zum Versagen (Fließen) führen, plastische Verzerrungen (also bleibende Deformationen) *nur* in der \mathbf{e}_I -Richtung (Lastfall Zug) bzw. *nur* in der \mathbf{e}_{III} -Richtung (Lastfall Druck) verursachen. Das Volumen eines Körpers verändert sich aufgrund der plastischen Deformation (nimmt zu bei Zug und nimmt ab bei Druck), aber die Körperabmessungen in der Ebene mit Normalvektor \mathbf{e}_I (Zug) bzw. \mathbf{e}_{III} (Druck) bleiben zufolge plastischer Verzerrungen gleich (für die grafische Interpretation des RANKINEschen Zugkriteriums siehe Abbildung 4.1).



Abbildung 4.1: Deformation eines Körpers bis zum Versagen (Fließen) und nach Eintritt des plastischen Flusses gemäß RANKINEscher Versagensfunktion und entsprechender Fließregel für das RANKINEsche Zugkriterium.

Fließregel nach TRESCA – allgemeiner Spannungszustand

Für Materialien, die gemäß dem TRESCAkriterium mit der Fließgrenze f_y versagen, lautet das plastische Potential g wie folgt:

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_I - \sigma_{III} - f_y \tag{4.6}$$

Für den Fall $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ gilt:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\sigma_{I} - \sigma_{III} - f_{y})}{\partial \sigma_{I}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial(\sigma_{I} - \sigma_{III} - f_{y})}{\partial \sigma_{II}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial(\sigma_{I} - \sigma_{III} - f_{y})}{\partial \sigma_{III}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I}, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I}, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$
(4.7)

Anwendungsbeispiel – allgemeiner Spannungszustand

Gegeben sind die Komponenten des Spannungstensors σ in der Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 10,2 & -0,6 & -3,6\\ -0,6 & -3,5 & 6,1\\ -3,6 & 6,1 & 1,8 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}^{\mathbf{k}N/\mathrm{cm}^2}$$
(4.8)

Außerdem gilt für den untersuchten Werkstoff, dass die Fließgrenzen bei Druck und Zug gleich groß sind $(f_{y,t} = |f_{y,c}|)$.

Gesucht ist die "Richtung" des plastischen Flusses bzgl. der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Basis nach dem Versagen gemäß der Fließkriterien nach RANKINE und TRESCA.

Anmerkung: es wird angenommen, dass der durch σ gegebene Spannungszustand nach den zwei Kriterien plastisches Fließen gerade verursacht.

Hauptnormalspannungen und ihre Richtungen:

Die Komponenten des Spannungstensors $\pmb{\sigma}$ in der Basis, die mit den Spannungshauptrichtungen zusammenfällt, lauten:³

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{I} = 12,085 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} = 4,043 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} = -7,628 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I},\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}}^{\mathrm{kN/cm^{2}}}$$
(4.9)

Die entsprechenden Richtungsvektoren in der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Basis lauten:

$$\mathbf{e}_{I} = \begin{bmatrix} -0,8811\\ 0,2014\\ 0,4278 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{1},\mathbf{e}_{2},\mathbf{e}_{3}} \mathbf{e}_{II} = \begin{bmatrix} 0,4649\\ 0,5341\\ 0,7061 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{1},\mathbf{e}_{2},\mathbf{e}_{3}} \mathbf{e}_{III} = \begin{bmatrix} -0,0863\\ 0,8210\\ -0,5642 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{1},\mathbf{e}_{2},\mathbf{e}_{3}}$$
(4.10)

³Die Ermittlung der Hauptnormalspannungen und ihrer Richtungen wird im Anhang A erläutert.

Fließregel nach RANKINE:

Da die betragsmäßig größte Hauptnormalspannung eine Zugspannung ist, wird das plastische Potential für Zug (4.2) verwendet.⁴ Unter Berücksichtigung von (4.9) und (4.1) ergibt sich die "Richtung" des plastischen Flusses zu:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\sigma_{I} - f_{y,t})}{\partial \sigma_{I}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial(\sigma_{I} - f_{y,t})}{\partial \sigma_{II}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial(\sigma_{I} - f_{y,t})}{\partial \sigma_{III}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I},\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I},\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}}$$
(4.11)

Die "Richtung" des plastischen Flusses ist also durch den \mathbf{e}_I -Basisvektor gegeben. Das bedeutet, dass Fließen in der Richtung der größten Hauptnormalspannung eintritt.

Fließregel nach TRESCA:

Einsetzen der Hauptnormalspannungen gemäß (4.9) in (4.6) und Auswerten der Fließregel (4.1) liefert die "Richtung" des plastischen Flusses als:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\sigma_{I} - \sigma_{III} - 1)}{\partial \sigma_{I}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial(\sigma_{I} - \sigma_{III} - 1)}{\partial \sigma_{II}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial(\sigma_{I} - \sigma_{III} - 1)}{\partial \sigma_{III}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I}, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I}, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$
(4.12)

Im Falle eines triaxialen Spannungszustandes, der nach dem TRESCAschem Fließkriterium zu plastischem Fließen führt, ergibt sich eine positive Komponente des plastischen Flusses in die Richtung der größten Hauptnormalspannung (\mathbf{e}_I) und eine negative Komponente in die Richtung der kleinsten Hauptnormalspannung (\mathbf{e}_{III}). Die Verzerrungsflüsse sind betragsmäßig wiederum gleich groß; trotz der plastischen Deformation bleibt das Materialvolumen also unverändert.

Wie eingangs erwähnt, erlauben die hier verwendeten plastischen Potentiale lediglich qualitative Aussagen hinsichtlich der Richtung des plastischen Flusses. Möchte man hingegen die plastischen Deformationen zufolge einer gegebener Belastung quantitativ erfassen, muss der Konsistenzparameter $\dot{\lambda}$ bestimmt werden, siehe z.B. Kapitel 12.2.5*ff* in H. Mang und G. Hofstetter, *Festigkeitslehre*.

Fließregel nach MISES – zweiaxialer Spannungszustand

Für Materialien, die gemäß dem MISESkriterium mit der Fließgrenze f_y versagen, lautet das plastische Potential g wie folgt:

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2^{\sigma}} - k \tag{4.13}$$

• Lastfall 1: (biaxialer Zug)

Gegeben ist ein zweiaxialer Spannungszustand:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_I \left(\mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_I + \mathbf{e}_{II} \otimes \mathbf{e}_{II} \right) \tag{4.14}$$

⁴Wenn $\sigma_{III} > \sigma_I$ wäre, müsste man für diesen Werkstoff das plastische Potential für Druck (4.4) anwenden.

Gesucht ist die Richtung des plastischen Flusses unter der Annahme, dass das plastische Potential ident mit der Fließfunktion ist.

Lösung: Einsetzen der Fließfunktion (4.13) in die Fließregel (4.1) unter Berücksichtigung von g = f führt auf:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\partial (\sqrt{J_{2}^{\sigma}} - k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \sqrt{J_{2}^{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial \sqrt{J_{2}^{\sigma}}}{\partial \sigma_{I}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial \sqrt{J_{2}^{\sigma}}}{\partial \sigma_{II}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial \sqrt{J_{2}^{\sigma}}}{\partial \sigma_{III}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I}, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$
(4.15)

Die zweite Invariante des Spannungsdeviators, ergibt sich gemäß Seite B1 (Anhang) zu:

$$J_2^{\sigma} = \frac{1}{3} \left[\sigma_I^2 - \sigma_I \cdot \sigma_{II} + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_{III} \cdot (\sigma_I + \sigma_{II}) \right]$$
(4.16)

Die Gleichung des plastischen Flusses (4.15) mit Einsetzen der zweiten Invariante (4.16) ergibt sich unter Berücksichtigung der Kettenregel zu:

$$\dot{\varepsilon}^{p} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{(\sigma_{I} - \sigma_{II}) + (\sigma_{I} - \sigma_{III})}{6 \cdot \sqrt{J_{2}^{\sigma}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\sigma_{II} - \sigma_{I}) + (\sigma_{II} - \sigma_{III})}{6 \cdot \sqrt{J_{2}^{\sigma}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\sigma_{III} - \sigma_{I}) + (\sigma_{III} - \sigma_{III})}{6 \cdot \sqrt{J_{2}^{\sigma}}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I}, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} = \dot{\lambda} \frac{1}{6\sqrt{J_{2}^{\sigma}}} \begin{bmatrix} (\sigma_{I} - \sigma_{II}) + (\sigma_{I} - \sigma_{III}) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{II} - \sigma_{I}) + (\sigma_{II} - \sigma_{III}) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_{III} - \sigma_{I}) + (\sigma_{III} - \sigma_{III}) \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I,II,III}}$$
(4.17)

Konkretisiert man diese Gleichung für den gegeben Spannungszustand in (4.14) folgt:

$$\dot{\varepsilon}^{p} = \dot{\lambda} \frac{1}{6\sqrt{J_{2}^{\sigma}}} \begin{bmatrix} \sigma_{I} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{I} & 0\\ 0 & 0 & -2\sigma_{I} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I}, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} = \dot{\lambda} \frac{\sigma_{I}}{6\sqrt{J_{2}^{\sigma}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I}, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$
(4.18)

• Lastfall 2: (biaxialer Druck)

Gegeben ist ein zweiaxialer Spannungszustand:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{III} \left(\mathbf{e}_{II} \otimes \mathbf{e}_{II} + \mathbf{e}_{III} \otimes \mathbf{e}_{III} \right) \tag{4.19}$$

Gesucht ist die Richtung des plastischen Flusses unter der Annahme, dass das plastische Potential ident mit der Fließfunktion ist.

Lösung: Spezifizierung des plastischen Flusses (4.17) für den Spannungszustand (4.19) ergibt:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \frac{1}{6\sqrt{J_{2}^{\sigma}}} \begin{bmatrix} -2\sigma_{III} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{III} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I}, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$
(4.20)

INGENIEURMECHANIK – ÜBUNGEN 💻

Aus $0 = \sigma_I \ge \sigma_{III}$ folgt $\sigma_{III} \le 0$ und somit ergibt sich obige Gleichung (4.20) zu:

$$\dot{\varepsilon}^{p} = \dot{\lambda} \frac{|\sigma_{III}|}{6\sqrt{J_{2}^{\sigma}}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I}, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$
(4.21)

Fließregel nach MOHR-COLOUMB

Für Materialien, die gemäß dem MOHR-COLOUMB-Kriterium versagen, lautet das plastische Potential g wie folgt:

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_I \left(1 + \sin\varphi\right) - \sigma_{III} \left(1 - \sin\varphi\right) - 2c \cos\varphi$$
(4.22)

Gesucht ist die Richtung des plastischen Flusses für einen allgemeinen Spannungszustand mit $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ mit den Materialparametern $0 \le \varphi < \pi/2$ und $c \in \mathbb{R}^+$ unter der Annahme, dass das plastische Potential ident mit der Fließfunktion ist.

Lösung: Einsetzen der Fließfunktion (4.22) in die Fließregel (4.1) unter Berücksichtigung von g = f führt auf:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\partial (\sigma_{I} (1 + \sin \varphi) - \sigma_{III} (1 - \sin \varphi))}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{II}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{III}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I}, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} (1 + \sin \varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \sin \varphi) \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I}, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$
(4.23)

Gegeben ist der Spannungszustand aus (4.8) mit den MOHR-COLOUMB-Parametern $c = 100 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{8}$.

Gesucht ist die Richtung des Plastischen Flusses

Lösung: Der plastische Fluss ergibt sich zu

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} (1+\sin\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\sin\varphi) \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I},\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}} \approx \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 1,382\,68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,617\,32 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{I},\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}}$$
(4.24)

Fließregel nach DRUCKER-PRAGER

Gegeben ist der Spannungszustand aus (4.8).

Gesucht ist die Richtung des plastischen Flusses in Abhängigkeit von den Materialparametern $k \in \mathbb{R}^+$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$ unter der Annahme, dass das plastische Potential ident mit der Fließfunktion ist.

Diese Aufgabe kann freiwillig erledigt werden, um zu kontrollieren, ob man die gelernten Inhalte verstanden hat und anwenden kann.

5. HYPERELASTIZITÄT

In diesem Kapitel werden Materialmodelle angewendet, um isotropes hyperelastisches Materialverhalten mathematisch zu beschreiben. Im Falle großer Deformationen bewegt sich ein Materialpunkt (dem eine Energiedichte ψ zugeordnet ist) vom geometrischen Punkt **X** in der Referenzkonfiguration zum geometrischen Punkt **x** in der Momentankonfiguration, wobei das ihn umgebende infinitesimale Volumselement ebenso einer Veränderung unterworfen ist: $dV_0(\mathbf{X}) \rightarrow dV(\mathbf{x})$. D.h. es ist sinnvoll, die Energiedichte (Energie pro Volumen) nicht einem veränderlichen Volumselement, sondern einem konstanten Massenelement ("Massenerhaltungssatz") zuzuordnen. Der Übergang von einer volumenbezogenen Energiedichte ψ ("Energie pro Volumen") zu einer massenbezogenen Energiedichte ψ_{ρ} ("Energie pro Masse") lautet

$$\psi_{\rho}(\mathbf{x}) = \frac{\psi(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})},\tag{5.1}$$

mit der aktuellen Massendichte $\rho(\mathbf{x})$.

Auf Basis dieser massenbezogenen Energiedichte, sowie der Clausis-Duhem Gleichung (siehe Vorlesungsskriptum) erhalten wir das Materialgesetz der Hyperelastizität, welches lautet:

$$\boldsymbol{\pi} = \rho_0 \, \frac{\partial \psi_{\rho}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \,, \tag{5.2}$$

mit der initialen Massendichte $\rho_0(\mathbf{X})$. Dabei wird mit Hilfe der Energiedichte ein Zusammenhang zwischen dem zweiten PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensor π und dem GREEN-LAGRANGEschen Verzerrungstensor \mathbf{E} hergestellt, d.h. bei hyperelastischen Materialverhalten wird davon ausgegangen, dass die Energiedichte eine Funktion eines objektiven Verzerrungstensors ist – in diesem Fall eine Funktion des GREEN-LAGRANGEschen Verzerrungstensors \mathbf{E} und daher (bei isotropem Materialverhalten) auch Funktion von dessen Invarianten I_i^E ist. Daraus folgt, durch Anwendung der Kettenregel,

$$\boldsymbol{\pi} = \rho_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_\rho(I_1^E, ..., I_n^E)}{\partial I_i^E} \cdot \frac{\partial I_i^E}{\partial \mathbf{E}} \,. \tag{5.3}$$

Weiters können wir, unter Verwendung des Deformationsgradienten \mathbf{F} , vom fiktiven (in der unverformten Lage definierten) zweiten PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensor $\boldsymbol{\pi}$ auf den (tatsächlich in der verformten Lage wirkenden) CAUCHYschen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ schließen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \,\boldsymbol{\pi} \, \mathbf{F}^T = \rho \, \mathbf{F} \, \frac{\partial \psi_{\rho}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \, \mathbf{F}^T \,, \tag{5.4}$$

mit $J = \det \mathbf{F} = \rho_0 / \rho$ als der Jacobi-Determiante. Der (symmetrische) GREEN-LAGRANGEsche Verzerrungstensor **E** sowie der (im Allgemeinen nicht symmetrische) Deformationsgradient **F** sind durch ein gegebenes Verschiebungsfeld **u** wie folgt definiert:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right], \qquad \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{1}.$$
(5.5)
Bei Wahl des Koordinatensystems in den Verzerrungshauprichtungen, e_I , e_{II} , e_{III} , vereinfacht sich der Deformationsgradient zu

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_I & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{II} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{III} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} \quad \text{mit} \quad J = \det \mathbf{F} = \lambda_I \lambda_{II} \lambda_{III} , \quad (5.6)$$

mit den Streckungen $\lambda_I = \partial u_I / \partial X_I + 1$, $\lambda_{II} = \partial u_{II} / \partial X_{II} + 1$, und $\lambda_{III} = \partial u_{III} / \partial X_{III} + 1$. In analoger Weise kann die elastische Energiedichte auch als Funktion des für hyperelastische Materialmodelle häufig verwendeten CAUCHY-GREENschen Streck-Tensors, $\mathbf{C} = 2 \mathbf{E} + \mathbf{1} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$, angegeben werden, mit $\psi_{\rho}(\mathbf{E}) = \overline{\psi}_{\rho}(\mathbf{C})$. Daraus ergibt sich das zu (5.2) und (5.3) äquivalente Materialgesetz der Hyperelastizität

$$\boldsymbol{\pi} = 2\,\rho_0\,\frac{\partial\overline{\psi}_{\rho}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} = 2\,\rho_0\,\sum_{i=1}^n \frac{\partial\overline{\psi}_{\rho}(I_1^C,...,I_n^C)}{\partial I_i^C} \cdot \frac{\partial I_i^C}{\partial\mathbf{C}}\,,\tag{5.7}$$

wobei die Energiedichte $\overline{\psi}_{\rho}$ nun als Funktion des CAUCHY-GREENschen Streck-Tensors **C** bzw. (bei isotropem Materialverhalten) als Funktion von dessen Invarianten I_i^C definiert ist. Die Berechung von σ erfolgt analog zu Gleichung (5.4) mit

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \,\boldsymbol{\pi} \, \mathbf{F}^T = 2 \,\rho \, \mathbf{F} \, \frac{\partial \overline{\psi}_{\rho}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \, \mathbf{F}^T \,.$$
(5.8)

Im Falle von isotropem Materialverhalten ist die Energiedichte im Allgemeinen eine Funktion von nur drei Invarianten eines objektiven Verzerrungstensors **A** (z.B. GREEN-LAGRANGEscher Verzerrungstensor **E** oder CAUCHY-GREENscher Streck-Tensor **C**) mit den zugehörigen Eigenwerten A_I , A_{II} , und A_{III} . Die in der Literatur am häufigsten verwendeten drei Invarianten lauten

$$I_{1}^{A} = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = A_{I} + A_{II} + A_{III},$$

$$I_{2}^{A} = \frac{1}{2} \left[(\operatorname{tr}\mathbf{A})^{2} - \operatorname{tr}(\mathbf{A}^{2}) \right] = A_{I} A_{II} + A_{II} A_{III} + A_{III} A_{I},$$

$$I_{3}^{A} = \operatorname{det}(\mathbf{A}) = A_{I} A_{II} A_{III}.$$
(5.9)

Weiters können wir (je nach Materialverhalten) weitere Invarianten definieren, welche Ausdrücke der ersten drei Invarianten (5.9) sind. Exemplarisch zeigen wir drei weitere mögliche Invarianten, welche lauten

$$\begin{aligned}
I_4^A &= \operatorname{tr}(\mathbf{A}^2) = A_I^2 + A_{II}^2 + A_{III}^2 \\
&\equiv (I_1^A)^2 - 2I_2^A, \\
I_5^A &= \operatorname{tr}(\mathbf{A}^3) = A_I^3 + A_{II}^3 + A_{III}^3 \\
&\equiv 3I_3^A + (I_1^A)^3 - 3I_1^A I_2^A, \\
I_6^A &= \operatorname{tr}(\mathbf{A})\operatorname{tr}(\mathbf{A}^2) - \operatorname{tr}(\mathbf{A}^3) = A_I^2 A_{II} + A_I^2 A_{III} + A_{II}^2 A_{III} + A_{III}^2 A_{III} + A_{IIII}^2 A_{III} + A_{III}^2 A_{II} + A_{III}^2 A_{II} + A_{III}^2 A_{III} + A_{III}^2 A_{III} + A_{III}^2 A_{III} + A_{III}^2 A_{III} + A_{III}^2 A_{II} + A_{III}^2 A_{III} + A_{III}^2 A_{II} +$$

Die oben angeführten Invarianten können nun (spezialisiert für \mathbf{E} oder \mathbf{C}) in den hyperelastischen Materialgesetzen (5.3) bzw. (5.7) verwendet werden.

SAINT VENANT-KIRCHHOFFsches Materialmodell

Gegeben ist die massenbezogene Energiedichte für das isotrope hyperelastische SAINT VENANT-KIRCHHOFFsche Materialmodell, welches lautet

$$\psi_{\rho}^{SV}(\mathbf{E}) = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\lambda}{2} \left(I_1^E \right)^2 + G I_4^E \right] , \qquad (5.11)$$

mit den LAMÉschen Konstanten λ und G (wobei letztere auch als Schubmodul bezeichnet wird). Das Modell nach SAINT VENANT-KIRCHHOFF ist die einfachste Beschreibung von isotropem hyperelastischem Materialverhalten, wobei ψ_{ρ}^{SV} von nur zwei Invarianten des GREEN-LAGRANGEschen Verzerrungstensors abhängt, welche üblicherweise als Funktion der Eigenwerte (Hauptverzerrungen) von **E** angegeben werden:

$$I_1^E = \operatorname{tr}(\mathbf{E}) = E_I + E_{II} + E_{III}, \qquad I_4^E = \operatorname{tr}(\mathbf{E}^2) = E_I^2 + E_{II}^2 + E_{III}^2.$$
(5.12)

Gesucht sind der zweite PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor π^{SV} und der CAUCHYsche Spannungstensor σ^{SV} .

Für die gegebene (von **E** abhängige) Energiefunktion ψ_{ρ}^{SV} können wir zur Berechnung des zweiten PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensors π von Gleichung (5.3) Gebrauch machen. Im Folgenden werden die notwendigen Ableitungen der Invarianten, I_1^E und I_4^E , bezüglich des GREEN-LAGRANGEschen Verzerrungstensors berechnet:

$$\frac{\partial I_1^E}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial (E_I + E_{II} + E_{III})}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{1}, \qquad \frac{\partial I_4^E}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial (E_I^2 + E_{II}^2 + E_{III}^2)}{\partial \mathbf{E}} = 2 \mathbf{E}, \qquad (5.13)$$

mit 1 als dem Einheitstensor zweiter Stufe. Einsetzen der Ausdrücke (5.13) in (5.3) und gleichzeitige Ableitung der Energiedichte ψ_{ρ}^{SV} nach den beiden Invarianten I_1^E und I_4^E ergibt

$$\boldsymbol{\pi}^{SV} = \rho_0 \left[\frac{\partial \psi_{\rho}(I_1^E, I_4^E)}{\partial I_1^E} \cdot \frac{\partial I_1^E}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \psi_{\rho}(I_1^E, I_4^E)}{\partial I_4^E} \cdot \frac{\partial I_4^E}{\partial \mathbf{E}} \right] = \lambda I_1^E \mathbf{1} + 2 G \mathbf{E} \,. \tag{5.14}$$

In Komponentenschreibweise lautet der zweite PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor (im Hauptachsensystem)

$$\boldsymbol{\pi}^{SV} = \begin{bmatrix} \lambda I_1^E + 2 G E_I & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_1^E + 2 G E_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda I_1^E + 2 G E_{III} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$
(5.15)

Durch Anwendung des SAINT VENANT-KIRCHHOFFschen Materialmodells erhalten wir also einen linearen Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor π^{SV} und dem Verzerrungstensor **E**. Dies ist eine natürliche Erweiterung der linearen Elastizitätstheorie, siehe Abbildung 5.1 für einaxiale Verzerrungs- und Spannungszustände in Hartgummi. Zur Kontrolle leiten wir (5.14) nochmals nach \mathbf{E} ab, wodurch wir den bekannten konstanten isotropen Elastizitätstensor \mathbb{C}_{iso} (in KELVIN-MANDELscher Schreibweise) erhalten

$$\mathbb{C}_{iso} = \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}} = \lambda \, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 \, G \, \mathbb{I} = \begin{bmatrix} \lambda + 2 \, G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2 \, G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2 \, G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \, G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \, G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \, G \end{bmatrix},$$
(5.16)

mit $\mathbb I$ als dem Einheitstensor vierter Stufe.

Abschließend ermitteln wir den CAUCHYschen Spannungstensor σ nach Formel (5.4). Dazu verwenden wir die Definitionen des Deformationsgradienten **F** in den Hauptverzerrungsrichtungen, sowie dessen Determinante *J* laut (5.6). Einsetzen von (5.6) und (5.14) in (5.4) liefert schließlich den gesuchten CAUCHYschen Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma}^{SV} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \, \boldsymbol{\pi}^{SV} \, \mathbf{F}^{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \left(\lambda \, I_{1}^{E} \, \mathbf{1} + 2 \, G \, \mathbf{E} \right) \mathbf{F}^{T} \,, \tag{5.17}$$

mit Komponentenschreibweise

$$\boldsymbol{\sigma}^{SV} = \begin{bmatrix} (\lambda I_1^E + 2 G E_I) \frac{\lambda_I}{\lambda_{II} \lambda_{III}} & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda I_1^E + 2 G E_{II}) \frac{\lambda_{II}}{\lambda_I \lambda_{III}} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda I_1^E + 2 G E_{III}) \frac{\lambda_{III}}{\lambda_I \lambda_{II}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}},$$
(5.18)

wobei anzumerken ist, dass zwischen dem Spannungstensor σ^{SV} und dem Verzerrungstensor



Abbildung 5.1: Spannungs-Dehnungs-Diagramm für das SAINT VENANT-KIRCHHOFFsche Materialmodell (a) bei einaxialem Verzerrungszustand und (b) bei einaxialem Spannungszustand, wobei G = 2,4 GPa und $\lambda = 1,6$ GPa (Materialkennwerte für Hartgummi)

E (aufgrund der Transformation mittels Deformationsgradienten) kein linearer Zusammenhang

mehr besteht, siehe Abbildung 5.1. Das SAINT VENANT-KIRCHHOFFsche Materialmodell is nur zur Beschreibung kleiner bis mittlerer Deformationen geeignet. Vor allem im Bereich hoher Druckverzerrungen ist die Konvergenz gegen den Wert Null bei gleichzeitig steigender Verzerrung (Stauchung) nicht realistisch. Im nachfolgenden Beispiel (Neo-HOOKEsches Materialmodell) wird in diesem Bereich ein plausiblerer Verlauf modelliert.

Neo-HOOKEsches Materialmodell

Das neo-HOOKEsche Gesetz ist ein allgemeineres Modell zur Beschreibung von isotropem hyperelastischem Materialverhalten bei großen Deformationen, welches zum Beispiel für Gummi, Polymere und Weichgewebe Verwendung findet.

Gegeben ist die massenbezogene Energiedichte für das isotrope hyperelastische neo-HOOKEsche Materialmodell, welches lautet

$$\overline{\psi}_{\rho}^{NH}(\mathbf{C}) = c \left(I_1^C - 3 - 2 \ln J \right) + d \left(\ln J \right)^2, \qquad J = \sqrt{I_3^C},$$
 (5.19)

mit den aus Versuchen zu bestimmenden Materialparamtern c und d. Für lineare Elastizität gilt $c = G/(2 \rho_0)$ und $d = \lambda/(2 \rho_0)$. Im Gegensatz zum zuvor vorgestellten Modell, ist die Energiedichte $\overline{\psi}_{\rho}^{NH}$ nun eine Funktion vom CAUCHY-GREENschen Streck-Tensor **C** bzw. von dessen ersten und dritten Invariante, I_1^C und I_3^C . Diese sind Funktionen der Eigenwerte von **C** (Quadrate der Streckungen $C_I = \lambda_I^2$, $C_{II} = \lambda_{II}^2$, und $C_{III} = \lambda_{III}^2$) und lauten:

$$I_1^C = \operatorname{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_I^2 + \lambda_{II}^2 + \lambda_{III}^2, \qquad I_3^C = \det(\mathbf{C}) = \lambda_I^2 \lambda_{II}^2 \lambda_{III}^2 = J^2.$$
(5.20)

Gesucht sind der zweite PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor π^{NH} und der CAUCHYsche Spannungstensor σ^{NH} .

Für die gegebene (von **C** abhängige) Energiefunktion $\overline{\psi}_{\rho}^{NH}$ können wir zur Berechnung des zweiten PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensors π von Gleichung (5.7) Gebrauch machen. Im Folgenden werden die notwendigen Ableitungen der Invarianten, I_1^C und I_3^C , bezüglich des CAUCHY-GREENschen Verzerrungstensors berechnet:

$$\frac{\partial I_1^C}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (\lambda_I^2 + \lambda_{II}^2 + \lambda_{III}^2)}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1}, \qquad \frac{\partial I_3^C}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (\lambda_I^2 \lambda_{II}^2 \lambda_{III}^2)}{\partial \mathbf{C}} = I_3^C \mathbf{C}^{-1}.$$
(5.21)

Einsetzen der Ausdrücke (5.21) in (5.7) und gleichzeitige Ableitung der Energiedichte $\overline{\psi}_{\rho}^{NH}$ nach den beiden Invarianten I_1^C und I_3^C , unter Verwendung von $\partial \ln J / \partial I_3^C = (2 I_3^C)^{-1}$, ergibt

$$\boldsymbol{\pi}^{NH} = 2\,\rho_0 \left[\frac{\partial \overline{\psi}_{\rho}(I_1^C, I_3^C)}{\partial I_1^C} \cdot \frac{\partial I_1^C}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \overline{\psi}_{\rho}(I_1^C, I_3^C)}{\partial I_3^C} \cdot \frac{\partial I_3^C}{\partial \mathbf{C}} \right] = 2\,\rho_0 \left[c\left(\mathbf{1} - \mathbf{C}^{-1} \right) + d\ln J \,\mathbf{C}^{-1} \right] \,.$$

$$\tag{5.22}$$

In Komponentenschreibweise lautet der zweite PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor (im Hauptachsensystem)

$$\boldsymbol{\pi}^{NH} = 2\,\rho_0 \begin{bmatrix} c\left(1 - \frac{1}{\lambda_I^2}\right) + d\frac{\ln J}{\lambda_I^2} & 0 & 0\\ 0 & c\left(1 - \frac{1}{\lambda_{II}^2}\right) + d\frac{\ln J}{\lambda_{II}^2} & 0\\ 0 & 0 & c\left(1 - \frac{1}{\lambda_{III}^2}\right) + d\frac{\ln J}{\lambda_{III}^2} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$
(5.23)

Nun können wir den CAUCHYschen Spannungstensor σ nach Formel (5.8) ermitteln. Einsetzen der Definitionen des Deformationsgradienten **F** (in den Hauptverzerrungsrichtungen) und dessen Determinante J (5.6), sowie (5.22) in (5.8) liefert schließlich den gesuchten Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma}^{NH} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \, \boldsymbol{\pi}^{NH} \, \mathbf{F}^{T} = 2 \, \rho_0 \frac{1}{J} \mathbf{F} \left[c \left(\mathbf{1} - \mathbf{C}^{-1} \right) + d \ln J \, \mathbf{C}^{-1} \right] \mathbf{F}^{T} \,. \tag{5.24}$$

Unter Berücksichtigung von $\mathbf{F} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}^T = \mathbf{1}$ vereinfacht sich (5.24) zu

$$\boldsymbol{\sigma}^{NH} = 2 \frac{\rho_0}{J} \left[c \left(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T - \mathbf{1} \right) + d \ln J \mathbf{1} \right], \qquad (5.25)$$

mit Komponentenschreibweise

$$\boldsymbol{\sigma}^{NH} = 2 \frac{\rho_0}{J} \begin{bmatrix} c \left(\lambda_I^2 - 1\right) + d \ln J & 0 & 0 \\ 0 & c \left(\lambda_{II}^2 - 1\right) + d \ln J & 0 \\ 0 & 0 & c \left(\lambda_{III}^2 - 1\right) + d \ln J \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} .$$
(5.26)

Durch Anwendung des neo-HOOKEschen Materialmodells erhalten wir durchwegs nicht-lineare Spannungs-Dehnungsbeziehungen, siehe Abbildung 5.2 für einaxiale Verzerrungs- und Spannungszustände in Hartgummi. Die Grenzbetrachtungen zeigen, dass (im Gegensatz zum vor-



Abbildung 5.2: Spannungs-Dehnungs-Diagramm für das neo-HOOKEsche Materialmodell (a) bei einaxialem Verzerrungszustand und (b) bei einaxialem Spannungszustand, wobei G = 2,4 GPa und $\lambda = 1,6$ GPa (Materialkennwerte für Hartgummi)

herigen Modell) die Spannungen im Bereich hoher Druckverzerrungen gegen den Wert $-\infty$ konvergieren.

Verallgemeinertes Polynom-Materialmodell

Nicht immer lässt sich in der Literatur ein passendes hyperelastisches Materialmodell für das zu untersuchende Material finden. Daher ist es sinnvoll, zum Beispiel ein Polynom *n*-ten Grades zu definieren mit welchem das hyperelastische Materialverhalten hinreichend approximiert werden kann, wie im nachfolgenden Beispiel erläutert wird:

Gegeben ist die massenbezogene Energiedichte für das isotrope hyperelastische Materialmodell in Form eines Polynom dritten Grades von den Eigenwerten des GREEN-LAGRANGEschen Verzerrungstensors

$$\psi_{\rho}^{Pol}(\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^{6} c_i I_i^E, \qquad (5.27)$$

mit den aus Versuchen zu bestimmenden Materialparamtern c_1 bis c_6 . Für den gewählten Ansatz hängt ψ_{ρ}^{Pol} von sechs Invarianten des GREEN-LAGRANGEschen Verzerrungstensors ab, welche als Funktion der Eigenwerte von **E** angegeben werden [siehe auch (5.9) und (5.10)]:

$$I_{1}^{E} = \operatorname{tr}(\mathbf{E}) = E_{I} + E_{II} + E_{III},$$

$$I_{2}^{E} = \frac{1}{2} \left[(\operatorname{tr}\mathbf{E})^{2} - \operatorname{tr}(\mathbf{E}^{2}) \right] = E_{I} E_{II} + E_{II} E_{III} + E_{III} E_{I},$$

$$I_{3}^{E} = \operatorname{det}(\mathbf{E}) = E_{I} E_{II} E_{III},$$

$$I_{4}^{E} = \operatorname{tr}(\mathbf{E}^{2}) = E_{I}^{2} + E_{II}^{2} + E_{III}^{2},$$

$$I_{5}^{E} = \operatorname{tr}(\mathbf{E}^{3}) = E_{I}^{3} + E_{II}^{3} + E_{III}^{3},$$

$$I_{6}^{E} = \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \operatorname{tr}(\mathbf{E}^{2}) - \operatorname{tr}(\mathbf{E}^{3}) = E_{I}^{2} E_{II} + E_{I}^{2} E_{III} + E_{II}^{2} E_{I} + E_{II}^{2} E_{III} + E_{III}^{2} E_{III} + E_{III}^{$$

Gesucht sind der zweite PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor π^{Pol} und der CAUCHYsche Spannungstensor σ^{Pol} .

Für die gegebene (von **E** abhängige) Energiefunktion ψ_{ρ}^{Pol} können wir zur Berechnung des zweiten PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensors π von Gleichung (5.3) Gebrauch machen. Im Folgenden werden die notwendigen Ableitungen der Invarianten, I_1^E bis I_6^E , bezüglich des GREEN-LAGRANGEschen Verzerrungstensors berechnet:

$$\frac{\partial I_1^E}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial (\operatorname{tr} \mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{1}, \qquad \qquad \frac{\partial I_2^E}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} \mathbf{E})^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{E}^2)\right]\right)}{\partial \mathbf{E}} = I_1^E \mathbf{1} - \mathbf{E}, \\
\frac{\partial I_3^E}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial (\det \mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = I_3^E \mathbf{E}^{-1}, \qquad \qquad \frac{\partial I_4^E}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial (\operatorname{tr}(\mathbf{E}^2))}{\partial \mathbf{E}} = 2 \mathbf{E}, \\
\frac{\partial I_5^E}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial (\operatorname{tr}(\mathbf{E}^3))}{\partial \mathbf{E}} = 3 \mathbf{E}^2, \qquad \qquad \frac{\partial I_6^E}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial (\operatorname{tr} \mathbf{E} \operatorname{tr}(\mathbf{E}^2) - \operatorname{tr}(\mathbf{E}^3))}{\partial \mathbf{E}} = I_4^E \mathbf{1} + 2 I_1^E \mathbf{E} - 3 \mathbf{E}^2. \\
\tag{5.29}$$

Einsetzen der Ausdrücke (5.29) in (5.3) und gleichzeitige Ableitung der Energiedichte ψ_{ρ}^{Pol} nach den Invarianten I_1^E bis I_6^E ergibt nach Zusammenfassen

$$\boldsymbol{\pi}^{Pol} = \rho_0 \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \psi_{\rho}(I_1^E, ..., I_6^E)}{\partial I_i^E} \cdot \frac{\partial I_i^E}{\partial \mathbf{E}} = \rho_0 \left[(c_1 + c_2 I_1^E + c_6 I_4^E) \mathbf{1} + (2 c_4 - c_2 + 2 c_6 I_1^E) \mathbf{E} + (3 c_5 - 3 c_6) \mathbf{E}^2 + c_3 I_3^E \mathbf{E}^{-1} \right],$$
(5.30)

wobei c_1 bei hyperelastischem Materialverhalten im Allgemeinen Null ist, da im unverzerrten Zustand gilt: $\pi^{Pol}(\mathbf{E}=0) = 0$ (keine Spannung im verzerrungsfreien Zustand).

Nun können wir den CAUCHYschen Spannungstensor σ nach Formel (5.4) ermitteln. Dazu verwenden wir wieder die Definitionen des Deformationsgradienten **F** in den Hauptverzerrungsrichtungen, sowie dessen Determinante *J* laut (5.6). Einsetzen von (5.30) in (5.4) liefert schließlich den gesuchten CAUCHYschen Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma}^{Pol} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \, \boldsymbol{\pi}^{Pol} \, \mathbf{F}^{T} = \\ = \rho \, \mathbf{F} \left[\left(c_2 \, I_1^E + c_6 \, I_4^E \right) \mathbf{1} + \left(2 \, c_4 - c_2 + 2 \, c_6 \, I_1^E \right) \mathbf{E} + \left(3 \, c_5 - 3 \, c_6 \right) \mathbf{E}^2 + c_3 \, I_3^E \, \mathbf{E}^{-1} \right] \mathbf{F}^{T} \,.$$
(5.31)

6. METHODEN DER MECHANISCHEN WERKSTOFFPRÜFUNG

Das nachfolgende Kapitel erläutert anhand zweier Beispiele die Auswertung von bei einaxialen Zug- und Druckversuchen bzw. bei Ultraschalltests gewonnenen Daten. Die theoretischen Grundlagen dazu können im Kapitel 2 des Skriptums zur Vorlesung mit Übung aus Ingenieurmechanik, Teil A – Vorlesungsteil, nachgelesen werden.

Beispiel 1

Angabe:

Ein Versuchskörper nach DIN EN ISO 6892-1 aus einem zähen, isotropen Metall wurde mit einer spindelgetriebenen, elektromechanischen Prüfmaschine einer einaxialen Zugbeanspruchung unterworfen. Die rechteckige Querschnittsfläche im Messbereich ist durch eine Breite von b = 20 mm und eine Tiefe von t = 10 mm definiert. Der Versuch wurde verschiebungsgesteuert durchgeführt, mit einer Längenänderungsrate von 0,03 mm/min. Diese Längenänderungsrate wurde bis in den Fließbereich der Probe konstant gehalten. Anschließend wurde die Belastung gestoppt und mit einer Längenänderungsrate von -0,03 mm/min vollständig entlastet. In der Probekörpermitte wurden die Axialdehnung und die Querdehnung mit Hilfe von Dehnungsmessstreifen gemessen. Als Versuchsergebnis liegen daher sowohl ein Kraft-Axialdehnungs-Diagramm [siehe Abbildung 6.1(links)] als auch ein Axialdehnungs-Querdehnungs-Diagramm [siehe Abbildung 6.1(rechts)] vor.



Abbildung 6.1: links: Kraft-Axialdehnungs-Diagramm und rechts: Axialdehnungs-Querdehnungs-Diagramm für den in Beispiel 1 durchgeführten einaxialen Zugversuch

Weiters wurde ein Zylinder aus dem selben Material (Höhe h = 99,8 mm, Radius r = 24,9 mm und Masse m = 525,2 g) unter Verwendung eines Transversalwellen-Pulsgebers mit einer Frequenz von 500 kHz, Honig als Kontaktvermittler und einer Frischhaltefolie als Trennmittel untersucht. Die Laufzeit des Signals ohne Probekörper (Serienschaltung: Pulsgeber – Honig – Frischhaltefolie 1 – Frischhaltefolie 2 – Honig – Pulsempfänger) betrug $t_0 = 600$ ns. Bei der Messung des Probekörpers wurden folgende (totale) Laufzeiten vom Pulsgeber zum Pulsempfänger (Serienschaltung: Pulsgeber – Honig – Frischhaltefolie 1 – Probekörper – Frischhaltefolie 2 – Honig – Pulsempfänger) gemessen: Longitudinalwellenlaufzeit $t_{l,tot} = 15,67 \,\mu$ s und Transversalwellenlaufzeit $t_{t,tot} = 31,84 \,\mu$ s.

Gesucht:

- a. Der Elastizitätsmodul (Angabe in Gigapascal) und
- b. die Querdehnungszahl des Materials,

jeweils unter Auswertung beider Untersuchungsmethoden.

ad. a.: Auswertung des einaxialen Zugversuchs

Die Ermittlung des Elastizitätsmoduls erfolgt basierend auf dem Zusammenhang

$$E = \frac{\sigma_{axial}}{\varepsilon_{axial}} \,. \tag{6.1}$$

Um nicht von einem Punkt des Diagramms in Abbildung 6.1(links) abhängig zu sein, wählen wir zwei Punkte A und B entlang des *Entlastungspfades*, welche in Abbildung 6.2(links) grafisch dargestellt sind und schreiben (6.1) um zu

$$E = \frac{\Delta \sigma_{axial}}{\Delta \varepsilon_{axial}} \,. \tag{6.2}$$



Abbildung 6.2: links: Kraft-Axialdehnungs-Diagramm mit Punkten A und B und rechts: Axialdehnungs-Querdehnungs-Diagramm mit Punkten A und B für den in Beispiel 1 durchgeführten einaxialen Zugversuch

Es ergibt sich bei einer Querschnittsfläche $A = 20 \cdot 10 = 200 \text{ mm}^2 = 2 \text{ cm}^2$ für Punkt A: $\sigma_{A,axial} = 4 \text{ kN/cm}^2$ bei $\varepsilon_{A,axial} = 0.83 \cdot 10^{-3}$ und für Punkt B: $\sigma_{B,axial} = 1 \text{ kN/cm}^2$ bei $\varepsilon_{B,axial} = 0.43 \cdot 10^{-3}$. Einsetzen in (6.2) liefert

$$E = \frac{\sigma_{\text{A},axial} - \sigma_{\text{B},axial}}{\varepsilon_{\text{A},axial} - \varepsilon_{\text{B},axial}} = \frac{4 - 1}{0,83 \cdot 10^{-3} - 0,43 \cdot 10^{-3}} = 7429 \,\text{kN/cm}^2 = 74,29 \,\text{GPa}\,.$$
(6.3)

Die Ermittlung der Querdehnungszahl erfolgt durch den Zusammenhang

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{quer}}{\varepsilon_{axial}} \,. \tag{6.4}$$

Erneut wählen wir zwei Punkte entlang des Entlastungspfades, diesmal in Abbildung 6.1(rechts), welche in Abbildung 6.2(rechts) nochmals dargestellt werden. Umschreiben von (6.4) liefert

$$\nu = -\frac{\Delta \varepsilon_{quer}}{\Delta \varepsilon_{axial}} \,. \tag{6.5}$$

Es ergibt sich bei einer Querschnittsfläche $A = 20 \cdot 10 = 200 \text{ mm}^2 = 2 \text{ cm}^2$ für Punkt A: $\varepsilon_{A,axial} = 0.8 \cdot 10^{-3}$ bei $\varepsilon_{A,quer} = -3.25 \cdot 10^{-4}$ und für Punkt B: $\varepsilon_{B,axial} = 0.4 \cdot 10^{-3}$ bei $\varepsilon_{B,quer} = -1.85 \cdot 10^{-4}$. Einsetzen in (6.5) liefert

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{A,quer} - \varepsilon_{B,quer}}{\varepsilon_{A,axial} - \varepsilon_{B,axial}} = -\frac{-3.25 \cdot 10^{-4} + 1.85 \cdot 10^{-4}}{0.8 \cdot 10^{-3} - 0.4 \cdot 10^{-3}} = 0.346.$$
(6.6)

Somit sind – bei Zugrundelegung einer linearisierten Elastizitätstheorie – Elastizitätsmodul und Querdehnungszahl des untersuchten Materials zufolge der bei einem einaxialen Zugversuch gewonnenen Messwerte bestimmt.

ad. b.: Auswertung von Ultraschalltests

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls basierend auf Ultraschalltests verwendet man folgenden Zusammenhang mit der Dichte ρ und den Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten v_l und v_t :

$$E = \frac{\rho \, v_t^2 \, (3 \, v_l^2 - 4 \, v_t^2)}{v_l^2 - v_t^2} \,. \tag{6.7}$$

Die Dichte ρ ermittelt man zu $\rho = m/V$, mit der Masse m = 525,2 g = 0,5252 kg und dem Volumen $V = r^2 \cdot \pi \cdot h = 24,9^2 \cdot \pi \cdot 99,8 = 194392 \text{ mm}^3 = 0,000194 \text{ m}^3$. Somit gilt $\rho = 2701,75 \text{ kg/m}^3$. Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten können in mehreren Schritten aus den Wellenlaufzeiten ermittelt werden. Zunächst gilt folgender Zusammenhang zwischen der totalen Wellenlaufzeit t_{tot} und der Wellenlaufzeit im Probekörper t:

$$t = t_{tot} - t_0 \,. \tag{6.8}$$

Somit ergeben sich, bei Berücksichtigung von $t_0 = 600 \text{ ns} = 0.6 \,\mu\text{s}$ die Wellenlaufzeiten zu $t_l = t_{l,tot} - t_0 = 15,67 - 0.6 = 15,07 \,\mu\text{s}$ und $t_t = t_{t,tot} - t_0 = 31,84 - 0.6 = 31,24 \,\mu\text{s}$. Es gilt folgender Zusammenhang zwischen der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit v und der Wellenlaufzeit t:

$$v = \frac{h}{t}, \tag{6.9}$$

wobei *h* die Probenhöhe gemäß Angabe bezeichnet. Wir erhalten daher: $v_l = 0,0998/15,07 \cdot 10^{-6} = 6622,43 \text{ m/s}$ und $v_t = 0,0998/31,24 \cdot 10^{-6} = 3194,62 \text{ m/s}.$

Einsetzen von ρ , v_l und v_t in (6.7) ergibt

$$E = \frac{2701,75 \cdot 3194,62^2 \left(3 \cdot 6622,43^2 - 4 \cdot 3194,62^2\right)}{6622,43^2 - 3194,62^2} = 7,436 \cdot 10^{10} \,\mathrm{Pa} = 74,36 \,\mathrm{GPa} \,. \tag{6.10}$$

Somit kann eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit dem mittels einaxialem Zugversuch ermittelten Elastizitätsmodul festgestellt werden $(E_{Zug} - E_{Ultra} = -0.07 \text{ GPa}).$

Die bereits ermittelten Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten können gleichermaßen zur Bestimmung der Querdehnungszahl genutzt werden. Es gilt der folgende Zusammenhang:

$$\nu = \frac{v_l^2 - 2v_t^2}{2(v_l^2 - v_t^2)}.$$
(6.11)

Einsetzen liefert $\nu = 0,348$, was ebenfalls sehr gut mit dem Wert aus dem Zugversuch übereinstimmt ($\nu_{Zug} - \nu_{Ultra} = -0,002$).

Beispiel 2

Angabe:

Gegeben sind Messergebnisse aus zwei Materialtests:

Ein zylindrischer Kunststoffkörper, mit Durchmesser d = 5 cm, Höhe h = 4,75 cm und Masse m = 131,56 g, wurde in axialer Richtung mehreren Ultraschalltests unterzogen, wobei ein Transversalwellen-Pulsgeber mit einer Anregungsfrequenz von 1 MHz, Honig als Kontaktvermittler und Frischhaltefolien als Trennmittel verwendet wurden. Die Laufzeit des Signals ohne Probekörper (Serienschaltung: Pulsgeber – Honig – Frischhaltefolie 1 – Frischhaltefolie 2 – Honig – Pulsempfänger) betrug $t_0 = 330 \text{ ns}$. Bei der Messung des Probekörpers wurden folgende (totale) Laufzeiten vom Pulsgeber zum Pulsempfänger gemessen (Serienschaltung: Pulsgeber – Honig – Frischhaltefolie 2 – Honig – Frischhaltefolie 1 – Probekörper – Frischhaltefolie 2 – Honig – Pulsempfänger): Longitudinalwelle: $t_{l,tot,1} = 20,25 \,\mu$ s bzw. bei Versuchswiederholung $t_{l,tot,2} = 20,28 \,\mu$ s; Transversalwelle: $t_{t,tot,1} = 46,21 \,\mu$ s bzw. bei Versuchswiederholung $t_{t,tot,2} = 45,99 \,\mu$ s.

Weiters wurde ein Versuchskörper nach DIN EN ISO 6892-1 aus Kupfer mit einer spindelgetriebenen, elektromechanischen Prüfmaschine einer einaxialen Zugbeanspruchung unterworfen. Die Abmessungen der rechteckigen Querschnittsfläche im Messbereich betrugen: Breite b = 20 mmund Tiefe t = 10 mm. Der Versuch wurde verschiebungsgesteuert durchgeführt, beginnend mit einer Längenänderungsrate von 0,02 mm/min. Diese Längenänderungsrate wurde bis in den Fließbereich der Probe konstant gehalten. Anschließend wurde die



Abbildung 6.3: Kraft-Axialdehnungs-Diagramm für den in Beispiel 2 durchgeführten einaxialen Zugversuch

Belastung gestoppt und mit einer Längenänderungsrate von -0.02 mm/min vollständig entlastet. In der Probekörpermitte wurden die Axialdehnung mit Hilfe von Dehnungsmessstreifen gemessen. Als Versuchsergebnis liegt daher ein Kraft-Axialdehnungs-Diagramm vor, siehe Abbildung 6.3. **Gesucht:**

- a. Bestimmen Sie die Wellenlängen (in Millimeter) der vier gemessenen Ultraschallwellen sowie den Erwartungswert und die Standardabweichung des Elastizitätsmoduls des Kunststoffs (in Gigapascal).
- b. Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul (in Gigapascal) und die Fließspannung (in Megapascal) des untersuchten Kupfers.

ad. a.: Auswertung von Ultraschalltests

In diesem Beispiel ist zu beachten, dass zwei Ultraschallmessungen (erster Versuch und Versuchswiederholung) durchgeführt wurden. Die Auswertung erfolgt zunächst getrennt für beide Versuche. Mit den resultierenden Werten für den Elastizitätsmodul werden dann noch Mittelwert und Standardabweichung ermittelt, also eine statistische Auswertung durchgeführt.

Wir gehen zunächst analog zum ersten Beispiel vor und ermitteln sowohl für den ersten Versuch (Index 1), als auch für die Versuchswiederholung (Index 2), die Wellenlaufzeiten in der Probe gemäß (6.8), und zwar für die Longitudinal- als auch für die Transversalwellen. Es ergibt sich mit $t_0 = 330 \text{ ns} = 0.33 \,\mu\text{s}$:

$$t_{l,1} = t_{l,tot,1} - t_0 = 20,25 - 0,33 = 19,92 \,\mu s$$
 (6.12)

$$t_{l,2} = t_{l,tot,2} - t_0 = 20,28 - 0,33 = 19,95\,\mu s$$
 (6.13)

$$t_{t,1} = t_{t,tot,1} - t_0 = 46,21 - 0,33 = 45,88\,\mu s \tag{6.14}$$

$$t_{t,2} = t_{t,tot,2} - t_0 = 45,99 - 0,33 = 45,66\,\mu s \tag{6.15}$$

Mit der Probenkörperhöhe h = 4,75 cm = 0,0475 m, lassen sich daraus sofort die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten v gemäß (6.9) bestimmen zu:

$$v_{l,1} = \frac{h}{t_{l,1}} = \frac{0.0475}{19.92 \cdot 10^{-6}} = 2384.54 \,\mathrm{m/s}$$
 (6.16)

$$v_{l,2} = \frac{h}{t_{l,2}} = \frac{0.0475}{19.95 \cdot 10^{-6}} = 2380.95 \,\mathrm{m/s}$$
 (6.17)

$$v_{t,1} = \frac{h}{t_{t,1}} = \frac{0.0475}{45.88 \cdot 10^{-6}} = 1035.31 \,\mathrm{m/s}$$
 (6.18)

$$v_{t,2} = \frac{h}{t_{t,2}} = \frac{0.0475}{45.66 \cdot 10^{-6}} = 1040.30 \,\mathrm{m/s}$$
 (6.19)

Die gesuchten Wellenlängen λ erhält man über den Zusammenhang

$$\lambda = \frac{v}{f}, \qquad (6.20)$$

wobei f die Schwingungsfrequenz bezeichnet, welche in diesem Beispiel durch die Anregungsfrequenz mit 1 MHz = $1 \cdot 10^6$ Hz gegeben ist. Einsetzen in (6.20) liefert:

$$\lambda_{l,1} = \frac{v_{l,1}}{f} = \frac{2384,54}{1\cdot 10^6} = 2,3845 \cdot 10^{-3} \,\mathrm{m} = 2,3845 \,\mathrm{mm}$$

$$(6.21)$$

$$\lambda_{l,2} = \frac{v_{l,2}}{f} = \frac{2380,95}{1\cdot 10^6} = 2,3810 \cdot 10^{-3} \,\mathrm{m} = 2,3810 \,\mathrm{mm} \tag{6.22}$$

$$\lambda_{t,1} = \frac{v_{t,1}}{f} = \frac{1035,31}{1\cdot 10^6} = 1,0353\cdot 10^{-3} \,\mathrm{m} = 1,0353 \,\mathrm{mm} \tag{6.23}$$

$$\lambda_{t,2} = \frac{v_{t,2}}{f} = \frac{1040,30}{1 \cdot 10^6} = 1,0403 \cdot 10^{-3} \,\mathrm{m} = 1,0403 \,\mathrm{mm} \tag{6.24}$$

Somit ist der erste Teil der ersten Aufgabenstellung erledigt.

In weiterer Folge ermittelt man den Elastizitätsmodul für den ersten Versuch und die Versuchswiederholung gemäß (6.7) unter Nutzung der ermittelten Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten und der Dichte $\rho = 0.13156/0.00009327 = 1410.59 \text{ kg/m}^3 \text{ zu}$:

$$E_{1} = \frac{1410,59 \cdot 1035,31^{2} (3 \cdot 2384,54^{2} - 4 \cdot 1035,31^{2})}{2384,54^{2} - 1035,31^{2}} = 4,1847 \cdot 10^{9} \text{ Pa} = 4,1847 \text{ GPa} \quad (6.25)$$
$$E_{2} = \frac{1410,59 \cdot 1040,30^{2} (3 \cdot 2380,95^{2} - 4 \cdot 1040,30^{2})}{2380,95^{2} - 1040,30^{2}} = 4,2195 \cdot 10^{9} \text{ Pa} = 4,2195 \text{ GPa} \quad (6.26)$$

Bei Verwendung statistischer Formeln lassen sich der Erwartungswert $\mathbb{E}[E_i]$ und die Standardabweichung σ dieser Stichprobe ermitteln zu:

$$\mathbb{E}[E_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i = \frac{1}{2} \left(4,1847 + 4,2195 \right) = 4,2021 \,\text{GPa}$$
(6.27)

und

$$\sigma = \sqrt{\operatorname{Var}[E_i]} = \sqrt{0,0006055} = 0,0246 \,\mathrm{GPa}\,, \tag{6.28}$$

wobei

$$\operatorname{Var}[E_i] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (E_i - \mathbb{E}[E_i])^2 = (4,1847 - 4,2021)^2 + (4,2195 - 4,2021)^2 = 0,0006055 \,(\text{GPa})^2 \,.$$
(6.29)

Es folgt also $E = 4,20 \pm 0,02$ GPa.

ad. b.: Auswertung des einaxialen Zugversuchs

Die Vorgangsweise ist analog zur in Beispiel 1 gezeigten, d.h. es werden zunächst zwei Punkte entlang des Entlastungspfades in Abbildung 6.3 festgelegt, siehe Abbildung 6.4.

Einsetzen in (6.2) lieft mit der Querschnittsfläche $A = 2 \text{ cm}^2$ und den Spannungen und Verzerrungen im Punkt C: $\sigma_{\text{C},axial} = 5 \text{ kN/cm}^2$ bei $\varepsilon_{\text{C},axial} = 1,15 \cdot 10^{-3}$ sowie im Punkt D: $\sigma_{\text{D},axial} = 2,5 \text{ kN/cm}^2$ bei $\varepsilon_{\text{D},axial} = 0,9 \cdot 10^{-3}$ folgenden Wert für den Elastizitätsmodul:

$$E = \frac{\sigma_{\text{C},axial} - \sigma_{\text{D},axial}}{\varepsilon_{\text{C},axial} - \varepsilon_{\text{D},axial}} = \frac{5 - 2.5}{1.15 \cdot 10^{-3} - 0.9 \cdot 10^{-3}} = 10625 \,\text{kN/cm}^2 = 106.25 \,\text{GPa}\,.$$
(6.30)

Zur Bestimmung der Fließspannung σ_y lesen wir den Wert für die aufgebrachte Kraft beim Fließplateau aus Abbildung 6.3 (oder 6.4) ab und dividieren diese durch die Querschnittsfläche. Dann erhält man



Abbildung 6.4: Kraft-Axialdehnungs-Diagramm mit Punkten C und D für den in Beispiel 2 durchgeführten einaxialen Zugversuch

7. ERMITTLUNG VON SCHNITT- UND VERSCHIEBUNGSGRÖSSEN DURCH INTEGRATION DER DIFFERENTIALBEZIEHUNGEN DER THEORIE GEDRUNGENER STÄBE

Zusammenstellung der Differentialbeziehungen der Theorie gedrungener Stäbe (für eine statische Belastung):



7.1 INTEGRATION DER DIFFERENTIALBEZIEHUNGEN DER THEORIE GEDRUNGENER STÄBE AUSGEHEND VON DER DIFFERENTIALGLEICHUNG 4. ORDNUNG

Es sind folgende Annahmen vorauszusetzen, für die die Differentialbeziehungen der Balkentheorie entsprechend spezialisiert werden:

- Konstante Querschnittsfläche: GA(x) = konst = GA;
- Konstantes Flächenmoment 2. Ordnung: EI(x) = konst = EI;
- Konstante Temperatur
differenz $(T_u T_o): \Delta T_k(x) = \text{konst} = \Delta T_k$

Somit erhält man durch Ableiten von (d) nach x und Einsetzen des so erhaltenen Ausdrucks in (c), Ableiten der somit erhaltenen Beziehung nach x und Einsetzen in die Gleichung (b), usw.

$$EI\frac{d^4w(x)}{dx^4} = q(x) - \frac{EI\kappa}{GA}\frac{d^2q(x)}{dx^2}.$$
(7.1)

Diese Gleichung ist ein Ausgangspunkt für die Lösung von Problemen der Theorie gedrungener Stäbe. Folgender Lösungsweg wird dabei verfolgt: Viermalige Integration der Gleichung (7.1) ergibt einen Ausdruck für EI w(x), in dem vier Integrationskonstante C_1 bis C_4 auftreten. Diese allgemeine Lösung für die Biegelinie des Balkens wird durch das Formulieren von Randbedingungen an die zu lösende Aufgabenstellung angepasst.



Abbildung 7.1: Statisches System und Belastung

GESUCHT sind die Biegelinie w(x), der Biegemomentenverlauf M(x), der Querkraftverlauf Q(x), sowie das Biegemoment an der Einspannstelle M_A , und die Stelle an der das maximale Biegemoment auftritt

Es handelt sich um ein einfach statisch unbestimmtes System unter isothermischen Bedingungen ($\Delta T_k = 0$). Unter Voraussetzung von q(x) = konst = q ergibt viermalige Integration der Gleichung (7.1):

$$-Q(x) = EI \frac{d^3w}{dx^3} = q x + C_1,$$

$$-M(x) - q \frac{\kappa EI}{GA} = EI \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q x^2}{2} + C_1 x + C_2,$$

$$-EI \phi(x) + Q(x) \frac{\kappa EI}{GA} = EI \frac{dw}{dx} = \frac{q x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$EI w(x) = EI w = \frac{q x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$
(7.2)

Die Integrationskonstanten C_1 , C_2 , C_3 und C_4 werden mit Hilfe der vorgeschriebene Randbedingungen angepasst. Es sind drei geometrische (kinematische) Randbedingungen und eine statische (dynamische) Randbedingung anzupassen. Diese lauten

$$w(x = 0) = 0,$$

$$w(x = l) = 0,$$

$$\phi(x = 0) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \frac{dw}{dx}(x = 0) = Q(x = 0)\frac{\kappa}{GA},$$

$$M(x = l) = M_B \qquad \Rightarrow \quad EI\frac{d^2w}{dx^2}(x = l) = -M_B - q\frac{\kappa EI}{GA} = -q\left(\frac{l^2}{6} + \frac{\kappa EI}{GA}\right).$$
(7.3)

Aus Gleichgewichtsbetrachtungen ergibt sich die Querkraft Q(x = 0) wie folgt:

$$Q(x=0) = A_v = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} (x=0).$$
(7.4)

Die Randbedingungen (7.3) sowie die Gleichgewichtsbetrachtung (7.4) dienen zur Berechnung der Integrationskonstanten C_1 , C_2 , C_3 und C_4 , sowie der Auflagerkraft A. Sie ergeben sich zu

$$w(x = 0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_4 = 0,$$

$$\frac{dw}{dx}(x = 0) = \frac{A_v \kappa}{GA} \qquad \Rightarrow \qquad C_3 = \frac{A_v \kappa EI}{GA},$$

$$EI\frac{d^3w}{dx^3}(x = 0) = -A_v \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = -A_v,$$

$$w(x = l) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q \cdot l^4}{24} - A_v \cdot \frac{l^3}{6} + C_2 \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{A_v \kappa EI}{GA} l = 0 \dots (I),$$

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}(x = l) = -q\left(\frac{l^2}{6} + \frac{\kappa EI}{GA}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q \cdot l^2}{2} - A_v \cdot l + C_2 = -q\left(\frac{l^2}{6} + \frac{\kappa EI}{GA}\right) \dots (II).$$

$$(7.5)$$

Durch ein Additionsverfahren ergibt sich:

$$(\mathrm{II}) - 2 \cdot (\mathrm{I})/\ell^{2} : \qquad q \,\ell^{2} \,\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) - A_{v} \left(\ell - \frac{\ell}{3} + 2\frac{\kappa \, EI}{GA \, l}\right) = -q \,\left(\frac{l^{2}}{6} + \frac{\kappa \, EI}{GA}\right)$$
$$\Rightarrow \qquad A_{v} = \frac{q}{8} \left[\frac{7\,\ell + 12\,\frac{EI\,\kappa}{GA\,\ell^{2}}}{1 + 3\,\frac{EI\,\kappa}{GA\,\ell^{2}}}\right] = -C_{1} \,.$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in die Gleichungen 7.5 folgen die weiteren Integrationskonstanten:

$$C_2 = \frac{q\left(5\,\ell^2 - 36\,\frac{EI}{GA}\kappa - 72\frac{EI^2}{GA^2\ell^2}\kappa^2\right)}{24 + 72\,\frac{EI\kappa}{GA\ell^2}}, \qquad C_3 = \left(\frac{7\,q\,\ell^3 + 12\,q\frac{EI}{GA}\kappa\,l}{8\,\ell^2 + 24\,\frac{EI}{GA}\kappa}\right) \cdot \frac{\kappa\,EI}{GA}$$

Die Gleichung für die Biegelinie ergibt sich durch Einsetzen von C_1 bis C_4 in die letzte Zeile von Gleichung (7.2):

$$w(x) = \frac{q}{48 EI} \left[\frac{2 x^4 - 7 \ell x^3 + 5 \ell^2 x^2 + 6 \frac{EI \kappa}{GA} \left(7 x \ell - 6 x^2 - 2 \frac{x^3}{\ell} + \frac{x^4}{\ell^2} \right) + 72 \frac{EI^2 \kappa^2}{GA^2} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right)}{1 + 3 \frac{EI \kappa}{GA \ell^2}} \right].$$
(7.6)

Die Ableitungen dieses Ausdrucks ergeben sich wie folgt:

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{q}{48 EI} \left[\frac{8 x^3 - 21 \ell x^2 + 10 \ell^2 x + 6 \frac{EI\kappa}{GA} \left(7 \ell - 12 x - 6 \frac{x^2}{\ell} + 4 \frac{x^3}{\ell^2}\right) + 72 \frac{EI^2 \kappa^2}{GA^2} \left(\frac{1}{\ell} - 2 \frac{x}{\ell^2}\right)}{1 + 3 \frac{EI\kappa}{GA\ell^2}} \right]$$
(7.7)

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{q}{24 EI} \left[\frac{12 x^2 - 21 \ell x + 5 \ell^2 - 36 \frac{EI \kappa}{GA} \left(1 + \frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right) - 72 \frac{EI^2 \kappa^2}{GA^2 \ell^2}}{1 + 3 \frac{EI \kappa}{GA \ell^2}} \right], \quad (7.8)$$

$$\frac{d^3 w(x)}{dx^3} = \frac{q}{8 EI} \left[\frac{8 x - 7 \ell - 12 \frac{EI \kappa}{GA} \left(\frac{1}{\ell} - 2 \frac{x}{\ell^2} \right)}{1 + 3 \frac{EI \kappa}{GA \ell^2}} \right] = -\frac{Q(x)}{EI}.$$
(7.9)

Der Momentenverlauf ergibt sich nach Gleichung (7.2) zu:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} - q \frac{\kappa EI}{GA} = -\frac{q}{24} \left[\frac{12 x^2 - 21 \ell x + 5 \ell^2 - 36 \frac{EI \kappa}{GA} \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2}\right)}{1 + 3 \frac{EI \kappa}{GA \ell^2}} \right].$$
 (7.10)

Extremwerte der Biegemomente treten bei stetigen Momentenverlauf bei einem Vorzeichenwechsel der Querkraft auf, als auch an den Stabenden. Der dem Betrag nach größte Wert von M(x)tritt an der Einspannstelle auf. Durch Auswerten der Gleichung (7.10) für x = 0 erhält man:

$$M_A = M(x=0) = -\frac{q}{24} \left[\frac{5\,\ell^2 - 12\frac{EI\kappa}{GA}}{1 + 3\frac{EI\kappa}{GA\ell^2}} \right] \,. \tag{7.11}$$

Zur Ermittlung der Stelle \bar{x} , an der das maximale Moment auftritt, hat man daher $EI\frac{d^3w(x)}{dx^3} = -Q(x)$ nach Gleichung (7.9) gleich null zu setzen:

$$Q(\bar{x}) = \frac{q}{8} \left[\frac{7\,\ell - 8\,x + 12\frac{EI\,\kappa}{GA}\left(\frac{1}{\ell} - 2\frac{x}{\ell^2}\right)}{1 + 3\frac{EI\,\kappa}{GA\,\ell^2}} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{7\,l + 12\frac{EI\,\kappa}{GA\,l}}{8 + 24\frac{EI\,\kappa}{GA\,l^2}} \,. \tag{7.12}$$

Abschließend können wir aus den hergeleiteten Lösungen einen einfachen Übergang zur schubstarren Theorie $(GA/\kappa \to \infty)$ für schlanke Biegestäbe schaffen: Berücksichtigung von $GA/\kappa \to \infty$ in Gleichung (7.6)-(7.12) liefert folgende Ausdrücke für die Biegelinie und deren Ableitungen

$$w(x) = \frac{q}{48 EI} (2 x^{4} - 7 l x^{3} + 5 l^{2} x^{2}) = w(x),$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{q}{48 EI} (8 x^{3} - 21 l x^{2} + 10 l^{2} x) = -\phi(x),$$

$$\frac{d^{2}w(x)}{dx^{2}} = \frac{q}{24 EI} (12 x^{2} - 21 l x + 5 l^{2}) = -\frac{M(x)}{EI},$$

$$\frac{d^{3}w(x)}{dx^{3}} = \frac{q}{8 EI} (8 x - 7 l) = -\frac{Q(x)}{EI},$$
(7.13)

sowie für Schnittgrößen

$$M(x) = -\frac{q}{24} (12 x^2 - 21 l x + 5 l^2), \qquad (7.14)$$

$$M_A = -\frac{5 q l^2}{24}, (7.15)$$

$$Q(x) = -\frac{q}{8} (8x - 7\ell) . (7.16)$$

7.2 INTEGRATION DER DIFFERENTIALBEZIEHUNGEN DER BALKENTHEORIE AUSGEHEND VON DER DIFFERENTIALGLEICHUNG 2. ORDNUNG

Es sind folgende Annahmen vorauszusetzen, für die die Differentialbeziehungen der Balkentheorie entsprechend spezialisiert werden:

- Konstante Querschnittsfläche: GA(x) = konst = GA;
- Konstante Flächenmoment 2. Ordnung: EI(x) = konst = EI;
- Konstante Temperaturdifferenz $(T_u T_o)$: $\Delta T_k(x) = \text{konst} = \Delta T_k$

Zur Herleitung der Differentialgleichung 2. Ordnung wird die Gleichung (d) nach x abgeleitet und in die Gleichung (c) eingesetzt. Somit erhält man:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} - \frac{\Delta T_k}{h} \cdot \alpha_T - \frac{q(x)\kappa}{GA}$$
(7.17)

Diese Gleichung ist ein Ausgangspunkt für die Lösung von Problemen der Theorie gedrungener Stäbe.



Abbildung 7.2: Statisches System und Belastung – Bestimmung von M(x)

GESUCHT sind die Biegelinie w(x) und die Momentenlinie M(x).

Es handelt sich analog zum vorherigen Beispiel um ein einfach statisch unbestimmtes System unter isothermischen Bedingungen ($\Delta T_k = 0$), belastet durch eine konstante Streckenlast q(x) =konst = q. Bei Kenntnis der Auflagerreaktionen A_v und M_A erhält man die Momentenlinie M(x)aus einer Gleichgewichtsbetrachtung (siehe Abbildung):

$$(\Sigma M)_x = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) + \underbrace{(q \cdot x)}_R \frac{x}{2} - A_v \cdot x - M_A = 0.$$
 (7.18)

Durch Umformen dieses Ausdrucks erhält man die Biegemomentenlinie M(x) zu

$$M(x) = -\frac{q x^2}{2} + A_v \cdot x + M_A.$$
(7.19)

INGENIEURMECHANIK – ÜBUNGEN

Trägt man diese Beziehung in die Differentialgleichung (7.17) ein, so erhält man nach Umformen:

$$EI\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -M(x) - q\frac{EI\kappa}{GA} \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - A_v \cdot x - M_A - q\frac{EI\kappa}{GA}.$$
 (7.20)

Integration dieser Differentialgleichung führt auf folgende Ausdrücke:

$$EI\frac{dw(x)}{dx} = \frac{q x^3}{6} - A_v \frac{x^2}{2} - M_A x - q \frac{EI \kappa}{GA} x + C_3, \qquad (7.21)$$

$$EIw(x) = \frac{q x^4}{24} - A_v \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2} - q \frac{EI\kappa}{GA} \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$
(7.22)

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass bei Verwendung der Differentialgleichung 2. Ordnung zur Berechnung von Integrationskonstanten nur geometrische Randbedingungen verwendet werden können. Die Randbedingungen w(x = 0) = 0 und $\phi(x = 0) = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dx}(x = 0) = \frac{A_v \kappa}{GA}$ liefern $C_3 = \frac{A_v EI \kappa}{GA}$ und $C_4 = 0$. Setzt man die beiden Integrationskonstanten in die Gleichung (7.22) ein, so erhält man die gesuchte Biegelinie

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{q x^4}{24} - A_v \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2} \right) - \frac{q \kappa}{GA} \frac{x^2}{2} + \frac{A_v \kappa}{GA} x \,. \tag{7.23}$$

Die dritte geometrische Randbedingung, w(x = l) = 0, führt nach Einsetzen in die Gleichung (7.23) auf folgenden Zusammenhang zwischen A_v und M_A :

$$w(x=l) = \frac{1}{EI} \left(\frac{q \, l^4}{24} - A_v \, \frac{l^3}{6} - M_A \, \frac{l^2}{2} \right) - \frac{q \, \kappa}{GA} \, \frac{l^2}{2} + \frac{A_v \, \kappa}{GA} \, l = 0 \,. \tag{7.24}$$

Zur Lösung der Aufgabenstellung muss nun noch eine Gleichung gefunden werden, die einen Zusammenhang zwischen A_v und M_A herstellt. Diese Beziehung erhält man z. B. durch Formulieren der Gleichgewichtsbedingungen gegen Verdrehen um den Auflagerpunkt B:

$$(\Sigma M)_B = 0 \quad \Rightarrow \quad (q \cdot l)\frac{l}{2} - A_v l - M_A + \underbrace{\frac{q \, l^2}{6}}_{M_B} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_v \cdot l + M_A = \frac{2 \, q \, l^2}{3} \,. \tag{7.25}$$

Durch Lösen der beiden Gleichungen (7.24) und (7.25) erhält man

$$A_{v} = \frac{q}{8} \left[\frac{7\ell + 12\frac{EI\kappa}{GA\ell}}{1 + 3\frac{EI\kappa}{GA\ell^{2}}} \right], \qquad M_{A} = -\frac{q}{24} \left[\frac{5\ell^{2} - 12\frac{EI\kappa}{GA}}{1 + 3\frac{EI\kappa}{GA\ell^{2}}} \right].$$
(7.26)

Setzt man diese beiden Ausdrücke in die Momentenlinie nach Gleichung (7.19) ein, erhält man die gesuchte Momentenlinie zu:

$$\underbrace{M(x) = -\frac{q x^2}{2} + A_v \cdot x + M_A}_{\text{Gleichung (7.19)}} = -\frac{q}{24} \left[\frac{12 x^2 - 21 \ell x + 5 \ell^2 - 36 \frac{EI \kappa}{GA} \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2}\right)}{1 + 3 \frac{EI \kappa}{GA \ell^2}} \right]. \quad (7.27)$$

Setzt man A_v und M_A nach Gleichung (7.26) in die Gleichung (7.23) ein, erhält man die gesuchte Biegelinie zu:

$$w(x) = \frac{q}{48 EI} \left[\frac{2 x^4 - 7 \ell x^3 + 5 \ell^2 x^2 + 6 \frac{EI \kappa}{GA} \left(7 x \ell - 6 x^2 - 2 \frac{x^3}{\ell} + \frac{x^4}{\ell^2} \right) + 72 \frac{EI^2 \kappa^2}{GA^2} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right)}{1 + 3 \frac{EI \kappa}{GA \ell^2}} \right].$$
(7.28)



Abbildung 7.3: Statisches System und Belastung – Bestimmung von M(x)

GESUCHT sind die Biegelinie w(x) und die maximale Durchbiegung w_{max} .

Es handelt sich um ein statisch bestimmtes System, belastet durch eine Einzelkraft P am Kragarmende, und eine über die Querschnittshöhe linear veränderliche Temperatur $\Delta T_k = T_u - T_o$. Bei Kenntnis der Auflagerreaktionen A_v und M_A erhält man die Momentenlinie M(x) aus einer Gleichgewichtsbetrachtung (siehe Abbildung):

$$(\Sigma M)_x = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) - A_v \cdot x - M_A = 0.$$
(7.29)

Durch Umformen dieses Ausdrucks, unter Berücksichtigung von $A_v = P$ und $M_A = -P l$, erhält man die Biegemomentenlinie M(x) zu

$$M(x) = P \cdot x - P \, l = -P(l - x) \,. \tag{7.30}$$

Trägt man diese Beziehung in die Differentialgleichung (7.17) ein, so erhält man (mit q(x) = 0):

$$EI\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -M(x) - \frac{EI\Delta T_k}{h}\alpha_T \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d^2w(x)}{dx^2} = P(l-x) - \frac{EI\Delta T_k}{h}\alpha_T.$$
(7.31)

Integration dieser Differentialgleichung führt auf folgende Ausdrücke:

$$EI\frac{dw(x)}{dx} = Plx - P\frac{x^2}{2} - \frac{EI\Delta T_k}{h}\alpha_T x + C_1, \qquad (7.32)$$

$$EIw(x) = P l \frac{x^2}{2} - P \frac{x^3}{6} - \frac{EI \Delta T_k}{h} \alpha_T \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$
(7.33)

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 werden mit Hilfe der vorgeschriebene Randbedingungen angepasst. Es sind zwei geometrische (kinematische) Randbedingungen anzupassen, welche lauten

$$w(x=0) = 0,$$

$$\phi(x=0) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \frac{dw}{dx}(x=0) = Q(x=0)\frac{\kappa}{GA}.$$
(7.34)

Aus Gleichgewichtsbetrachtungen ergibt sich die Querkraft Q(x = 0) wie folgt:

$$Q(x=0) = A_v = P. (7.35)$$

Die Randbedingungen (7.34) sowie die Gleichgewichtsbetrachtung (7.35) liefern die Integrationskonstanten $C_1 = \frac{P EI \kappa}{GA}$ und $C_2 = 0$.

Setzt man die beiden Integrationskonstanten in die Gleichung (7.33) ein, so erhält man die gesuchte Biegelinie

$$w(x) = \frac{P x^2}{6 EI} (3 l - x) + \frac{P \kappa}{GA} x - \frac{\Delta T_k}{h} \alpha_T \frac{x^2}{2}.$$
 (7.36)

Die maximale Durchbiegung erhalten wir am Kragarmende durch Auswerten von (7.36) für x = l:

$$w(x=l) = \frac{P l^3}{\underbrace{3EI}}_{W_M} + \underbrace{\frac{P \kappa}{GA}}_{W_Q} l \underbrace{-\frac{\Delta T_k}{h} \alpha_T \frac{l^2}{2}}_{W_T}, \qquad (7.37)$$

mit w_M als der vom Biegemoment, w_Q als der von der Querkraft, und w_T als der von der Temperaturdifferenz herrührende Anteil der maximalen Duchbiegung. Weiters können wir folgendes Verhältnis zwischen der maximalen Durchbiegung zufolge der Querkraft und des Biegemoments angeben:

$$\frac{w_Q}{w_M} = \frac{3 EI \kappa}{l^2 GA},\tag{7.38}$$

wobei wir erkennen können, dass der Einfluss der Querkraft auf die Durchbiegung mit zunehmender Stablänge geringer wird, und daher nur bei sehr gedrungenen Stäben von Bedeutung ist.

Der Einfluss der Querkraft auf die Durchbiegung zeigen wir exemplarisch anhand eines I-Querschnitts aus Stahl ($E = 21000 \text{ kN/cm}^2$, $G = 7930 \text{ kN/cm}^2$) mit einer Querschnittshöhe von h = 2b ($\kappa = 2,119$). Somit erhalten wir Gleichung (7.38) in Abhängigkeit von l/h: $w_Q/w_M = 2,805 (h/l)^2$, siehe Abbildung 7.4, wobei festzuhalten ist, dass für Berechnungen nach Stabtheorie l/h > 5 gelten muss.



Abbildung 7.4: Verhältnis zwischen der maximalen Durchbiegung zufolge der Querkraft und des Biegemoments w_Q/w_M in Abhängigkeit von l/h, für einen Kragarm mit I-Querschnitt aus Stahl mit h = 2b, belastet durch eine Einzelkraft am Kragarmende

8. ERMITTLUNG VON SCHUBBEIWERTEN

In diesem Kapitel wird die Ermittlung von Schubbeiwerten gezeigt. Diese sind nur von der Querschnittsform und -größe abhängig, und damit rein geometrische Größen (so wie die Flächenmomente erster und zweiter Ordnung). Die Schubbeiwerte, κ_y und κ_z , dienen zur Bestimmung der in der Vorlesung eingeführten Timoshenko-Gleitungen

$$\gamma_{xy}^{TIM}(x) = Q_y(x) \frac{\kappa_y}{GA} \quad \text{und} \quad \gamma_{xz}^{TIM}(x) = Q_z(x) \frac{\kappa_z}{GA}.$$
 (8.1)

Die Schubbeiwerte sind definiert durch:

$$\kappa_y = \frac{A}{I_z^2} \int_A \left[\frac{S_z(y)}{d(y)} \right]^2 \mathrm{d}A \tag{8.2}$$

für die Gleitung zufolge einer in y-Richtung wirkende Querkraftkomponente Q_y , sowie

$$\kappa_z = \frac{A}{I_y^2} \int_A \left[\frac{S_y(z)}{d(z)} \right]^2 \mathrm{d}A \,, \tag{8.3}$$

für die Gleitung zufolge einer in z-Richtung wirkende Querkraftkomponente Q_z .

Zur Berechnung der Schubbeiwerte im Falle dünnwandiger offener Querschnitte wird folgende Idealisierung vorgenommen: Die einzelnen Querschnittsteile werden durch ihre Mittellinien repräsentiert, denen entsprechende Querschnittsbreiten d(s) zugeordnet sind. Dabei bezeichnet sdie Querschnittslaufkoordinate, die den Blechmittellinien folgt (wie auch bei der Ermittlung von Schubspannungen). Unter diesen Voraussetzungen gelten (mit $dA = d(s) \cdot ds$) folgende Beziehungen für die Schubbeiwerte:

$$\kappa_y = \frac{A}{I_z^2} \int_s \frac{S_z(s)^2}{d(s)} ds \quad \text{und} \quad \kappa_z = \frac{A}{I_y^2} \int_s \frac{S_y(s)^2}{d(s)} ds , \qquad (8.4)$$

wobei $S_y(s)$ für das statische Moment des zwischen s = 0 und der Stelle s gelegenen Querschnittsteils um die y-Achse steht (analoges gilt für $S_z(s)$). Die beiden statischen Momente sind wie folgt definiert:

$$S_y(s) = \int_s z(s) \underbrace{d(s) \, \mathrm{d}s}_{\mathrm{d}A} \quad \text{und} \quad S_z(s) = \int_s y(s) \underbrace{d(s) \, \mathrm{d}s}_{\mathrm{d}A}.$$
(8.5)

BEISPIEL: Rechteckquerschnitt

Gegeben ist ein Rechteckquerschnitt, laut nebenstehender Abbildung, mit Breite *b* und Höhe *h*. **Gesucht** sind der Schubbweiwerte κ_y und κ_z .

Für den Rechteckquerschnitt laut nebenstehender Abbildung können wir zur Berechnung des Schubbeiwertes κ_z von Gleichung (8.3) Gebrauch machen. Im Folgenden wird die Fläche und das Trägheitsmoment bezüglich der Querschnittsschwerachse y berechnet:

$$A = b \cdot h$$
, $I_y = \frac{b h^3}{12}$. (8.6)



Das statische Moment $S_y(z)$ um die y-Achse als Funktion der Koordinate z wird wie folgt berechnet:

$$S_y(z) = \int_A z \, \mathrm{d}A = b \int_{-h/2}^z z \, \mathrm{d}z = b \frac{z^2}{2} \Big|_{-h/2}^z = b \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right) = \frac{b}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right). \tag{8.7}$$

Einsetzen der Ausdrücke (8.6) und (8.7) in Gleichung (8.3) ergibt, unter Berücksichtigung von d(z) = b, und dA = b dz

$$\kappa_{z} = \frac{A}{I_{y}^{2}} \int_{A} \left[\frac{S_{y}(z)}{d(z)} \right]^{2} dA = \frac{b h}{\left(\frac{b h^{3}}{12} \right)^{2} - h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{\frac{b}{2} \left(z^{2} - \frac{h^{2}}{4} \right)}{b} \right]^{2} b dz .$$
(8.8)

Nach Vereinfachung erhalten wir

$$\kappa_z = \frac{144}{h^5} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)}{2} \right]^2 dz = \frac{36}{h^5} \int_{-h/2}^{h/2} \left(z^4 - 2z^2\frac{h^2}{4} + \frac{h^4}{16}\right) dz \,. \tag{8.9}$$

Schließlich folgt nach Integration und Zusammenfassen:

$$\kappa_z = \frac{36}{h^5} \left(\frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3} \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{16} z \right) \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{36}{h^5} \left(\frac{h^5}{160} - \frac{h^5}{48} + \frac{h^5}{32} \right) \cdot 2$$

= 6/5 = 1,2. (8.10)

In analoger Weise lässt sich der Schubbeiwert κ_y unter Verwendung von Gleichung (8.2) berechnen, welcher für den Rechteckquerschnitt den selben zuvor berechneten Wert ergibt

$$\kappa_y = \kappa_z = 1,2 \ . \tag{8.11}$$

BEISPIEL: Dünnwandiger offener Querschnitt

Gegeben ist ein dünnwandiger I-Querschnitt, laut nebenstehender Abbildung, mit Breite b, Höhe h = 2b, und Dicke d.

Gesucht ist der Schubbweiwert κ_z für eine zugehörige Querkraft Q_z .

Für den dünnwandigen Querschnitt können wir zur Berechnung des Schubbeiwertes κ_z von Gleichung (8.4) Gebrauch machen. Um eine Vereinfachung der Rechenschritte zu errreichen, betrachten wir nur die Profilmittellinien mit zugeordneten Querschnittsbreiten. Weiters ist es sinnvoll die Höhe h in Abhängigkeit der Breite b zu wählen (in unserem Fall h = 2 b). Im Folgenden wird die Fläche und das Trägheitsmoment bezüglich der Querschnittsschwerachse y berechnet:

$$A = 2 b d + (2 b) d = 4 b d, \qquad (8.12)$$

$$I_y = \frac{d(2b)^3}{12} + 2b \, d \, b^2 = \frac{8}{3} \, d \, b^3 \,, \tag{8.13}$$



wobei für I_y das Eigenträgheitsmoment der Flansche vernachlässigt wird. Diese Vereinfachung im Zuge der Berechung von Schubbeiwerten ist gerechtfertigt, wenn gilt: $h \ge b$ und $d \le b/10$.

Durch Ausnützung der Symmetrie bezüglich der *y*-Achse, genügt es, bei der Berechung des statischen Moments, nur die Hälfte des Querschnitts zu betrachten. Das statische Moment $S_y(s_1)$ um die *y*-Achse als Funktion der Laufkoordinate s_1 im Flansch (von Stelle () bis s_1), sowie das für die Stelle (1) ausgewertete statische Moment (von Stelle () bis (1)), werden wie folgt berechnet:

$$S_y(s_1) = \int_{s_1} z(s_1) \, d(s_1) \, \mathrm{d}s_1 = \underbrace{s_1 \, d}_{A_{s_1}} b \,, \qquad S_y^{(1)} = \frac{b}{2} \, d \, b = d \frac{b^2}{2} \,. \tag{8.14}$$

Weiters lautet das statische Moment $S_y(s_2)$ um die *y*-Achse als Funktion der Laufkoordinate s_2 im Steg (von Stelle) bis s_2), unter Berücksichtigung des zuvor berechneten statischen Moments mit Bezug auf die Stelle (1):

$$S_{y}(s_{2}) = 2 \cdot S_{y}^{(1)} + \Delta S_{y}(1) \to s_{2})$$

= $2 \cdot d\frac{b^{2}}{2} + \int_{s_{2}} z(s_{2}) d(s_{2}) ds_{2} = db^{2} + d \int_{s_{2}} (b - s_{2}) ds_{2}$
= $db^{2} + d \left(s_{2}b - \frac{s_{2}^{2}}{2}\right) = d \left(b^{2} + s_{2}b - \frac{s_{2}^{2}}{2}\right).$ (8.15)

Einsetzen der Ausdrücke (8.12) bis (8.15) in Gleichung (8.4), unter Ausnützung der Symmetrien,

ergibt

$$\kappa_{z} = 2 \cdot \frac{A}{I_{y}^{2}} \left[2 \cdot \int_{0}^{b/2} \frac{S_{y}(s_{1})}{d}^{2} ds_{1} + \int_{0}^{b} \frac{S_{y}(s_{2})}{d}^{2} ds_{2} \right]$$

$$= 2 \cdot \frac{4bd}{\left(\frac{8}{3}db^{3}\right)^{2}} \frac{1}{d} \left[2 \cdot \int_{0}^{b/2} (s_{1}bd)^{2} ds_{1} + \int_{0}^{b} d^{2} \left(b^{2} + s_{2}b - \frac{s_{2}^{2}}{2}\right)^{2} ds_{2} \right], \qquad (8.16)$$

wobei die Integration jeweils über die Laufkoordinate s_1 und s_2 durchgeführt werden muss. Nach Vereinfachung erhalten wir weiters

$$\kappa_z = \frac{9}{8 d^2 b^5} \left[2 \cdot \int_0^{b/2} b^2 d^2 s_1^2 ds_1 + \int_0^b d^2 \left(b^4 + \frac{s_2^4}{4} + 2 b^3 s_2 - s_2^3 b \right) ds_2 \right].$$
(8.17)

Schließlich folgt nach Integration und Zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
\kappa_z &= \frac{9}{8d^2b^5} \left[2 \cdot b^2 d^2 \frac{s_1^3}{3} \Big|_0^{b/2} + d^2 \left(b^4 s_2 + \frac{s_2^5}{20} + b^3 s_2^2 - \frac{s_2^4}{4} b \right) \Big|_0^b \right] \\
&= \frac{9}{8d^2b^5} \left[\frac{b^5 d^2}{12} + d^2 \left(b^5 + \frac{b^5}{20} + b^5 - \frac{b^5}{4} \right) \right] \\
&= \frac{9}{8} \left[\frac{1}{12} + \left(1 + \frac{1}{20} + 1 - \frac{1}{4} \right) \right] \\
&= \frac{9}{8} \left[\frac{1}{12} + \frac{36}{20} \right] = \frac{9}{8} \cdot \frac{113}{60} \\
&= \frac{339}{160} = 2,11875.
\end{aligned}$$
(8.18)

Zur Kontrolle können wir feststellen, dass der Schubbeiwert für den gegebenen I-Querschnitt, bei Wahl einer unendlich großen Höhe h (näherungsweise ab h > 40 b), gegen den Schubbeiwert für Rechteckquerschnitte $\kappa_z = 1,2$ (Berechung siehe vorangehendes Beispiel) konvergiert, siehe Abbildung 8.1. Es ist also festzustellen, dass der Schubbeiwert für I-Querschnitte mit zunehmender Höhe h kleiner wird, da der Einfluss der Flansche vernachlässigbar klein wird.





9. MIKROMECHANIK

In der Mikromechanik werden Materialien auf dem Level ihrer *mikroskopischen* Bestandteile analysiert. Das betrachtete Material wird dabei als *makrohomogen* jedoch *mikroheterogen* verstanden und durch ein repräsentatives Volumenelement (RVE) dargestellt. Dieses RVE entspricht einem Teilvolumen des Körpers, das einerseits ausreichend groß ist, um alle geometrischen Informationen über die Zusammensetzung des Materials zur Verfügung zu stellen, und andererseits hinreichend klein ist, um aus makroskopischer Sicht zu einem Punkt reduziert werden zu können und damit die Verwendung kontinuumsmechanischer Zusammenhänge zuzulassen. Das RVE muss also die sogenannte "Trennung der Längenskalen" $d \ll \ell \ll \mathcal{L}$ erfüllen, mit der charakteristischen Abmessung der Heterogenitäten d, der charakteristischen Abmessung des Volumenelements ℓ , sowie der charakteristischen Längenskala der Belastung oder Geometrie \mathcal{L} .

Die Mikrostruktur innerhalb eines RVEs ist in den meisten Fällen jedoch so kompliziert, dass sie nicht bis ins kleinste Detail beschrieben werden kann. Aus diesem Grund wird das Material in deutlich unterscheidbare quasi-homogene Bestandteile, sogenannte *Materialphasen*, aufgeteilt. Diese Phasen weisen spezifische Materialeigenschaften auf, die teilweise quantifizierbar sind (z.B. Volumenanteile und elastische Eigenschaften) und teilweise qualitativer Natur sind (z.B. charakteristische Form und Orientierung). Auf makroskopischer Ebene anisotrope Materialeigenschaften können folglich durch die Form und Orientierung der Materialphasen bedingt werden, trotz isotroper Materialeigenschaften der einzelnen Matrialphasen.

Ziel der Mikromechanik ist es, das makroskopische Verhalten des RVEs, und somit des dadurch repräsentierten Materials, auf Grundlage der bekannten Eigenschaften seiner einzelnen Phasen vorherzusagen. Dieser Prozess wird als *Homogenisierung* bezeichnet.

Ist im umgekehrten Fall eine makroskopische Größe ("M") bekannt, beispielsweise eine Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}$ oder eine Spannung $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$, und man möchte daraus die entsprechende mikroskopische Größe (" μ ") innerhalb der *r*-ten Phase ermitteln, also die Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}_{r}^{\mu}$ bzw. die Spannung $\boldsymbol{\sigma}_{r}^{\mu}$, bezeichnet man diesen Prozess als *Konzentration* oder *Lokalisierung*.



Die wichtigsten Formeln, die im Zuge der Homogenisierung bzw. Konzentration auftreten, werden im folgenden Abschnitt angeführt.

Mittelungsregel

Die makroskopisch homogenen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}$ bzw. Spannungen $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ ergeben sich auf Basis der *Mittelungsregel für Verzerrungen bzw. Spannungen* als räumliches Mittel der mikroskopischen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_{r}^{\mu}$ bzw. Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_{r}^{\mu}$, welche innerhalb der im RVE auftretenden Phasen r herrschen, zu:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}} = \sum_{r} f_{r}^{\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_{r}^{\mu} \tag{9.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}} = \sum_{r} f_{r}^{\mu} \boldsymbol{\sigma}_{r}^{\mu} \tag{9.2}$$

Dabei steht f_r^{μ} für den Volumenateil der *r*-ten Phase, $f_r^{\mu} = V_r^{\mu}/V_{\text{RVE}}$, wobei $\sum f_r^{\mu} = 1$.

Konzentrationsbeziehung

Die mittlere mikroskopische Verzerrung in der r-ten Phase ε_r^{μ} ist über den Verzerrungs-Konzentrationstensor oder Lokalisierungstensor \mathbb{A}_r^{μ} mit der makroskopischen Verzerrung $\varepsilon^{\mathbb{M}}$ wie folgt verknüpft:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r^{\mu} = \mathbb{A}_r^{\mu} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}} \tag{9.3}$$

Die entsprechende mikroskopische Phasenspannung σ_r^{μ} kann unter Verwendung des *lokalen kon*stitutiven Gesetzes ermittelt werden. Für linear elastisches Materialverhalten lautet dieses mit der Phasensteifigkeit \mathbb{C}_r^{μ} :

$$\boldsymbol{\sigma}_r^{\mu} = \mathbb{C}_r^{\mu} : \boldsymbol{\varepsilon}_r^{\mu} \tag{9.4}$$

Elastizitätshomogenisierungsregel

Die Steifigkeit eines makrohomogenen (jedoch mikroheterogenen) Materials kann auf Grundlage seiner Phasen r mit den jeweiligen Steifigkeiten \mathbb{C}_r^{μ} und Volumenanteilen f_r^{μ} durch Homogenisierung wie folgt ermittelt werden:

$$\mathbb{C}^{\mathrm{M}} = \sum_{r} f_{r}^{\mu} \mathbb{C}_{r}^{\mu} : \mathbb{A}_{r}^{\mu}$$

$$(9.5)$$

Konzentrationstensor \mathbb{A}^{μ}_{r}

Der zur Homogenisierung bzw. Lokalisierung benötigte Konzentrationstensor \mathbb{A}_r^{μ} kann auf Basis eines *Matrix-Einschluss-Problems* nach Eshelby abgeschätzt werden. Die einzelnen Phasen r werden als Einschlüsse in einer unendlichen Matrix mit Steifigkeit \mathbb{C}^0 betrachtet. Die Matrix kann dabei nach zwei unterschiedlichen Schemata definiert werden:



unendliche Matrix

- Weist das reale Material eine durchgängige Phase m auf, von der alle übrigen Phasen r vollständig umgeben sind, wird das Mori-Tanaka Schema herangezogen. Dabei wird die Matrix selbst auch als (eben diese durchgängige) Phase definiert, mit der entsprechenden Phasensteifigkeit C⁰ = C^μ_m und dem Volumenanteil f⁰ = f^μ_m.
- Weist das reale Material keine durchgängige Phase auf, sondern die einzelnen Phasen stehen in direkter Interaktion zueinandern, wird das autokohärente Schema herangezogen. Dabei wird eine fiktive Matrix definiert, welche die über das gesamte RVE homogenisierte Steifigkeit C⁰ = C^M aufweist und keinen Volumenanteil besitzt (f⁰ = 0).

Der Konzentrationstensor \mathbb{A}_r^{μ} ist für beide Schemata wie folgt definiert:

$$\mathbb{A}_r^{\mu} = \mathbb{A}_r^{\infty} : \left\{ \sum_s f_s^{\mu} \mathbb{A}_s^{\infty} \right\}^{-1}$$
(9.6)

 mit

a

$$\mathbb{A}_r^{\infty} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_r^0 : (\mathbb{C}_r^{\mu} - \mathbb{C}^0)]^{-1}$$
(9.7)

Spezialisierung von \mathbb{A}_r^{∞} gemäß (9.7) für die beiden unterschiedlichen Schemata ergibt:

Mori-Tanaka Schema:
$$\mathbb{A}_m^{\infty} = \mathbb{I}$$
 bzw. $\mathbb{A}_r^{\infty} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_r^0 : (\mathbb{C}_r^{\mu} - \mathbb{C}_m^{\mu})]^{-1}$ (9.8)

utokohärentes Schema:
$$\mathbb{A}_r^{\infty} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_r^0 : (\mathbb{C}_r^{\mu} - \mathbb{C}^M)]^{-1}$$
 (9.9)

I bezeichnet dabei den Einheitstensor vierter Stufe mit den Komponenten $I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, wobei $\delta_{ij} = 1$ für i = j und $\delta_{ij} = 0$ in allen anderen Fällen (Kronecker Delta).

 \mathbb{P}_r^0 bezeichnet den sogenannten *Morphologietensor* der *r*-ten Phase, welcher von der Form und der Orientierung des Einschlusses *r* sowie von der Steifigkeit der umgebenden Matrix \mathbb{C}^0 abhängig ist: $\mathbb{P}_r^0 = \mathbb{P}_r^0(w, s, \theta, \varphi, \mathbb{C}^0)$.

Die Orientierung des Einschlusses wird dabei durch die beiden Winkel θ und φ definiert. Die Form des Einschlusses wird durch das Seitenverhältnis $w = \frac{a_{\theta}}{a_{\varphi}}$ und die Schlankheit $s = \frac{a_{\theta}}{a_{r}}$ beschrieben:

- elliptischer Einschluss: $a_{\theta}, a_{\varphi}, a_{r}$ = beliebig
- zylindrischer Einschluss: w = 1, s = 0
- kugelförmiger Einschluss: w=1, s=1



Eine analytische Lösung des Morphologietensors existiert nur für einfache Matrix-Einschluss-Probleme. Im Anhang D sind die Lösungen für die folgenden vier Fälle angeführt:

- $\mathbb{P}_{\mathrm{zyl}}^{\mathrm{iso}}:$ zylindrischer Einschluss (mit Orientierung $\theta,\varphi)$ in einer isotropen Matrix
- \mathbb{P}_{zyl}^{trans} : zylindrischer Einschluss (entlang x_3 -Achse orientiert) in einer transversal isotropen Matrix
- \mathbb{P}_{sph}^{iso} : kugelförmiger Einschluss in einer isotropen Matrix
- \mathbb{P}_{sph}^{trans} : kugelförmiger Einschluss in einer transversal isotropen Matrix

Anwendung des Mori-Tanaka Schemas: Faserverbundwerkstoff

Gegeben ist eine mikromechanische Darstellung von einem Faserverbundwerkstoff. Da die Fasern im Material vollständig in eine Matrix eingebettet sind, wird das *Mori-Tanaka Schema* herangezogen. Im folgenden Beispiel wird von einem glasfaserverstärkten Epoxidharz (Index *GFK*) ausgegangen. Die beiden Bestandteile Glas (Index *glas*) und Epoxidharz (Index *harz*) weisen elastische Eigenschaften laut Tabelle 9.1 auf. Die Volumenanteile der beiden Phasen f_{glas}^{μ} bzw. f_{harz}^{μ} können in Abbildung 9.1 abgelesen werden.



Abbildung 9.1: RVE eines glasfaserverstärkten Epoxidharzes nach dem Mori-Tanaka Schema

Phase	Elastizitäts-	Schubmodul	Kompressions-	Material-	Form
	$\mathbf{modul} \ E \ [\text{GPa}]$	G [GPa]	$\mathbf{modul} \ K \ [\text{GPa}]$	verhalten	
Glas	$E_{glas} = 70,0$	$G_{glas} = 28,7$	$K_{glas} = 41,6$	isotrop	zylindrischer Einschluss
Epoxidharz	$E_{harz} = 3,4$	$G_{harz} = 1,2$	$K_{harz} = 6.8$	isotrop	Matrix

Tabelle 9.1: Eigenschaften der auftretenden Phasen: Glas und Epoxidharz

Gesucht ist der Steifigkeitstensor \mathbb{C}_{GFK}^{M} des Faserverbundwerkstoffes.

1. Berechnung der Steifigkeitstensoren der Phasen:

Der Steifigkeitstensor einer Phase r mit isotropem Materialverhalten, ergibt sich zu

$$\mathbb{C}_{r}^{\mu} = 3 \, K_{r} \, \mathbb{I}^{vol} + 2 \, G_{r} \, \mathbb{I}^{dev} \,. \tag{9.10}$$

Dabei steht \mathbb{I}^{vol} für den volumetrischen Anteil des Einheitstensors vierter Stufe mit den Komponenten $I_{ijkl}^{vol} = \frac{1}{3} \,\delta_{ij} \,\delta_{kl}$ und \mathbb{I}^{dev} für den deviatorischen Anteil des Einheitstensors mit $\mathbb{I}^{dev} = \mathbb{I} - \mathbb{I}^{vol}$.

```
%%%Epoxidharz-Matrix
%Volumenanteil
f_harz=0.4; %[-]
%Kompressionsmodul
K_harz=6.8; %[GPa]
%Schubmodul
```

```
G_harz=1.2; %[GPa]
%Berechnung des Steifigkeitstensors
C_harz=3*K_harz*I_vol+2*G_harz*I_dev; %[GPa]
```

```
%%%Glasfaser
%Volumenanteil
f_glas=0.6; %[-]
%Kompressionsmodul
K_glas=41.6; %[GPa]
%Schubmodul
G_glas=28.7; %[GPa]
%Berechnung des Steifigkeitstensors
C_glas=3*K_glas*I_vol+2*G_glas*I_dev; %[GPa]
```

Daraus folgt:

$\mathbb{C}^{\mu}_{harz} =$	8,4	6,0	$_{6,0}$	0	0	0	GPa,		79,9	$22,\!5$	$22,\!5$	0	0	0 -	
	6,0	8,4	$_{6,0}$	0	0	0		$\mathbb{P}_{a}, \mathbb{C}^{\mu}_{glas} =$	22,5	$79,\!9$	$22,\!5$	0	0	0	GPa
	6,0	6,0	8,4	0	0	0			22,5	$22,\!5$	$79,\!9$	0	0	0	
	0	0	0	2,4	0	0			0	0	0	$57,\!4$	0	0	
	0	0	0	0	2,4	0			0	0	0	0	$57,\!4$	0	
	0	0	0	0	0	2,4	01 02 02		0	0	0	0	0	$57,\!4$	
	-					-	e ₁ ,e ₂ ,e ₃		-					-	(9.11)

2. Berechnung der Konzentrationstensoren:

Zur Berechnung der Konzentrationstensoren muss im ersten Schritt der Morphologietensor für alle in Form von Einschlüssen auftretenden Phasen definiert werden. Im vorliegenden Beispiel treten zylindrische Einschlüsse in einer isotropen Matrix auf. Die Einschlüsse sind entlang der x_3 -Achse orientiert ($\theta = \varphi = 0$). Es wird also der Morphologietensor \mathbb{P}_{zyl}^{iso} gemäß (D.1) herangezogen und für die vorhandene Matrixsteifigkeit \mathbb{C}_{harz}^{μ} und die Winkel $\theta = \varphi = 0$ ausgewertet.

```
function[P_E]=P_iso_zyl_rot(C0,theta,phi)
%INPUT: C0 - Steifigkeitstensor der umgebenden isotropen Matrix, theta, phi - Orientierung
%OUTPUT: P_E - Morphologietensor eines zylindrischen Einschlusses E (mit Orientierung theta, phi)
%in einer isotropen Matrix
```

%Definition des Morphologietensors %Glasfaser: zylinderischer Einschluss in isotroper Matrix P_glas=P_iso_zyl_rot(C_harz,0,0) %[1/GPa]

Die Berechnung der Konzentrationstensoren erfolgt für das vorliegende *Mori-Tanka Schema* gemäß den Gleichungen (9.6) und (9.8):

$$\mathbb{A}_{harz}^{\mu} = \mathbb{A}_{harz}^{\infty} : \left\{ f_{harz}^{\mu} \mathbb{A}_{harz}^{\infty} + f_{glas}^{\mu} \mathbb{A}_{glas}^{\infty} \right\}^{-1} \\
 \mathbb{A}_{glas}^{\mu} = \mathbb{A}_{glas}^{\infty} : \left\{ f_{harz}^{\mu} \mathbb{A}_{harz}^{\infty} + f_{glas}^{\mu} \mathbb{A}_{glas}^{\infty} \right\}^{-1}$$
(9.12)

mit

$$\mathbb{A}_{harz}^{\infty} = \mathbb{I}
\mathbb{A}_{glas}^{\infty} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{zyl}^{iso}(\mathbb{C}_{harz}^{\mu}) : (\mathbb{C}_{glas}^{\mu} - \mathbb{C}_{harz}^{\mu})]^{-1}$$
(9.13)

INGENIEURMECHANIK – ÜBUNGEN

```
%Berechnung von A_inf
A_inf_harz=I; %[-]
A_inf_glas=inv(I+P_glas*(C_glas-C_harz)); %[-]
```

%Berechnung der Konzentrationstensoren
A_harz=A_inf_harz/(f_harz*A_inf_harz+f_glas*A_inf_glas); %[-]
A_glas=A_inf_glas/(f_harz*A_inf_harz+f_glas*A_inf_glas); %[-]

3. Homogenisierung der Steifigkeitstensoren:

Der Steifigkeitstensor des Faserverbundwerkstoffes wird durch Homogenisierung der Steifigkeitstensoren seiner beiden Phasen gemäß Gleichung (9.5) ermittelt:

$$\mathbb{C}_{GFK}^{M} = f_{harz}^{\mu} \, \mathbb{C}_{harz}^{\mu} : \mathbb{A}_{harz}^{\mu} + f_{glas}^{\mu} \, \mathbb{C}_{glas}^{\mu} : \mathbb{A}_{glas}^{\mu}$$
(9.14)

%Berechnung des homogenisierten Steifigkeitstensors C_GFK=f_harz*C_harz*A_harz+f_glas*C_glas*A_glas; %[GPa]

Daraus ergibt sich:

$$\mathbb{C}_{GFK}^{M} = \begin{bmatrix} 19,6 & 11,9 & 9,2 & 0 & 0 & 0 \\ 11,9 & 19,6 & 9,2 & 0 & 0 & 0 \\ 9,2 & 9,2 & 48,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,7 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{1},\mathbf{e}_{2},\mathbf{e}_{3}}$$
(9.15)

Man erkennt, dass aus dem Gefüge der beiden isotropen Phasenmaterialien ein transversal isotroper Verbundwerkstoff entsteht, welcher in Richtung der Fasern einen deutlich höheren Elastizitätsmodul aufweist:

$$E_{11} = E_{22} = \frac{1}{D_{GFK,1111}^{\rm M}} = \frac{1}{0,083} = 12,07 \,\text{GPa}$$
 (9.16)

$$E_{33} = \frac{1}{D_{GFK,3333}^{\rm M}} = \frac{1}{0,023} = 43,40 \,\text{GPa}\,,\tag{9.17}$$

wobei gilt $\mathbb{D}^{\mathrm{M}} = (\mathbb{C}^{\mathrm{M}})^{-1}$.

```
%Berechnung des Nachgiebigkeitstensors
D_GFK=inv(C_GFK); %[1/GPa]
%Berechnung der Elastizitaetsmoduli
E_11=1/D_GFK(1,1); %[GPa]
E_33=1/D_GFK(3,3); %[GPa]
```

Gesucht ist die Veränderung der Größe der richtungsabhängigen Elastizitätsmoduli E_{11} , E_{22} und E_{33} , wenn man den Volumenanteil der Fasern f_{alas}^{μ} variiert.

Die Steifigkeitstensoren der Phasen \mathbb{C}_{harz}^{μ} und \mathbb{C}_{glas}^{μ} , sowie \mathbb{A}^{∞} sind unabhängig von den Volumenanteilen. Die Konzentrationstensoren \mathbb{A} und somit auch der homogenisierte Steifigkeitstensor \mathbb{C}_{GFK}^{M} werden jedoch von den Volumenanteilen beeinflusst. Um diesen Einfluss untersuchen zu können, müssen also die Berechnungen (9.12)-(9.17) mit variierten Volumenanteilen mehrmals wiederholt werden.

Diese Aufgabe wird mithilfe von MATLAB gelöst: Es wird eine for Schleife programmiert, welche eine systematische Wiederholung von Befehlen über einen zu Beginn definierten Wertebereich ausführt. In diesem Beispiel wird bei jedem Durchlauf der Schleife der Volumenanteil der Fasern gesteigert und die entsprechenden Elastizitätsmoduli berechnet.

```
i=0; %Der Schleifenindex i wird mit 0 initialisiert und steigt bei jedem Durchlauf um 1 an
for f_glas=0:0.01:1 %[-]
   % f_glas=Anfangswert:Inkrement:Endwert
   % Der Wertebereich von f_glas beginnt bei 0
   % steigt in jedem Durchlauf um 0.01 an
   % und endet bei 1
   %Erhoehung des Schleifenindex um 1
   i=i+1; %[-]
   %Berechnung des entsprechenden Volumenanteils der Matrix
   f_harz=1-f_glas; %[-]
   %Berechnung der Konzentrationstensoren
   A_harz=A_inf_harz/(f_harz*A_inf_harz+f_glas*A_inf_glas); %[-]
   A_glas=A_inf_glas/(f_harz*A_inf_harz+f_glas*A_inf_glas); %[-]
   %Berechnung des homogenisierten Steifigkeitstensors
   C_GFK=f_harz*C_harz*A_harz+f_glas*C_glas*A_glas; %[GPa]
   %Berechnung der Elastizitaetsmoduli
   D_GFK=inv(C_GFK); %[1/GPa]
   E_11=1/D_GFK(1,1); %[GPa]
   E_33=1/D_GFK(3,3); %[GPa]
   %Am Ende von jedem Durchlauf werden die entsprechenden Werte fuer f_F, E_11 und E_33
   %in einem Zeilenvektor in der Spalte i abgespeichert
   E_11_var(1,i)=E_11; %[GPa]
   E_33_var(1,i)=E_33; %[GPa]
    f_glas_var(1,i)=f_glas;
                             8[-]
end
```

Um den Einfluss des Faseranteils auf die Elastizitätsmoduli zu veranschaulichen, werden die Ergebnisse der programmierten Schleife in einer Grafik dargstellt:

```
figure %oeffnet ein Grafikfenster
plot(f_glas_var,E_l1_var,'--','Color','k','linewidth',2) %erzeugt den Verlauf von E_l1
hold on %ermoeglicht das Hinzufuegen von weiteren Verlaeufen im gleichen Grafikfenster
plot(f_glas_var,E_33_var,'-','Color','k','linewidth',2) %erzeugt den Verlauf von E_33
grid on %fuegt einen Achsenraster hinzu
%Beschriftung der Achsen
xlabel('Volumenanteil der Glasfasern f_{glas} [-]', 'FontSize', 14, 'FontName', 'Times');
ylabel('Elastizitatsmodul E [GPa]', 'FontSize', 14,'FontName', 'Times');
%Legende
h=legend('E_{11} = E_{22}','E_{33}','location','Northwest');
set(h, 'FontSize', 14, 'FontName', 'Times');
ax=gca;
```

set(gca, 'FontSize',14)



Abbildung 9.2: Veränderung der Elastizitätsmoduli in Abhängigkeit des Faseranteils

Man erkennt, dass im Fall von purem Epoxidharz ($f_{glas}^{\mu} = 0$) bzw. purem Glas ($f_{glas}^{\mu} = 1$) die Richtungsabhängigkeit des Elastizitätsmoduls verschwindet ($E_{11} = E_{22} = E_{33}$) und der Wert jenem des jeweiligen isotropen Phasenmaterials ($E_{harz} = 3,4$ GPa bzw. $E_{glas} = 70$ GPa) entspricht. Während E_{33} linear mit dem Faseranteil zunimmt, erfahren E_{11} und E_{22} erst bei einem Faseranteil über 80% einen starken Anstieg.

Anwendung des autokohärenten Schemas: Kollagenfaser

Gegeben ist eine mikromechanische Darstellung von einer hydrierten Kollagenfaser in Form eines Zwei-Stufen Homogenisierungsschemas (siehe Abbildung 9.3). Die beiden RVE Stufen repräsentieren eine Kollagenfaser (Index fas) bzw. eine Kollagenfibrille (Index fib) und sind jeweils durch ein *autokohärentes Schema* beschrieben. Die beiden Hauptbestandteile Wasser (Index H_2O) und molekulares Kollagen (Index kol) weisen elastische Eigenschaften laut Tabelle 9.2 auf. Die Volumenanteile sind vom Wasser-Kollagen-Massenverhältnis abhängig; wir wählen sie in diesem Beispiel wie folgt:

$$f_{kol}^{fib} = 0.45 \quad f_{H_2O}^{fib} = 0.55 \quad \text{und} \quad f_{fib}^{fas} = 0.70 \quad f_{H_2O}^{fas} = 0.30$$
 (9.18)

 f^{fib} steht dabei für die Volumenanteile innerhalb der Kollagenfibrille (RVE 1) und f^{fas} für die Volumenanteile innerhalb der Kollagenfaser (RVE 2).



Abbildung 9.3: Zwei-Stufen Homogenisierungsschema einer hydrierten Kollagenfaser

RVE	Phase	Schubmodul	Kompressions-	Material-	Form	
		G [GPa]	$\mathbf{modul} \ K \ [\text{GPa}]$	verhalten		
RVE 1	mol. Kollagen	$G_{kol} = 1,35$	$K_{kol} = 3,51$	isotrop	zylindrischer Einschluss	
	Wasser	$G_{H_2O} = 0$	$K_{H_2O} = 2,30$	isotrop	kugelförmiger Einschluss	
RVE 2	Wasser	$G_{H_2O} = 0$	$K_{H_2O} = 2,30$	isotrop	zylindrischer Einschluss	
	Fibrille	richtungsabh.	richtungsabh.	trans. isotrop	zylindrischer Einschluss	

Tabelle 9.2: Eigenschaften der auftretenden Phasen

Gesucht ist der Steifigkeitstensor der Kollagenfaser $\mathbb{C}^{\mathrm{M}}_{fas}$.

Um den Steifigkeitstensor der Kollagenfaser \mathbb{C}_{fas}^{M} berechnen zu können, müssen die Steifigkeitstensoren aller auftretenden Phasen bekannt sein. Im ersten Schritt muss also das RVE 1, welches die Fibrille repräsentiert, homogenisiert werden. Im Anschluss kann der dabei ermittelte Steifigkeitstensor der Fibrille \mathbb{C}_{fib}^{M} genutzt werden, um die Eigenschaften der Faser zu homogenisieren.

A. Homogenisierungsstufe 1: Fibrille

1. Berechnung der Steifigkeitstensoren der Phasen

Analog zum vorangehenden Beispiel werden die Steifigkeitstensoren der mikroskopischen Phasen in RVE 1 gemäß Gleichung (9.10) berechnet. Daraus folgt:

2. Berechnung des homogenisierten Steifigkeitstensors:

Da in diesem Beispiel ein *autokohärentes Schema* vorliegt, ist die Steifigkeit der Matrix, welche für die Berechnung der Morphologietensoren und der Konzentrationstensoren benötigt wird, nicht von vornherein bekannt, sondern entspricht genau jener Steifigkeit $\mathbb{C}_{fib}^{\mathrm{M}}$ die wir berechnen wollen. Aus diesem Grund muss eine *iterative Berechnung* mit Iterationsschritten (*i*) durchgeführt werden:

- 1. Annahme eines beliebigen Startwerts für die Matrixsteifigkeit (z.B. $\mathbb{C}_{fib,start}^{\mathrm{M}(i=1)} = \mathbb{C}_{kol}^{\mu}$)
- 2. Berechnung der homogenisierten Steifigkeit $\mathbb{C}_{fib,neu}^{\mathcal{M}(i)}$ auf Basis von $\mathbb{C}_{fib,start}^{\mathcal{M}(i)}$
 - (a) Im ersten Schritt muss wieder der Morphologietensor für alle in Form von Einschlüssen auftretenden Phasen definiert werden. Die beiden isotropen Phasen werden im Gefüge ein transversal isotropes Materialverhalten aufweisen. Daher werden die Morphologietensoren gemäß (D.4) und (D.8)-(D.12) wie folgt definiert:
 - Wasser: $\mathbb{P}_{sph}^{trans}(\mathbb{C}_{fib,start}^{M(i)})$ kugelförmiger Einschluss in transversal isotroper Matrix - Kollagen: $\mathbb{P}_{zyl}^{trans}(\mathbb{C}_{fib,start}^{M(i)})$ - zylindrischer Einschluss in transversal isotroper Matrix
 - (b) Berechnung der Konzentrationstensoren gemäß (9.6) und (9.9)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{A}_{H_{2}O}^{fib(i)} = \mathbb{A}_{H_{2}O}^{\infty(i)} : \left\{ f_{H_{2}O}^{fib} \mathbb{A}_{H_{2}O}^{\infty(i)} + f_{kol}^{fib} \mathbb{A}_{kol}^{\infty(i)} \right\}^{-1} \\
& \mathbb{A}_{kol}^{fib(i)} = \mathbb{A}_{kol}^{\infty(i)} : \left\{ f_{H_{2}O}^{fib} \mathbb{A}_{H_{2}O}^{\infty(i)} + f_{kol}^{fib} \mathbb{A}_{kol}^{\infty(i)} \right\}^{-1}
\end{aligned} \tag{9.20}$$

 mit

$$\mathbb{A}_{H_2O}^{\infty(i)} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{\text{sph}}^{\text{trans}}(\mathbb{C}_{fib,start}^{\mathcal{M}(i)}) : (\mathbb{C}_{H_2O}^{\mu} - \mathbb{C}_{fib,start}^{\mathcal{M}(i)})]^{-1} \\
\mathbb{A}_{kol}^{\infty(i)} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{\text{zyl}}^{\text{trans}}(\mathbb{C}_{fib,start}^{\mathcal{M}(i)}) : (\mathbb{C}_{kol}^{\mu} - \mathbb{C}_{fib,start}^{\mathcal{M}(i)})]^{-1}$$
(9.21)

(c) Homogenisierung der Steifigkeitstensoren gemäß (9.5)

$$\mathbb{C}_{fib,neu}^{\mathcal{M}(i)} = f_{H_2O}^{fib} \,\mathbb{C}_{H_2O}^{\mu} : \mathbb{A}_{H_2O}^{fib(i)} + f_{kol}^{fib} \,\mathbb{C}_{kol}^{\mu} : \mathbb{A}_{kol}^{fib(i)}$$
(9.22)
3. Berechnung des Fehlers $F = \frac{\left\|\mathbb{C}_{fib,neu}^{\mathrm{M}(i)} - \mathbb{C}_{fib,start}^{\mathrm{M}(i)}\right\|}{\left\|\mathbb{C}_{fib,neu}^{\mathrm{M}(i)}\right\|}$

4. Kontrolle:

- (a) $F \leq Toleranz$: Die Annahme war korrekt und entspricht der tatsächlichen Matrixsteifigkeit: $\mathbb{C}_{fib}^{\mathrm{M}(i)} = \mathbb{C}_{fib,neu}^{\mathrm{M}(i)} \approx \mathbb{C}_{fib,start}^{\mathrm{M}(i)}$
- (b) F > Toleranz: Eine neue Annahme muss getroffen werden und dient als neuer Startwert für die Berechnung: $\mathbb{C}_{fib,start}^{M(i+1)} = (\mathbb{C}_{fib,neu}^{M(i)} + \mathbb{C}_{fib,start}^{M(i)})/2$ Die Schritte 2-4 werden wiederholt bis der Fehler unter der Toleranzgrenze liegt

Die iterative Berechnung wird mithilfe von MATLAB gelöst: Es wird eine while Schleife programmiert, welche eine systematische Wiederholung von Befehlen ausführt solange eine bestimmte Bedingung (nicht) erfüllt ist. In diesem Beispiel wird in jedem Durchlauf der Schleife eine verbesserte Näherung an den Steifigkeitstensor \mathbb{C}_{fib}^{M} berechnet, solange bis der auftretende Fehler F unter der Toleranzgrenze liegt.

```
%%%Wasser
f_H2O=0.55; K_H2O=2.3; G_H2O=0; C_H2O=3*K_H2O*I_vol+2*G_H2O*I_dev;
%%%Kollagen
f_kol=0.45; K_kol=3.51; G_kol=1.35; C_kol=3*K_kol*I_vol+2*G_kol*I_dev;
C_fib_start=C_kol; %[GPa] %Startwert festlegen
F=1; %[-]%Der Fehler wird mit 1 initialisiert und am Ende von jedem Durchlauf neu berechnet
while F>0.00001 %[-] %die Schleife wird wiederholt solange der Fehler ueber der Toleranzgrenze liegt
    %Berechnung der Morphologietensoren
   P_H2O=P_transiso_sph(C_fib_start); %[1/GPa]
    P_kol=P_transiso_zyl(C_fib_start); %[1/GPa]
    %Berechnung der Konzentrationstensoren
    A_inf_H2O=inv(I+P_H2O*(C_H2O-C_fib_start)); %[-]
    A_inf_kol=inv(I+P_kol*(C_kol-C_fib_start)); %[-]
    A_H2O=A_inf_H2O/(f_H2O*A_inf_H2O+f_kol*A_inf_kol); %[-]
    A_kol=A_inf_kol/(f_H2O*A_inf_H2O+f_kol*A_inf_kol); %[-]
    %Berechnung des homogenisierten Steifigkeitstensors
    C_fib_neu=f_H2O*C_H2O*A_H2O+f_kol*C_kol*A_kol; %[GPa]
    %Berechnung des Fehlers
    F=norm(C_fib_neu-C_fib_start)/norm(C_fib_neu); %[-]
    %Neudefinition des Startwerts fuer den naechsten Iterationsschritt
    C_fib_start=(C_fib_neu+C_fib_start)/2; %[GPa]
end
%Sobald die while Schleife verlassen wird, entspricht C_fib_neu der tatsaechlichen Steifigkeit
C_fib=C_fib_neu; %[GPa]
```

Dabei ergibt sich:

$$\mathbb{C}_{fib}^{M} = \begin{bmatrix} 2,83 & 2,74 & 2,57 & 0 & 0 & 0\\ 2,74 & 2,83 & 2,57 & 0 & 0 & 0\\ 2,57 & 2,57 & 3,15 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0,11 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,17 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,09 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{1},\mathbf{e}_{2},\mathbf{e}_{3}}$$
(9.23)

B. Homogenisierungsstufe 2: Faser

Die Berechnungen der Homogenisierungsstufe 2 verlaufen analog zu jenen in Stufe 1 und werden daher nur in verkürzter Form angeschrieben.

1. Berechnung der Steifigkeitstensoren der Phasen

Während der zuvor homogenisierte Steifigkeitstensor auf dem Fibrillen-Level als makroskopisch angesehen wird, entspricht er nun auf dem darüberliegenden Faser-Level einer mikroskopischen Phasensteifigkeit ($\mathbb{C}^{M,RVE\ 1} = \mathbb{C}^{\mu,RVE\ 2}$). Die Steifigkeitstensoren der Phasen folgen also zu:

2. Iterative Berechnung des homogenisierten Steifigkeitstensors:

- 1. Annahme eines beliebigen Startwerts für die Matrixsteifigkeit (z.B. $\mathbb{C}_{fas,start}^{M(i=1)} = \mathbb{C}_{fib}^{\mu}$)
- 2. Berechnung der homogenisierten Steifigkeit $\mathbb{C}_{fas,neu}^{\mathcal{M}(i)}$ auf Basis von $\mathbb{C}_{fas,start}^{\mathcal{M}(i)}$
 - (a) Beide Phasen haben dieselbe Form und somit denselben Morphologietensor: $\mathbb{P}_{zyl}^{trans}(\mathbb{C}_{fas,start}^{M(i)})$ - zylindrischer Einschluss in transversal isotroper Matrix
 - (b) Berechnung der Konzentrationstensoren gemäß (9.6) und (9.9)

$$\mathbb{A}_{H_2O}^{fas(i)} = \mathbb{A}_{H_2O}^{\infty(i)} : \left\{ f_{H_2O}^{fas} \mathbb{A}_{H_2O}^{\infty(i)} + f_{fib}^{fas} \mathbb{A}_{fib}^{\infty(i)} \right\}^{-1}$$

$$\mathbb{A}_{fib}^{fas(i)} = \mathbb{A}_{fib}^{\infty(i)} : \left\{ f_{H_2O}^{fas} \mathbb{A}_{H_2O}^{\infty(i)} + f_{fib}^{fas} \mathbb{A}_{fib}^{\infty(i)} \right\}^{-1}$$

$$(9.25)$$

mit

$$\mathbb{A}_{H_2O}^{\infty(i)} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{zyl}^{trans}(\mathbb{C}_{fas,start}^{M(i)}) : (\mathbb{C}_{H_2O}^{\mu} - \mathbb{C}_{fas,start}^{M(i)})]^{-1}$$

$$\mathbb{A}_{fib}^{\infty(i)} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{zyl}^{trans}(\mathbb{C}_{fas,start}^{M(i)}) : (\mathbb{C}_{fib}^{\mu} - \mathbb{C}_{fas,start}^{M(i)})]^{-1}$$
(9.26)

(c) Homogenisierung der Steifigkeitstensoren gemäß (9.5)

$$\mathbb{C}_{fas,neu}^{M(i)} = f_{H_2O}^{fas} \,\mathbb{C}_{H_2O}^{\mu} : \mathbb{A}_{H_2O}^{fas(i)} + f_{fib}^{fas} \,\mathbb{C}_{fib}^{\mu} : \mathbb{A}_{fib}^{fas(i)} \tag{9.27}$$

3. und 4. analog zu Homogenisierungsstufe 1

```
%%%Wasser
f_H2O=0.30; C_H2O;
%%%Fibrille
f_fib=0.70; C_fib;
%%%Iterative Berechnung
C_fas_start=C_fib; %[GPa]%Startwert festlegen
while F>0.00001 %[-] %die Schleife wird wiederholt solange der Fehler ueber der Toleranzgrenze liegt
   %Berechnung des Morphologietensors
   P=P_transiso_zyl(C_fas_start); %[1/GPa]
   %Berechnung der Konzentrationstensoren
   A_inf_H2O=inv(I+P*(C_H2O-C_fas_start)); %[-]
   A_inf_fib=inv(I+P*(C_fib-C_fas_start)); %[-]
   A_H2O=A_inf_H2O*inv(f_H2O*A_inf_H2O+f_fib*A_inf_fib); %[-]
   A_fib=A_inf_fib*inv(f_H20*A_inf_H20+f_fib*A_inf_fib); %[-]
   %Berechnung des homogenisierten Steifigkeitstensors
   C_fas_neu=f_H2O*C_H2O*A_H2O+f_fib*C_fib*A_fib; %[GPa]
   %Berechnung des Fehlers
   F=norm(C_fas_neu-C_fas_start)/norm(C_fas_neu); %[-]
   %Neudefinition des Startwerts fuer den naechsten Iterationsschritt
   C_fas_start=(C_fas_neu+C_fas_start)/2; %[GPa]
end
*Sobald die while Schleife verlassen wird, entspricht C_fas_neu der tatsaechlichen Steifigkeit
C_fas=C_fas_neu;
```

Dabei ergibt sich:

$$\mathbb{C}_{fas}^{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} 2,64 & 2,60 & 2,48 & 0 & 0 & 0\\ 2,60 & 2,64 & 2,48 & 0 & 0 & 0\\ 2,48 & 2,48 & 2,89 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0,04 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,04 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,03 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{1},\mathbf{e}_{2},\mathbf{e}_{3}}$$
(9.28)

Gesucht ist die Größe der Spannung im Kollagenmolekül, wenn auf der gesamten Kollagenfaser eine einaxiale Zugspannung von 100 GPa in x_3 -Richtung aufgebracht wird.

Zur Bestimmung der Spannung im Kollagenmolekül σ_{kol}^{μ} werden die Gleichungen (9.3) und (9.4) angewandt, um die makroskopische Spannung $\sigma_{fas}^{M} = 100 \mathbf{e}_{3} \otimes \mathbf{e}_{3}$ GPa zuerst auf die Ebene der Fibrille und anschließend auf jene des molekularen Kollagens zu skalieren.

Da der Konzentrationstensor A nur die Lokalisierung von Verzerrungen ermöglicht, wird im ersten Schritt die makroskopische Spannung bei Zugrundlegung von linear elastischem Materialverhalten in die entsprechende makroskopische Verzerrung

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{fas}^{\mathrm{M}} = (\mathbb{C}_{fas}^{\mathrm{M}})^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{fas}^{\mathrm{M}}$$
(9.29)

umgerechnet. Im nächsten Schritt wird diese Verzerrung auf das Level der Fibrille skaliert:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{fib}^{\mu} = \mathbb{A}_{fib}^{fas} : \boldsymbol{\varepsilon}_{fas}^{\mathrm{M}} \tag{9.30}$$

Anschließend erfolgt dann die Lokalisierung innerhalb der Fibrille auf das Kollagenmolekül:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{kol}^{\mu} = \mathbb{A}_{kol}^{fib} : \boldsymbol{\varepsilon}_{fib}^{\mu} \tag{9.31}$$

Im letzten Schritt wird die Verzerrung des Kollagenmoleküls wieder in eine Spannung

$$\boldsymbol{\sigma}_{kol}^{\mu} = \mathbb{C}_{kol}^{\mu} : \boldsymbol{\varepsilon}_{kol}^{\mu} \tag{9.32}$$

umgerechnet. Kombination der Gleichungen (9.29) bis (9.32) führt zu

$$\boldsymbol{\sigma}_{kol}^{\mu} = \mathbb{C}_{kol}^{\mu} : \mathbb{A}_{kol}^{fib} : \mathbb{A}_{fib}^{fas} : (\mathbb{C}_{fas}^{\mathrm{M}})^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{fas}^{\mathrm{M}}$$
(9.33)

%makroskopische Belastung
Sigma=[0;0;100;0;0;0]; %[GPa] %Kelvin-Mandel Vektor Schreibweise

%Berechnung der Belastung im Kollagenmolekuel sigma_kol=C_kol*A_kol*A_fib*inv(C_fas)*Sigma; %[GPa]

Dabei ergibt sich:

$$\boldsymbol{\sigma}_{kol}^{\mu} = \begin{bmatrix} -8,6 & 0 & 0\\ 0 & -8,6 & 0\\ 0 & 0 & 308,9 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_{1},\mathbf{e}_{2},\mathbf{e}_{3}}^{\mathbf{GPa}}$$
(9.34)

A. RÄUMLICHER SPANNUNGSZUSTAND



Abbildung A.1: Materieller Punkt und Komponenten des CAUCHYschen Spannungstensors bezüglich der Basis \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3

Allgemeines

Die Berechnung von Hauptnormalspannungen ist im Zusammenhang mit der Anwendung von Festigkeitskriterien, d. h. der Einschätzung des Fließ- bzw. Versagenseintritts bei Zugrundelegen eines allgemeinen, räumlichen Spannungszustandes, von großer Bedeutung. Auch zur Durchführung von numerischen Berechnungen auf der Basis von anspruchsvollen Materialmodellen, deren Formulierung sich auf Hauptnormalspannungsrichtungen bezieht, ist die Ermittlung von Hauptnormalspannungen von zentraler Bedeutung. FE-Programme stellen dem Benutzer in diesem Zusammenhang Spannungstensoren mit Bezug auf lokale Koordinatensysteme zur Verfügung. Das folgende Beispiel soll Ihnen die theoretischen Grundlagen zur Ermittlung von Hauptnormalspannungen und deren Wirkungsrichtungen soweit verdeutlichen, dass Sie in der Lage sind, eine Subroutine zu programmieren, die zur Ermittlung von Hauptnormalspannungen und deren Wirkungsrichtungen dient.

ad (a): Hauptnormalspannungen

Ebenen, in denen Hauptnormalspannungen auftreten, sind frei von Schubspannungen. Daher lässt sich die Suche nach den Hauptnormalspannungen auf die Suche nach Ebenen zurückführen, in denen die Schubspannungen verschwinden. Die Schubspannungen verschwinden, wenn der Normalenvektor \mathbf{n} einer Ebene und der Traktionsvektor $\mathbf{T}(\mathbf{n})$, der sich auf diese Ebene bezieht, parallel sind – vergleiche Abbildung A.2(b).

Im Falle der angesprochenen Parallelität von \mathbf{n} und $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ gilt

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}_j) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_j = \sigma_j \, \mathbf{n}_j, \quad j = I, II, III \tag{A.1}$$



Abbildung A.2: (a) Traktionsvektor in einer beliebigen Ebene,(b) Traktionsvektor in einer Hauptspannungsebene

wobei σ_j bzw. \mathbf{n}_j die Beträge bzw. die Richtungen der Hauptnormalspannungen bezeichnen. Die Hauptnormalspannungen (σ_I , σ_{II} , σ_{III}) sind die Lösungen eines Eigenwertproblems, wobei die *Eigenwerte* σ bestimmt werden durch die Lösungen der Gleichung:

$$\det\left(\,\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{1}\,\right) = 0 \tag{A.2}$$

Gleichung (A.2) führt auf die sogenannte *charakteristische Gleichung* des Eigenwertproblems, einer kubischen Gleichung in σ :

$$\boxed{-\sigma^3 + I_1^{\sigma} \,\sigma^2 - I_2^{\sigma} \,\sigma + I_3^{\sigma} = 0}.$$
(A.3)

Die Lösungen der Gleichung (A.3) sind die gesuchten Hauptnormalspannungen. Sie kennzeichnen den physikalischen Spannungszustand im betrachteten Körperpunkt. Die Hauptnormalspannungen können somit nicht von jenem Koordinatensystem abhängen, das zur Beschreibung des Problems gewählt wurde. Daraus folgt, dass die Koeffizienten I_1^{σ} , I_2^{σ} und I_3^{σ} der charakteristischen Gleichung (A.3) ebenfalls unabhängig vom gewählten Koordinatensystem sein müssen. I_1^{σ} , I_2^{σ} und I_3^{σ} sind somit Invariante des Spannungszustandes. Gemäß Gleichung (A.3) ergeben sie sich zu:

$$I_{1}^{\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

$$I_{2}^{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix},$$

$$I_{3}^{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}.$$
(A.4)

Einschub: Lösung charakteristischer Gleichungen mit CARDANOS Formeln

Bei der Ermittlung von Hauptnormalverzerrungen bzw. -spannungen ist folgende charakteristische Gleichung zu lösen:

$$-\sigma^3 + I_1 \,\sigma^2 - I_2 \,\sigma + I_3 = 0\,, \tag{A.5}$$

wobei I_1 , I_2 und I_3 die Invarianten des Verzerrungs- bzw. Spannungstensors bezeichnen, und σ für die gesuchten Eigenwerte steht. Nach Division der Gleichung (A.5) durch (-1) und durch Abspalten des hydrostatischen Verzerrungs- bzw. Spannungsanteils, $I_1/3$, mit Hilfe der Substitution

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{H} + \boldsymbol{\sigma}_{D} \qquad \sigma_{D,\mathbf{e}_{I},\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}} = \sigma_{\mathbf{e}_{I},\mathbf{e}_{II},\mathbf{e}_{III}} - \underbrace{\frac{I_{1}}{3}}_{\sigma_{m}} \tag{A.6}$$

kann die charakteristische Gleichung

$$(\sigma_{D,i} + \sigma_H)^3 - I_1 (\sigma_{D,i} + \sigma_H)^2 + I_2 (\sigma_{D,i} + \sigma_H) - I_3 = 0$$
(A.7)

mit Hilfe der Invarianten des Verzerrungs- bzw. Spannungsdeviators, das sind die Größen J_1 , J_2 und J_3 , wie folgt dargestellt werden

$$1 \cdot \sigma_{D,i}^{3} + [I_1 - I_1] \cdot \sigma_{D,i}^{2} + \left[\frac{I_1^2}{3} - \frac{2I_1^2}{3} + I_2\right] \cdot \sigma_{D,i} + \left[\frac{I_1^3}{27} - \frac{I_1^3}{9} + \frac{I_2 \cdot I_1}{3} - I_3\right] = 0$$
(A.8)

$$\sigma_{D,i}^3 - J_2 \,\sigma_{D,i} - J_3 = 0\,, \tag{A.9}$$

wobei $J_1 \equiv 0$ berücksichtigt wurde. J_2 und J_3 können mit Hilfe der Invarianten des Verzerrungsbzw. Spannungstensors berechnet werden:

$$J_2 = \frac{(I_1)^2}{3} - I_2, \qquad J_3 = I_3 - \frac{I_1 I_2}{3} + \frac{2 (I_1)^3}{27}.$$
(A.10)

Zur Lösung der Gleichung (A.9) wird die Hilfsgröße η eingeführt und der Lode-Winkel ϑ berechnet:

$$\eta = \sqrt{\frac{J_2}{3}}, \qquad \vartheta = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{J_3}{2\eta^3}\right),$$
(A.11)

wobei ϑ im **Bogenmaß** darzustellen ist. Die drei Lösungen für $\sigma_{D,i}$ lauten:

$$\sigma_{D_{(1)}} = 2\eta \cos(\vartheta),$$

$$\sigma_{D_{(2)}} = 2\eta \cos(\vartheta + 240^\circ) = 2\eta \cos(\vartheta + 4\pi/3),$$

$$\sigma_{D_{(2)}} = 2\eta \cos(\vartheta + 120^\circ) = 2\eta \cos(\vartheta + 2\pi/3).$$

(A.12)

Rücksubstitution, d. h. Addition des hydrostatischen Verzerrungs- bzw. Spannungsanteils, führt auf die drei gesuchten Lösungen für σ :

$$\sigma_{I} = \sigma_{D_{1}} + \frac{I_{1}}{3},$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{D_{2}} + \frac{I_{1}}{3},$$

$$\sigma_{III} = \sigma_{D_{3}} + \frac{I_{1}}{3}.$$
(A.13)

ad (b): Richtung der Hauptnormalspannungen

Aus Gleichung (A.1) folgt das Eigenwert-/Eigenvektorproblem:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_j - \sigma_j \, \mathbf{n}_j = 0, \quad j = I, II, III.$$
(A.14)

In Komponentenschreibweise lautet Gleichung (A.14):

$$\sigma_{i1} n_{j,1} + \sigma_{i2} n_{j,2} + \sigma_{i3} n_{j,3} - \sigma_j n_{j,i} = 0, \qquad (A.15)$$

wobei \mathbf{n}_j die *Eigenvektoren* des Spannungstensors zu den jeweiligen Eigenwerten σ_j sind. Diese Eigenvektoren entsprechen – physikalisch interpretiert – den Hauptnormalspannungsrichtungen. Berücksichtigung von $n_i = \delta_{i1} n_1 + \delta_{i2} n_2 + \delta_{i3} n_3$ (mit $\delta_{ii} = 1$ und für $i \neq j$: $\delta_{ij} = 0$) ergibt:

$$\sigma_{i1} n_{j,1} + \sigma_{i2} n_{j,2} + \sigma_{i3} n_{j,3} - \sigma_j \left(\delta_{i1} n_{j,1} + \delta_{i2} n_{j,2} + \delta_{i3} n_{j,3} \right) = 0.$$
(A.16)

Herausheben von $n_{j,1}$, $n_{j,2}$ und $n_{j,3}$ führt auf ein homogenes Gleichungssystem in der Form:

$$(\sigma_{i1} - \sigma_j \,\delta_{i1}) \,n_{j,1} + (\sigma_{i2} - \sigma_j \,\delta_{i2}) \,n_{j,2} + (\sigma_{i3} - \sigma_j \,\delta_{i3}) \,n_{j,3} = 0 \,. \tag{A.17}$$

Jedem der drei Eigenwerte σ_j mit j = I, II, III (berechnet gem. Gleichung (A.3)) in Gleichung (A.17), ist ein bestimmter Richtungsvektor $\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_j$ (normierter Eigenvektor des Eigenwert-/Eigenvektorproblems) zugeordnet. Es gilt:

$$\mathbf{e}_{j} = \begin{pmatrix} e_{j,1} \\ e_{j,2} \\ e_{j,3} \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_{1},\mathbf{e}_{2},\mathbf{e}_{3}}, \qquad j = I, II, III.$$
(A.18)

Diese Richtungsvektoren beschreiben die Hauptnormalspannungsrichtungen des Spannungszustandes. Sie sind die Eigenvektoren des Spannungstensors. Zu deren Berechnung wird Gleichung (A.17) komponentenweise angeschrieben:

(I)
$$(\sigma_{11} - \sigma_j) e_{j,1} + \sigma_{12} e_{j,2} + \sigma_{13} e_{j,3} = 0,$$

(II) $\sigma_{21} e_{j,1} + (\sigma_{22} - \sigma_j) e_{j,2} + \sigma_{23} e_{j,3} = 0,$ (A.19)
(III) $\sigma_{31} e_{j,1} + \sigma_{32} e_{j,2} + (\sigma_{33} - \sigma_j) e_{j,3} = 0.$

Nur zwei dieser drei Gleichungen sind linear unabhängig. Da \mathbf{e}_i Einheitsvektoren sind, gilt

(IV)
$$(e_{j,1})^2 + (e_{j,2})^2 + (e_{j,3})^2 = 1.$$
 (A.20)

Zur Lösung des Problems werden z.B. die Gleichungen (I), (II), (IV) verwendet; die von den Gleichungen (I) und (II) linear abhängige Gleichung (III) wird zur Kontrolle herangezogen. Es werden zwei Lösungswege für die Berechnung der Richtungen der Hauptnormalspannungen vorgestellt.

ad (c): Berechnung des Traktionsvektors

Wir gehen von den soeben ermittelten Hauptnormalspannungen und -richtungen aus, d.h. wir beziehen uns in diesem Unterabschnitt auf das Basissystem \mathbf{e}_{I} , \mathbf{e}_{II} , \mathbf{e}_{III} (siehe Abbildung A.3).



Abbildung A.3: Normal- und Schubspannungskomponente des Traktionsvektors $\mathbf{T}(\mathbf{n})$

Dementsprechend sind auch alle angegebenen Komponenten, Komponenten bezüglich dieses Basissystems. Gesucht sind die Normalspannungskomponente und die Schubspannungskomponente des Traktionsvektors.

Durch Projektion von **T** auf **n** erhält man die gesuchte Normalspannung, unter Berücksichtigung der Cauchyschen Formel $\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$:

$$\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \sigma_I n_I^2 + \sigma_{II} n_{II}^2 + \sigma_{III} n_{III}^2.$$
(A.21)

Die gesuchte Schubspannung erhält man durch Zerlegung des Traktionsvektors $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ in die Normalspannung σ und die Schubspannung τ mit Hilfe des Lehrsatzes von PYTHAGORAS (siehe Abbildung A.3),

$$\tau^2 = |\mathbf{T}(\mathbf{n})|^2 - \sigma^2.$$
 (A.22)

Anwendung von (A.22) ergibt:

$$\tau^{2} = |\mathbf{T}(\mathbf{n})|^{2} - \sigma^{2} = (\sigma_{I} n_{I})^{2} + (\sigma_{II} n_{II})^{2} + (\sigma_{III} n_{III})^{2} - (\sigma_{I} n_{I}^{2} + \sigma_{II} n_{II}^{2} + \sigma_{III} n_{III}^{2})^{2}.$$
 (A.23)

Alternativ kann die Schubspannung durch Projektion von \mathbf{T} auf \mathbf{t} bestimmt werden:

$$\tau = \mathbf{t} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{n}). \tag{A.24}$$

B. FESTIGKEITSKRITERIEN

Zusammenstellung der Festigkeitskriterien

Hinweis: Die manchmal in der Literatur gebräuchliche Vergleichsspannung σ_V ist ebenfalls angegeben.

Festigkeitskriterium nach TRESCA $f_{T1}(\boldsymbol{\sigma}) = \tau_{max} - f_s$ $f_{T2}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{max} - \sigma_{min} - f_y$ $\sigma_V = \sigma_{max} - \sigma_{min}$ Festigkeitskriterium nach VON MISES $f_M(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2^{\sigma}} - k$ $\sigma_V = \sqrt{3 J_2^{\sigma}}$ $\sqrt{J_2^{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}}$ Einsteinsche Summenkonvention $J_2^{\sigma} = \frac{1}{\epsilon} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2$ Hauptspannungszustand: $J_2^{\sigma} = \frac{1}{6} \left[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \right]$ $J_2^{\sigma} = \underbrace{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3 \cdot \sigma_{12}^2}_{\text{ebener Spannungszustand in der 1-2-Ebene}} + \underbrace{\sigma_{33}^2 - \sigma_{33} \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + 3 \cdot \sigma_{23}^2 + 3 \cdot \sigma_{31}^2}_{\text{nur bei räumlichem Spannungszustand}}$ $k = \frac{f_y}{\sqrt{2}}$ Für die Materialparameter gilt: Festigkeitskriterium nach MOHR-COULOMB $(|\tau| - c + \sigma \cdot \tan(\phi) \le 0)$ $f_{MC}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{max} \frac{1 + \sin\varphi}{2c\cos\varphi} - \sigma_{min} \frac{1 - \sin\varphi}{2c\cos\varphi} - 1 \qquad \xi_0^{hydro}(\tau = r = 0) = \sqrt{3} \frac{c}{\tan(\varphi)}$ $f_{MC}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_{max}}{f_t} - \frac{\sigma_{min}}{f_c} - 1$ $r_{co}(\vartheta = \pi/3) = \frac{2 \cdot c \cdot \cos(\varphi)}{3 - \sin(\varphi)} \cdot \sqrt{6}$ $r_{co}(\vartheta = 0) = \frac{2 \cdot c \cdot \cos(\varphi)}{3 + \sin(\varphi)} \cdot \sqrt{6}$ $f_t = \frac{2 c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad f_c = \frac{2 c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$ Für die Materialparameter gilt: Festigkeitskriterium nach DRUCKER-PRAGER $r_{co} = \sqrt{2} \cdot k$ $f_{DP}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2^{\sigma}} + \alpha \, \sigma^m - k$ $\sigma^m = \frac{1}{2}I_1^\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ $\xi_0 = \sqrt{3} \frac{k}{\alpha}$ $r = \sqrt{s_{ij} \, s_{ij}} = \sqrt{2 \, J_2^{\sigma}} \quad \xi = \frac{I_1^{\circ}}{\sqrt{3}}$ $r = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}$ Bruchkriterium nach RANKINE $f_{Rt}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{max} - f_t$ $f_{Bc}(\boldsymbol{\sigma}) = |\sigma_{min}| - f_c$

C. DAS VERALLGEMEINERTE HOOKESCHE GESETZ

Für einen homogenen und (mechanisch sowie thermisch) isotropen Werkstoff lautet das verallgemeinerte HOOKEsche Gesetz $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbb{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T$ in KELVIN-MANDELscher Matrixschreibweise:

$$\begin{array}{c|c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \overline{\sqrt{2}\sigma_{23}} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{array} \right| = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \varepsilon_{11} - \alpha_T \cdot \Delta T \\ \varepsilon_{22} - \alpha_T \cdot \Delta T \\ \varepsilon_{33} - \alpha_T \cdot \Delta T \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{array} \right]$$
 (C.1)

Aus dem Gleichungssystem (C.1) geht hervor, dass Normalverzerrungen keine Schubspannungen bzw. Schubverzerrungen keine Normalspannungen verursachen. Alternativ können die zugrundeliegenden Materialparameter, also der Elastizitätsmodul E und die Querdehnungszahl ν , durch die LAMÉschen Parameter μ und λ ausgedrückt werden. Der Schubmodul G (in der Literatur alternativ auch als μ bezeichnet) folgt aus E und ν durch $G = E/[2(1 + \nu)]$ und der Parameter λ ist definiert durch $\lambda = E\nu/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$. (C.1) kann auch wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \alpha_T \cdot \Delta T \\ \varepsilon_{22} - \alpha_T \cdot \Delta T \\ \varepsilon_{33} - \alpha_T \cdot \Delta T \end{bmatrix}$$
(C.1.1)
$$\sigma_{23} = 2G \cdot \varepsilon_{23} = G \cdot \gamma_{23} \qquad \sigma_{13} = 2G \cdot \varepsilon_{13} = G \cdot \gamma_{13} \qquad \sigma_{12} = 2G \cdot \varepsilon_{12} = G \cdot \gamma_{12}$$
(C.1.2)

Umgekehrt lassen sich die Komponenten des Verzerrungstensors durch die Komponenten des Spannungstensors als $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T$ beschreiben. Invertierung von (C.1) ergibt:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T \cdot \Delta T \\ \alpha_T \cdot \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (C.2)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T \cdot \Delta T \\ \alpha_T \cdot \Delta T \end{bmatrix}$$
(C.2.1)
$$\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} = \frac{\gamma_{23}}{2} \qquad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} = \frac{\gamma_{13}}{2} \qquad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} = \frac{\gamma_{12}}{2}$$
(C.2.2)

C.1 SPEZIALISIERUNG FÜR DEN EBENEN SPANNUNGSZUSTAND

Ein ebener Spannungszustand ist durch $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ gekennzeichnet. Entsprechende Spezialisierung des Spannungstensors im Gleichungssystem (C.2) ergibt:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T \cdot \Delta T \\ \alpha_T \cdot \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
(C.3)

Aus der vierten und fünften Zeile dieses Gleichungssystems kann man direkt ablesen, dass

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \tag{C.4}$$

gilt. Durch Streichen von Zeilen, die ε_{13} bzw. ε_{23} betreffen, und von Spalten der Koeffizientenmatrix, die mit null multipliziert werden (das sind die dritte, vierte und fünfte Spalte), erhält man:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T \cdot \Delta T \\ \alpha_T \cdot \Delta T \\ \alpha_T \cdot \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}$$
(C.5)

Ein ebener Spannungszustand führt i. A. auf einen räumlichen Verzerrungszustand, denn ε_{33} ist i. A. ungleich null. Löst man die Gleichung zur Berechnung von ε_{33} aus dem Gleichungssystem (C.5) heraus, erhält man:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T \cdot \Delta T \\ \alpha_T \cdot \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}$$
(C.5.1)
$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha_T \cdot \Delta T$$
(C.5.2)

Häufig ist es günstig zur Lösung von Problemstellungen, die sich auf einen ebenen Spannungszustand beziehen, die invertierte Form von (C.5.1) zu betrachten. Diese lautet:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \alpha_T \cdot \Delta T \\ \varepsilon_{22} - \alpha_T \cdot \Delta T \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$
(C.6)

C.2 SPEZIALISIERUNG FÜR DEN EBENEN VERZERRUNGSZUSTAND

Ein ebener Verzerrungszustand ist durch $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ gekennzeichnet. Durch Eintragen dieser Beziehungen in das Gleichungssystem (C.1) erhält man:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \alpha_T \cdot \Delta T \\ \varepsilon_{22} - \alpha_T \cdot \Delta T \\ 0 - \alpha_T \cdot \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$(C.7)$$

Aus der vierten und fünften Zeile dieses Gleichungssystems kann man direkt ablesen, dass

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \tag{C.8}$$

gilt. Durch Streichen von Zeilen, die σ_{13} bzw. σ_{23} betreffen, und von Spalten der Koeffizientenmatrix, die mit null multipliziert werden (das sind die vierte und fünfte Spalte), erhält man:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \alpha_T \cdot \Delta T \\ \varepsilon_{22} - \alpha_T \cdot \Delta T \\ -\alpha_T \cdot \Delta T \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$
(C.9)

Ein ebener Verzerrungszustand führt i. A. auf einen räumlichen Spannungszustand, denn σ_{33} ist i. A. ungleich null. Löst man die Gleichung zur Berechnung von σ_{33} aus dem Gleichungssystem (C.9) heraus, erhält man:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - (1+\nu) \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \\ \varepsilon_{22} - (1+\nu) \cdot \alpha_T \cdot \Delta T \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$
(C.9.1)

$$\sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \frac{E\alpha_T \Delta T}{1-2\nu}$$
(C.9.2)

Häufig ist es günstig zur Lösung von Problemstellungen, die sich auf einen ebenen Verzerrungszustand beziehen, die invertierte Form von (C.9.1) zu betrachten. Diese lautet:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ -\frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1+\nu)\alpha_T \cdot \Delta T \\ (1+\nu)\alpha_T \cdot \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}$$
(C.10)

Alternativ zu Gleichung (C.9.2) kann σ_{33} auch durch Spezialisieren der dritten Zeile des Gleichungssystems (C.2) für den ebenen Verzerrungszustand erhalten werden:

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha_T \cdot \Delta T = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - E\alpha_T \cdot \Delta T \quad (C.11)$$

C.3 ELASTISCHE WERKSTOFFPARAMETER

Zur Beschreibung des linear elastischen Verhaltens von isotropen Werkstoffen wurde in diesem Abschnitt Gebrauch von mehreren, voneinander abhängigen, Werkstoffparameter gemacht: Elastizitätsmodul E, Querdehnungszahl ν , LAMÉscher Parameter λ und Schubmodul G. Wie im Vorlesungsskriptum in Kapitel 3.4 gezeigt, ist der Kompressionsmodul K eine weitere häufig gebrauchte Kenngröße, die das elastische Verhalten von Werkstoffen quantifiziert. Nachfolgende Tabelle fasst die Beziehungen zwischen den genannten Werkstoffparametern zusammen:

Gegeben:	λ, G	K, G	G, ν	E, ν	E, G
$\lambda =$	λ	$K - \frac{2}{3}G$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
G =	G	G	G	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	G
K =	$\lambda + \frac{2}{3}G$	K	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$
E =	$\frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$2G(1+\nu)$	E	E
$\nu =$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\frac{3K - 2G}{6K + 2G}$	ν	ν	$\frac{E}{2G} - 1$

D. Morphologietensoren

\mathbb{P}_{zvl}^{iso} - zylindrischer Einschluss in einer isotropen Matrix

Der Morphologietensor für einen zylindrischen Einschluss in einer isotropen Matrix mit der Steifigkeit \mathbb{C}^0 ist im globalen Koordinatensystem $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ definiert als:

$$\mathbb{P}_{\text{zyl}}^{\text{iso}} = \mathbb{Q} : (\mathbb{C}^0)^{-1} : \mathbb{S}_{\text{zyl},\theta\varphi r}^{\text{esh,iso}} : \mathbb{Q}^T$$
(D.1)

Mithilfe der Transformationsmatrix \mathbb{Q} wird dabei die Neigung des Einschlusses um θ bzw. φ (siehe Kapitel 9) vom globalen Koordinatensystem berücksichtigt. Die Komponenten des Eshelby-Tensors $\mathbb{S}^{\text{esh,iso}}_{\text{zyl},\theta\varphi r}$ lauten im lokalen Koordinatensystem des Einschlusses ($\mathbf{e}_{\theta}, \mathbf{e}_{\varphi}, \mathbf{e}_{r}$):

$$S_{zyl,\theta\theta\theta\theta}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,\varphi\varphi\varphi\varphi}^{\text{esh,iso}} = \frac{5 - 4\nu^{0}}{8(1 - \nu^{0})}$$

$$S_{zyl,\theta\theta\theta\theta}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,\varphi\varphi\varphi\theta\theta}^{\text{esh,iso}} = \frac{-1 + 4\nu^{0}}{8(1 - \nu^{0})}$$

$$S_{zyl,\theta\thetarr}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,\varphi\varphirr}^{\text{esh,iso}} = \frac{\nu^{0}}{2(1 - \nu^{0})}$$

$$S_{zyl,\varphir\varphir}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,r\varphir\varphi}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,r\varphi\varphir}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,\varphir\varphir}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,\varphir\thetar}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,r\theta\thetar}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,r\theta\thetar}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,r\theta\thetar}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,r\theta\thetar}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,r\theta\thetar}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,r\theta\thetar}^{\text{esh,iso}} = \frac{1}{4}$$

$$S_{zyl,\theta\varphi\theta\varphi}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,\varphi\theta\varphi\theta\varphi}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,\varphi\theta\varphi\theta\varphi}^{\text{esh,iso}} = S_{zyl,\varphi\theta\varphi\theta\varphi}^{\text{esh,iso}} = \frac{3 - 4\nu^{0}}{8(1 - \nu^{0})}$$
(D.2)

wobei ν^0 die Querdehnungszahl des Matrixmaterials bezeichnet:

$$\nu^{0} = \frac{3K^{0} - 2G^{0}}{6K^{0} + 2G^{0}} \tag{D.3}$$

Die restlichen Komponenten sind gleich null.

 $\mathbb Q$ ergibt sich aus den Komponenten der kleinen Transformationsmatrix $\mathbf Q$ zu

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11}^2 & Q_{12}^2 & Q_{13}^2 & \sqrt{2}Q_{12}Q_{13} & \sqrt{2}Q_{11}Q_{13} & \sqrt{2}Q_{11}Q_{12} \\ Q_{21}^2 & Q_{22}^2 & Q_{23}^2 & \sqrt{2}Q_{22}Q_{23} & \sqrt{2}Q_{21}Q_{23} & \sqrt{2}Q_{21}Q_{22} \\ Q_{31}^2 & Q_{32}^2 & Q_{33}^2 & \sqrt{2}Q_{32}Q_{33} & \sqrt{2}Q_{31}Q_{33} & \sqrt{2}Q_{31}Q_{32} \\ \sqrt{2}Q_{21}Q_{31} & \sqrt{2}Q_{22}Q_{32} & \sqrt{2}Q_{23}Q_{33} & Q_{22}Q_{33} + Q_{23}Q_{32} & Q_{21}Q_{33} + Q_{23}Q_{31} & Q_{21}Q_{32} + Q_{22}Q_{31} \\ \sqrt{2}Q_{11}Q_{31} & \sqrt{2}Q_{12}Q_{32} & \sqrt{2}Q_{13}Q_{33} & Q_{12}Q_{33} + Q_{13}Q_{32} & Q_{11}Q_{33} + Q_{13}Q_{31} & Q_{11}Q_{32} + Q_{12}Q_{31} \\ \sqrt{2}Q_{11}Q_{21} & \sqrt{2}Q_{12}Q_{22} & \sqrt{2}Q_{13}Q_{23} & Q_{12}Q_{23} + Q_{13}Q_{22} & Q_{11}Q_{23} + Q_{13}Q_{21} & Q_{11}Q_{22} + Q_{12}Q_{21} \end{bmatrix}$$

wobei

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot \cos\varphi & -\sin\varphi & \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ \cos\theta \cdot \sin\varphi & \cos\varphi & \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

In MATLAB erfolgt die Berechnung von \mathbb{P}_{zyl}^{iso} mithilfe des function Files P_iso_zyl.m:

function[P_E]=P_iso_zyl_rot(C0,theta,phi)
%INPUT: C0 - Steifigkeitstensor der umgebenden isotropen Matrix, theta, phi - Orientierung
%OUTPUT: P_E - Morphologietensor eines zylindrischen Einschlusses E (mit Orientierung theta, phi)
%in einer isotropen Matrix

\mathbb{P}_{zyl}^{trans} - zylindrischer Einschluss in einer transversal isotropen Matrix

Die Komponenten des Morphologietensors für einen zylindrischen Einschluss in einer transversal isotropen Matrix mit der Steifigkeit \mathbb{C}^0 lauten für einen Zylinder der entlang der x_3 -Achse orientiert ist wie folgt:

$$P_{\text{zyl},1111}^{\text{trans}} = P_{\text{zyl},2222}^{\text{trans}} = \frac{5C_{1111}^0 - 3C_{1122}^0}{8C_{1111}^0 (C_{1111}^0 - C_{1122}^0)}$$

$$P_{\text{zyl},1122}^{\text{trans}} = P_{\text{zyl},2211}^{\text{trans}} = \frac{-C_{1111}^0 - C_{1122}^0}{8C_{1111}^0 (C_{1111}^0 - C_{1122}^0)}$$

$$P_{\text{zyl},2323}^{\text{trans}} = P_{\text{zyl},1313}^{\text{trans}} = \frac{1}{8C_{2323}^0}$$

$$P_{\text{zyl},1212}^{\text{trans}} = \frac{3C_{1111}^0 - C_{1122}^0}{8C_{1111}^0 (C_{1111}^0 - C_{1122}^0)}$$
(D.4)

Die restlichen Komponenten sind gleich null.

In MATLAB erfolgt die Berechnung von \mathbb{P}_{zyl}^{trans} mithilfe des function Files P_transiso_zyl.m:

```
function[P_E]=P_transiso_zyl(CO)
%INPUT: C0 - Steifigkeitstensor der umgebenden transversal isotropen Matrix
%OUTPUT: P_E - Morphologietensor eines zylindrischen Einschlusses E in einer transv. isotropen Matrix
```

\mathbb{P}^{iso}_{sph} - kugelförmiger Einschluss in einer isotropen Matrix

Der Morphologietensor für einen kugelförmigen Einschluss in einer isotropen Matrix mit der Steifigkeit \mathbb{C}^0 lautet:

$$\mathbb{P}_{\rm sph}^{\rm iso} = (\mathbb{C}^0)^{-1} : \mathbb{S}_{\rm sph}^{\rm esh, iso} \tag{D.5}$$

Der dabei auftretende Eshelby-Tensor $\mathbb{S}_{sph}^{esh,iso}$ lautet:

$$S_{\rm sph}^{\rm esh, iso} = \alpha^0 \mathbb{I}^{vol} + \beta^0 \mathbb{I}^{dev} \tag{D.6}$$

mit
$$\alpha^0 = \frac{3K^0}{3K^0 + 4G^0}$$
 und $\beta^0 = \frac{6(K^0 + 2G^0)}{5(3K^0 + 4G^0)}$ (D.7)

 \mathbb{I}^{vol} steht für den volumetrischen Anteil des Einheitstensors mit den Komponenten $I^{vol}_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$ und \mathbb{I}^{dev} für den deviatorischen Anteil des Einheitstensors mit $\mathbb{I}^{dev} = \mathbb{I} - \mathbb{I}^{vol}$.

In MATLAB erfolgt die Berechnung von \mathbb{P}^{iso}_{sph} mithilfe des function Files P_iso_sph.m:

```
function[P_E]=P_iso_sph(CO)
%INPUT: CO - Steifigkeitstensor der umgebenden isotropen Matrix
%OUTPUT: P_E - Morphologietensor eines kugelfoermigen Einschlusses E in einer isotropen Matrix
```

$\mathbb{P}_{\mathrm{sph}}^{\mathrm{trans}}$ - kugelförmiger Einschluss in einer transversal isotropen Matrix

Die Komponenten des Morphologietensors für einen kugelförmigen Einschluss in einer transversal isotropen Matrix mit der Steifigkeit \mathbb{C}^0 lauten:

$$\begin{split} P_{\text{sph,1111}}^{\text{trans}} &= \frac{1}{16} \int_{-1}^{1} -\frac{1}{D_1} (-5C_{1111}^0 x^4 C_{3333}^0 - 3C_{1122}^0 x^2 C_{3333}^0 - 3C_{1122}^0 x^4 C_{2323}^0 \\ &\quad + 3C_{1122}^0 x^4 C_{3333}^0 - 6(C_{3233}^0)^2 x^4 + 4C_{2323}^0 x^4 C_{1133}^0 + 6C_{1122}^0 C_{2323}^0 x^2 \\ &\quad + 8C_{2323}^0 x^4 C_{3333}^0 - 6(C_{3233}^0)^2 x^4 + 4C_{2323}^0 x^2 C_{1133}^0 + 6C_{1122}^0 C_{2323}^0 x^2 \\ &\quad + 5C_{1111}^0 C_{2323}^0 + 5C_{1111}^0 x^2 C_{3333}^0 - 4C_{2323}^0 x^2 C_{1133}^0 + 6(C_{2323}^0)^2 x^2 \\ &\quad - 2x^2 (C_{1133}^0)^2 - 3C_{1122}^0 C_{2323}^0)(-1 + x^2) \, dx \\ P_{\text{sph,1122}}^{\text{trans}} &= P_{\text{sph,221}}^{\text{trans}} \\ &= \frac{1}{16} \int_{-1}^{1} \frac{1}{D_1} (C_{1111}^0 C_{2323}^0 - 2C_{1112}^0 C_{2323}^0 x^2 + C_{1111}^0 x^2 C_{3333}^0 \\ &\quad + C_{1122}^0 C_{2323}^0 - 2C_{1122}^0 C_{2323}^0 x^2 + C_{1122}^0 x^2 C_{3333}^0 + C_{1111}^0 x^4 C_{2323}^0 \\ &\quad - C_{1111}^0 x^4 C_{3333}^0 + C_{1222}^0 x^2 C_{2323}^0 x^2 + C_{1122}^0 x^2 C_{3333}^0 - 2(C_{2323}^0)^2 x^2 + 2(C_{2323}^0)^2 x^4 \\ &\quad - 4C_{2323}^0 x^2 C_{1133}^0 + 4C_{2323}^0 x^4 C_{1133}^0 - 2x^2 (C_{1133}^0)^2 + 2x^4 (C_{1133}^0)^2)(-1 + x^2) \, dx \\ P_{\text{sph,3333}}^{\text{trans}} = P_{\text{sph,3311}}^1 = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \frac{1}{D_2} (-1 + x^2) x^2 (C_{2323}^0 + C_{1133}^0) \, dx \qquad \text{(D.10)} \\ P_{\text{sph,3333}}^{\text{trans}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{D_2} (x^2 C_{2323}^0 - C_{1111}^0 x^2 + C_{1111}^0) \, dx \qquad \text{(D.11)} \\ P_{\text{sph,3333}}^{\text{trans}} = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \frac{1}{D_2} (-1 + x^2) x^2 (C_{2323}^0 x^4 C_{1133}^0 - 2x^4 (C_{1133}^0)^2) \\ &\quad - C_{1122}^0 x^4 C_{3333}^0 - 8C_{1111}^0 x^4 C_{2323}^0 x^2 - 8C_{2323}^0 x^4 C_{1133}^0 - 2x^4 (C_{1133}^0)^2 \\ &\quad - C_{1122}^0 x^4 C_{1133}^0 + 2C_{1122}^0 x^6 C_{1133}^0 - 2x^6 (C_{1133}^0 + 2C_{1122}^0 x^6 C_{1111}^0 \\ &\quad - 3C_{1122}^0 x^4 C_{1111}^0 + 3C_{1122}^0 x^6 C_{1133}^0 - 2C_{1111}^0 x^6 C_{1133}^0 + 2C_{1122}^0 x^6 C_{1111}^0 \\ &\quad - 3C_{1122}^0 x^4 C_{1111}^0 + 3C_{1122}^0 x^6 C_{1133}^0 + 4x^6 C_{2323}^0 C_{3333}^0 + 4C_{1111}^0 x^6 C_{2323}^0 \\ &\quad + 8x^6 C_{2323}^0 C_{1133}^0 - 3x^6 C_{1111}^0 x^4 - (C_{1111}^0)^2 x^6 + 2(C_$$

wobei:

 $+\,(C^0_{1111})^2-C^0_{1122}C^0_{1111})\,dx$

$$D_{2} = 2C_{2323}^{0}x^{4}C_{1133}^{0} + C_{2323}^{0}x^{4}C_{3333}^{0} + C_{1111}^{0}x^{4}C_{2323}^{0} - 2C_{2323}^{0}x^{2}C_{1133}^{0} - 2C_{1111}^{0}C_{2323}^{0}x^{2} + C_{1111}^{0}C_{2323}^{0} + x^{4}(C_{1133}^{0})^{2} - C_{1111}^{0}x^{4}C_{3333}^{0}$$
(D.13)
$$- x^{2}(C_{1133}^{0})^{2} + C_{1111}^{0}x^{2}C_{3333}^{0}$$

$$\begin{split} D_{1} &= -2(C_{1111}^{0})^{2}x^{4}C_{3333}^{0} + 2(C_{2323}^{0})^{2}x^{6}C_{3333}^{0} - 4C_{1111}^{0}(C_{2323}^{0})^{2}x^{4} - 3(C_{1111}^{0})^{2}C_{2323}^{0}x^{2} \\ &+ (C_{1111}^{0})^{2}x^{2}C_{3333}^{0} + 2C_{1111}^{0}(C_{2323}^{0})^{2}x^{2} - 2C_{2323}^{0}x^{4}(C_{1133}^{0})^{2} - C_{1111}^{0}(C_{1133}^{0})^{2}x^{6} \\ &+ 2C_{1111}^{0}(C_{1133}^{0})^{2}x^{4} + 4(C_{2323}^{0})^{2}x^{6}C_{1133}^{0} - 2C_{1122}^{0}(C_{1133}^{0})^{2}x^{4} + 2C_{2323}^{0}x^{6}(C_{1133}^{0})^{2} \\ &+ 3(C_{1111}^{0})^{2}x^{4}C_{2323}^{0} + C_{1122}^{0}(C_{1133}^{0})^{2}x^{6} - (C_{1111}^{0})^{2}x^{6}C_{2323}^{0} + 2C_{1111}^{0}x^{6}(C_{2323}^{0})^{2} \\ &+ (C_{1111}^{0})^{2}x^{6}C_{3333}^{0} - C_{1111}^{0}(C_{1133}^{0})^{2}x^{2} - 4(C_{2323}^{0})^{2}x^{4}C_{1133}^{0} + C_{1122}^{0}(C_{1133}^{0})^{2}x^{2} \\ &+ (C_{1111}^{0})^{2}C_{2323}^{0} - C_{1122}^{0}C_{1111}^{0}C_{2323}^{0} - C_{1122}^{0}x^{6}C_{1111}^{0}C_{333}^{0} \\ &+ 2C_{1122}^{0}x^{2}C_{2323}^{0}C_{1133}^{0} - 2C_{1111}^{0}x^{2}C_{2323}^{0}C_{1133}^{0} - 4C_{1122}^{0}x^{4}C_{2323}^{0}C_{1133}^{0} \\ &+ 2C_{1122}^{0}x^{2}C_{2323}^{0}C_{1133}^{0} + 2C_{1122}^{0}x^{6}C_{2323}^{0}C_{1133}^{0} - 2C_{1111}^{0}x^{6}C_{2323}^{0}C_{1133}^{0} \\ &+ 2C_{1122}^{0}x^{2}C_{2323}^{0}C_{3333}^{0} + 2C_{1122}^{0}C_{1111}^{0}x^{4}C_{3333}^{0} - C_{1122}^{0}C_{2323}^{0}x^{4}C_{3333}^{0} \\ &- 3C_{1111}^{0}x^{6}C_{2323}^{0}C_{3333}^{0} + 2C_{1122}^{0}C_{1111}^{0}x^{2}C_{3333}^{0} + 3C_{1122}^{0}C_{2323}^{0}x^{4}C_{3333}^{0} \\ &- 3C_{1122}^{0}C_{1111}^{0}x^{4}C_{2323}^{0} - C_{1122}^{0}C_{1111}^{0}x^{2}C_{3333}^{0} + 3C_{1122}^{0}C_{2323}^{0}x^{4}C_{3333}^{0} \\ &- 3C_{1122}^{0}C_{1111}^{0}x^{4}C_{2323}^{0} - C_{1122}^{0}C_{1111}^{0}x^{2}C_{3333}^{0} + 3C_{1122}^{0}C_{1111}^{0}C_{2323}^{0}x^{2} \\ &+ 3C_{1111}^{0}C_{2323}^{0}x^{4}C_{3333}^{0} + C_{1122}^{0}x^{6}C_{1111}^{0}C_{2323}^{0} + C_{1122}^{0}x^{6}C_{2323}^{0}C_{3333}^{0} \\ &+ 3C_{1111}^{0}C_{2323}^{0}x^{4}C_{3333}^{0} + C_{1122}^{0}x^{6}C_{1111}^{0}C_{2323}^{0} + C_{1122}^{0}x^{6}C_{2323}^{0}C_{3333}^{0} \\ &+ 3C_{1111}^{0}C_{2323}^{0}x^{4$$

Die restlichen Komponenten sind gleich null.

In MATLAB erfolgt die Berechnung von \mathbb{P}_{sph}^{trans} mithilfe des function Files P_transiso_sph.m:

function[P_E]=P_transiso_sph(CO)
%INPUT: CO - Steifigkeitstensor der umgebenden transversal isotropen Matrix
%OUTPUT: P_E - Morphologietensor eines kugelfoermigen Einschlusses E in einer transv. isotropen Matrix