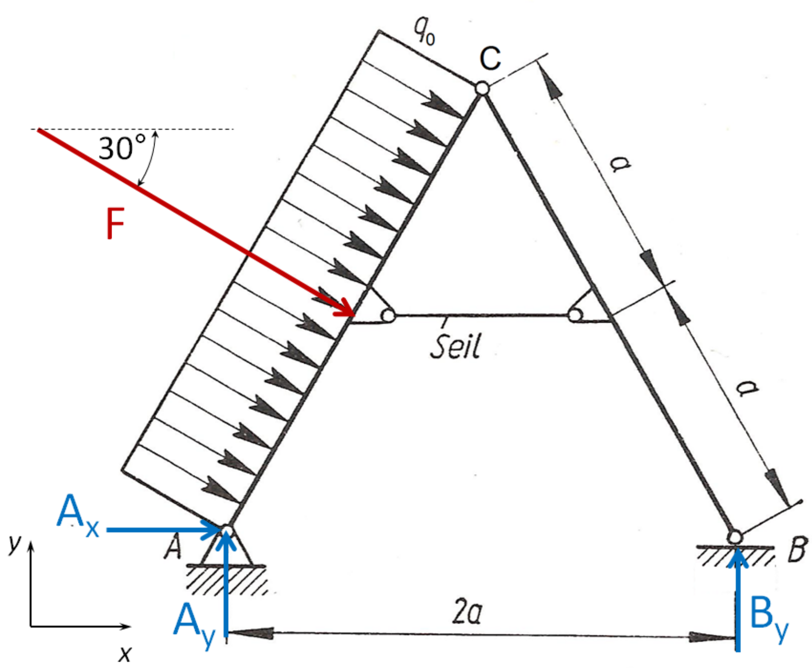
Aufgabe 1 (10 Punkte, ∅ 5.0 Punkte):

a)

Ersetzen der Linienlast durch eine Einzelkraft, die im Mittelpunkt des linken Balkens unter einem Winkel von 30° zur Horizontalen angreift und den Betrag

$F = 2 \cdot a \cdot q_0 = 40kN$ besitzt. (1 Punkt)

Freikörperbild des gesamten Tragwerks.



(1 Punkt)

Anwenden der Gleichgewichtsbedingungen: (1 Punkt)

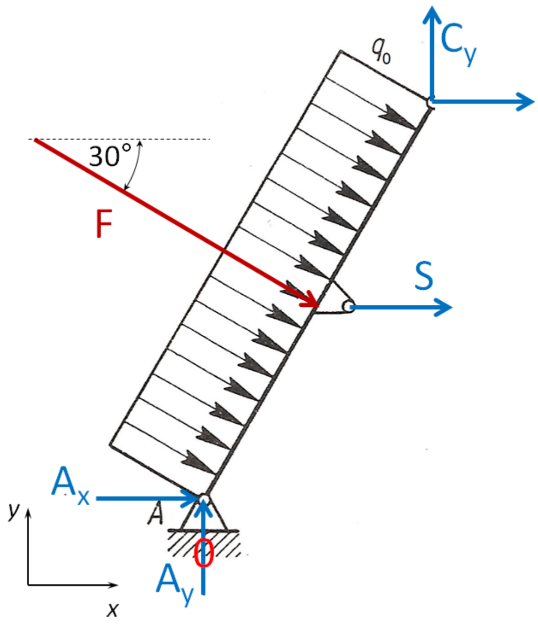
$$R_x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow A_x + F \cdot \cos 30° = 0 \Rightarrow A_x = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot F \approx -34.64kN \qquad \text{(1 Punkt)}$$

$$M_A \overset{!}{=} 0 \Rightarrow -F \cdot a + B_y \cdot 2a = 0 \Rightarrow B_y = \frac{1}{2} \cdot F = 20kN \qquad \text{(1 Punkt)}$$

$$R_y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow B_y + A_y - F \cdot \sin 30° = 0 \Rightarrow A_y = 0 \qquad \text{(1 Punkt)}$$

b)

Für die Kraft im Seil und die Gelenkkräfte wird entweder der linke oder der rechte Balken alleine freigeschnitten:



(1 Punkt)

Gleichgewichtsbedingungen am Teilsystem liefern:

$$R_y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow -F \cdot \sin 30° + C_y = 0 \Rightarrow C_y = \frac{1}{2} \cdot F = 20kN$$ (1 Punkt)

$$R_x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow A_x + F \cdot \cos 30° + C_x + S = 0 \qquad (1)$$

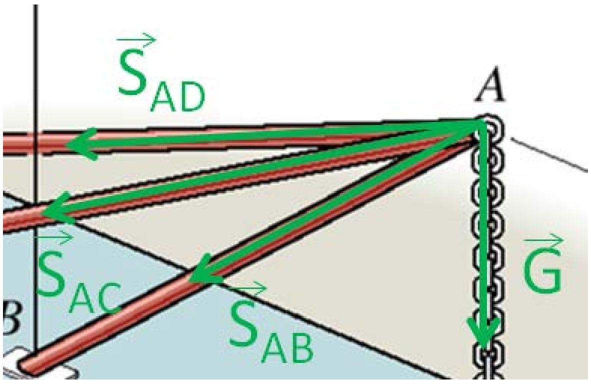
$$M_C \overset{!}{=} 0 \Rightarrow F \cdot a + S \cdot a \cdot \cos 30° + A_x \cdot 2a \cdot \cos 30° = 0 \Rightarrow S = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot F = 23.1kN$$ (1 Punkt)

Ergebnis in Gleichung (1) eingesetzt ergibt:

$$(1) \Rightarrow R_x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow C_x = -S = -23.1kN$$ (1 Punkt)

Aufgabe 2 (9 Punkte, ∅ 5.1 Punkte):

Freikörperbild des Knotens in A:



(1 Punkt)

Darstellen der Kräfte als Vektoren:

$$\vec{S}_{AB} = \vec{u}_{AB} \cdot S_{AB} = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + h^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -b_1 \\ -h \end{pmatrix} \cdot S_{AB} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ -0.768 \\ -0.640 \end{pmatrix} \cdot S_{AB}$$ (1 Punkt)

$$\vec{S}_{AC} = \vec{u}_{AC} \cdot S_{AC} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + (b_1 + b_2)^2 + h^2}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ -(b_1 + b_2) \\ -h \end{pmatrix} \cdot S_{AC} \approx \begin{pmatrix} 0.133 \\ -0.886 \\ -0.443 \end{pmatrix} \cdot S_{AC}$$ (1 Punkt)

$$\vec{S}_{AD} = \vec{u}_{AD} \cdot S_{AD} = \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + (b_1 + b_2)^2 + h^2}} \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ -(b_1 + b_2) \\ -h \end{pmatrix} \cdot S_{AD} \approx \begin{pmatrix} -0.218 \\ -0.873 \\ -0.436 \end{pmatrix} \cdot S_{AD}$$ (1 Punkt)

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5000 \end{pmatrix} N$$ (1 Punkt)

Anwenden der Gleichgewichtsbedingungen liefert: (1 Punkt)

$$\vec{S}_{AB} + \vec{S}_{AC} + \vec{S}_{AD} \overset{!}{=} \vec{0}$$

Projektion auf Achsen liefert ein Gleichungssystem:

$$R_x = 0 \Rightarrow \frac{0.75}{\sqrt{32.8125}} \cdot S_{AC} + \frac{1.25}{\sqrt{31.8125}} \cdot S_{AD} = 0$$

$$\Rightarrow S_{AC} = \sqrt{\frac{509}{189}} \cdot S_{AD} \approx 1.641 \cdot S_{AD}$$

$$R_y = 0 \Rightarrow \frac{-3}{\sqrt{15.25}} \cdot S_{AB} - \frac{5}{\sqrt{32.8125}} \cdot S_{AC} - \frac{5}{\sqrt{31.8125}} \cdot S_{AD} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{\sqrt{15.25}} \cdot S_{AB} - \frac{5}{\sqrt{32.8125}} \cdot \sqrt{\frac{509}{189}} \cdot S_{AD} - \frac{5}{\sqrt{31.8125}} \cdot S_{AD} = 0$$

$$\Rightarrow S_{AB} = -\frac{\sqrt{15.25}}{3} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{32.8125}} \cdot \sqrt{\frac{509}{189}} + \frac{5}{\sqrt{31.8125}} \right) \cdot S_{AD}$$

$$\Rightarrow S_{AB} = -\frac{1648}{189} \cdot \sqrt{\frac{61}{509}} \cdot S_{AD} = -3.0186 \cdot S_{AD} = 0$$

$$R_z = 0 \Rightarrow \frac{-2.5}{\sqrt{15.25}} \cdot S_{AB} - \frac{2.5}{\sqrt{32.8125}} \cdot S_{AC} - \frac{2.5}{\sqrt{31.8125}} \cdot S_{AD} = 5000N$$

$$R_z = 0 \Rightarrow \frac{2.5}{\sqrt{15.25}} \cdot \frac{1648}{189} \cdot \sqrt{\frac{61}{509}} \cdot S_{AD} - \frac{2.5}{\sqrt{32.8125}} \cdot \sqrt{\frac{509}{189}} \cdot S_{AD} - \frac{2.5}{\sqrt{31.8125}} \cdot S_{AD} = 5000N$$

$$R_z = 0 \Rightarrow \frac{10382.4}{595.35 \cdot \sqrt{509}} \cdot S_{AD} = 5000N \Rightarrow \underline{\underline{S_{AD} = 6468.5N}}$$ (1 Punkt)

In die oberen Gleichungen einsetzen liefert:

$$\Rightarrow S_{AB} = -\frac{1648}{189} \cdot \sqrt{\frac{61}{509}} \cdot \frac{5000N \cdot 595.35 \cdot \sqrt{509}}{10382.4} = -2500N \cdot \sqrt{61} = \underline{\underline{-19525.6N}}$$ (1 Punkt)

$$\Rightarrow S_{AC} = \sqrt{\frac{509}{189}} \cdot \frac{5000N \cdot 595.35 \cdot \sqrt{509}}{10382.4} = \frac{20041875}{412 \cdot \sqrt{63}} N \approx \underline{\underline{10615.3N}}$$ (1 Punkt)

<u>Aufgabe 3 (8 Punkte, ∅ 3.9 Punkte):</u>

Nummerieren der Stäbe und der Knoten,

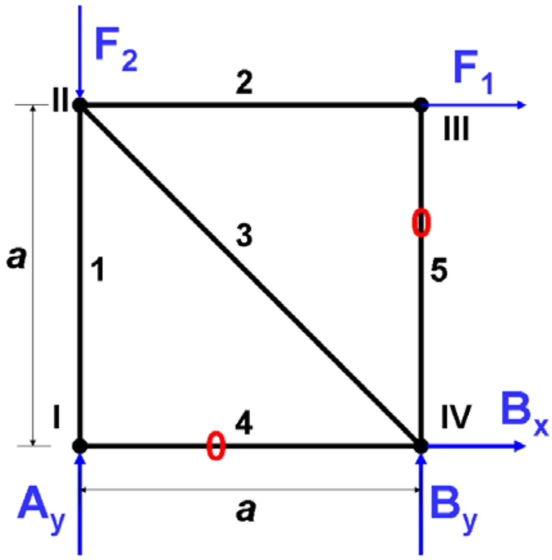
Anzahl der Knoten: k=4

Anzahl der Stäbe: s=5

Anzahl der Lagerreaktionen: r=3

2k=8=s+r

d.h. alle Knoten haben eine feste Lage und das Fachwerk ist somit statisch und kinematisch bestimmt.



Gesamtes Fachwerk freigeschnitten. Bestimmen der Lagerreaktionen:

$$R_x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow B_x + F_1 \Rightarrow \underline{\underline{B_x = -F_1}}$$ (1 Punkt)

$$R_y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow A_y + B_y - F_2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{B_y = F_1}}$$ (1 Punkt)

Momentengleichgewicht bezüglich des Punktes B:

$$M_B \overset{!}{=} 0 \Rightarrow a \cdot F_2 - a \cdot A_y - a \cdot F_1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{A_y = F_2 - F_1}}$$ (1 Punkt)

Nullstäbe:

Nach Regel 2 (Vorlesung) sind die Stäbe S_4 und S_5 Nullstäbe.

Freischneiden der Knoten und berechnen der Stabkräfte:

Knoten I:
$$y - Richtung : A_y + S_1 = 0 \Rightarrow S_1 = -A_y = \underline{\underline{F_1 - F_2}}$$
$$x - Richtung : Nullstab$$

Knoten III:
$$x - Richtung : F_1 - S_2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S_2 = F_1}}$$
$$y - Richtung : Nullstab$$

Knoten II:
$$x - Richtung : S_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot S_3 = 0 \Rightarrow S_3 = -\sqrt{2} \cdot S_2 = \underline{\underline{-\sqrt{2} \cdot F_1}}$$

Probe am Knoten IV:
$$y - Richtung : B_y + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot S_3 = 0 \Rightarrow F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot F_1 = 0$$
$$x - Richtung : B_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_3 = 0 \Rightarrow -F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot F_1 = 0$$
✔

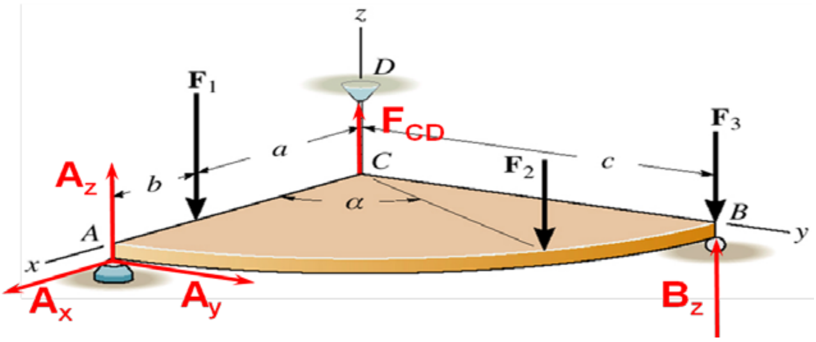
Stabkrafttabelle:

i	1	2	3	4	5
S_i	$F_1 - F_2$	F_1	$-\sqrt{2} \cdot F_1$	0	0
	Zug $(F_1 > F_2)$ Druck $(F_1 < F_2)$	Zug	Druck	-/-	-/-

Für jeden richtigen Wert in Tabelle 1 Punkt (5 Punkte)

Aufgabe 4 (9 Punkte, ∅ 4.5 Punkte):

Freikörperbild der Viertelkreisplatte:



(1 Punkt)

Gleichgewichtsbedingungen anwenden: (1 Punkt)

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{A} + \vec{B} + \vec{F}_{CD} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -350 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -200 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -200 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{CD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Projektion auf Achsen liefert:

$A_x = 0$ (1 Punkt)

$A_y = 0$ (1 Punkt)

$A_z + B_z + F_{CD} = 750N \quad (1)$

Momentengleichgewicht bezgl. A: (1 Punkt)

$$\vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{A3} \times \vec{F}_3 + \vec{r}_{AB} \times \vec{B} + \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_{CD} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -350 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} -1.5 \\ \sqrt{3} \cdot 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} m \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -200 \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} m \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -200 \end{pmatrix} N +$$

$$+ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} m \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} m + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{CD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

Projektion auf die Koordinatenachsen liefert:

$\text{x-Richtung}: -\sqrt{3} \cdot 300Nm - 600Nm + 3m \cdot B_z = 0 \Rightarrow \underline{\underline{B_z = 373.21N}}$ (1 Punkt)

$\text{y-Richtung}: -350Nm - 300Nm - 600Nm + 3m \cdot B_z + 3m \cdot F_{CD} = 0$

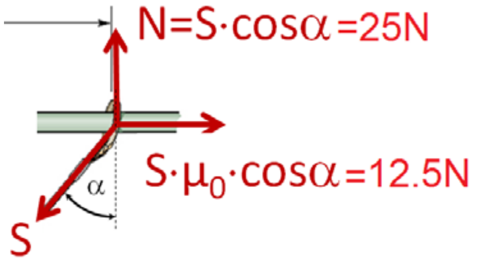
$\Rightarrow \underline{\underline{F_{CD} = 43.5N}}$ (1 Punkt)

In Gleichung (1) einsetzen liefert:

$(1) \Rightarrow \underline{\underline{A_z = 333.3N}}$ (1 Punkt)

Aufgabe 5 (7 Punkte, ∅ 2.5 Punkte):

Freikörperbild des Ringes:



(1 Punkt)

Damit Gleichgewicht herrscht, muss Haftungsbedingung

$H \leq \mu_0 \cdot N$ gelten: (1 Punkt)

Die Seilkraft wird mit S bezeichnet.

$\mathrm{R}_y = 0 \Rightarrow S \cdot \cos\alpha = N$

$\mathrm{R}_x = 0 \Rightarrow \mathrm{S} \cdot \sin\alpha = \mathrm{S} \cdot \cos\alpha \cdot \mu_0$ (1 Punkt)

Damit keine Bewegung eintritt muss gelten: $\mathrm{S} \cdot \sin\alpha \leq \mathrm{S} \cdot \cos\alpha \cdot \mu_0$

$\tan\alpha \leq \mu_0 \Rightarrow \alpha \leq 26.57°$ (1 Punkt)

Dies ist die Haftbedingung aus der Vorlesung!

Für den Winkel α gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{l} \Rightarrow d = 2 \cdot l \cdot \sin\alpha = 536.7mm$$ (3 Punkte)

Aufgabe 6 (7 Punkte, ∅ 1.9 Punkte):

Bewegung wird in drei Teilbewegungen aufgespalten:

① gleichmäßige Beschleunigung vom Stillstand auf die maximale Geschwindigkeit (1 Punkt)

② gleichförmige Bewegung mit maximaler Geschwindigkeit (1 Punkt)

③ gleichmäßige Verzögerung bis zum Stillstand (1 Punkt)

Der Zug beschleunigt gleichmäßig mit der Beschleunigung

a=0.6·g=6m/s^2, bis die Höchstgeschwindigkeit von $v_{\max} = \frac{360}{3.6} = 100 m/s$

erreicht ist.

Dafür benötigte Zeit t_1 und zurückgelegter Weg s_1:

$$t_1 = \frac{v_{\max}}{a} = \frac{100}{6} s = 16.667 s$$

(2 Punkte)

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = 833.33 m$$

Die Bewegung ist symmetrisch, d.h. zum Beschleunigen und zum Abbremsen braucht der Zug insgesamt

$$t = 2t_1 = 33.33 s$$

(1 Punkt)

$$s = 2s_1 = 1666.67 m$$

Den Rest der Strecke (8333.33m) legt er gleichförmig zurück und braucht hierfür:

$$t_2 = \frac{8333.33 m}{100 m/s} = 83.33 s$$

Somit beträgt die insgesamt benötigte Zeit: $t_F = t + t_2 = \underline{\underline{116.7 s}}$ (1 Punkt)