Modulprüfung – Technische Mechanik II

Bitte beachten:

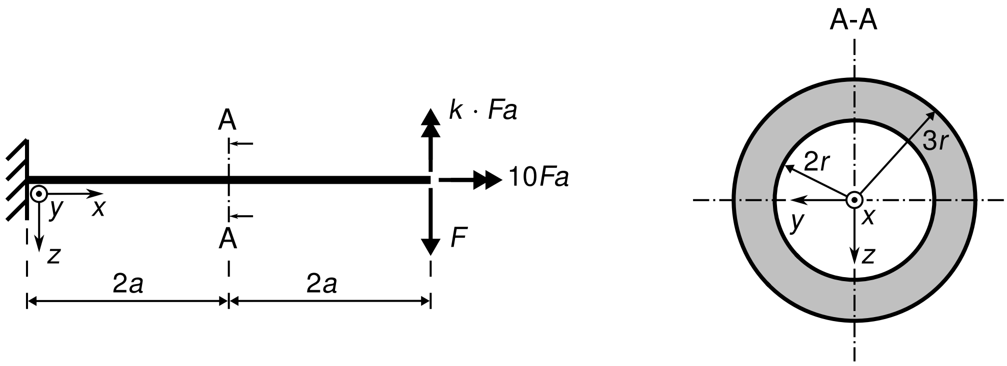
- Es wird ausschließlich der Bearbeitungsbogen bewertet.
- Weitere Hinweise befinden sich auf dem Bearbeitungsbogen.
- Es dürfen prinzipiell keine individuellen inhaltlichen Fragen beantwortet werden. Sollte Ihrer Meinung nach eine vermeintliche inhaltliche Unklarheit in der Aufgabenstellung bestehen, können Sie schriftlich eine diesbezügliche Frage auf der Rückseite der letzten Seite des Bearbeitungsbogens stellen. Machen Sie sich anschließend durch ein Handzeichen bemerkbar. Die Frage wird geprüft und gegebenenfalls werden die nötigen Informationen allen Studierenden gleichzeitig zugänglich gemacht.

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Aufbau und Lagerung: Ein homogener Balken mit dargestelltem Kreisringquerschnitt ist an der Stelle $x = 0$ fest eingespannt. An der Stelle $x = 2a$ befindet sich der Querschnitt A-A. Die beiden axialen Flächenträgheitsmomente I_{yy} und I_{zz} des Querschnitts sind gegeben zu $I_{yy} = I_{zz} = I$. Die Abmessungen des räumlichen Systems sind den Zeichnungen zu entnehmen.

Äußere Lasten: Im Flächenschwerpunkt des Querschnitts wirken an der Stelle $x = 4a$ eine Einzelkraft F in positiver z-Richtung, ein Einzelmoment $10Fa$ in positiver x-Richtung und ein Einzelmoment $k \cdot Fa$ (positive Konstante $k > 0$) in negativer z-Richtung.

Gegebene Größen: a, r, $F > 0$, $k > 0$, $I_{yy} = I_{zz} = I$, Hauptachsensystem xyz



Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden. Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannte Vorzeichenkonvention für Schnittgrößen.

1.a) Bestimmen Sie die betragsmäßig maximale Schubspannung $|\tau|^{M_T}_{\max}$ im Querschnit A-A nur infolge der Torsionsbelastung. *[ca. 3P]*

1.b) Bestimmen Sie die betragsmäßig maximale Schubspannung $|\tau|^{Q_z}_{\max}$ im Querschnit A-A nur infolge der Querkraftbelastung in z-Richtung. Nehmen Sie eine in y-Richtung konstante Schubspannungsverteilung an. *[ca. 4P]*

Hinweis: Die gesuchte betragsmäßig maximale Schubspannung $|\tau|^{Q_z}_{\max}$ tritt bei $z = 0$ auf.

1.c) Bestimmen Sie die Geradengleichung $z = z(y)$ der Nulllinie der in x-Richtung wirkenden Normalspannung σ_x im Querschnitt A-A. *[ca. 3P]*

Für die folgenden Teilaufgaben ist die Geradengleichung $z = z(y)$ der σ_x-Nulllinie, die sich für ein bestimmtes k ergibt, als zusätzliche gegebene Größe zu verwenden.

Zusätzlich gegebene Größe: σ_x-Nulllinie: $z(y) = \frac{2}{3}y$

1.d) Zeichnen Sie in der Skizze im Bearbeitungsbogen den Punkt maximaler Zugspannung $\sigma_{x,\max}$ und maximaler Schubspannung $\tau_{xz,\max}$ im Querschnitt A-A ein. *[ca. 4P]*

Für die folgenden Teilaufgaben sind die Konstante $\sigma_0 > 0$ sowie die in x- und y-Richtung wirkenden Normalspannungen $\sigma_{x,P} = -12\sigma_0$ bzw. $\sigma_{y,P} = 0$ und die in y-Richtung wirkende Schubspannung $\tau_{xy,P} = -2,5\sigma_0$ in einem bestimmten Punkt P als zusätzlich gegebene Größen zu verwenden. Außerdem ist anzunehmen, dass in diesem Punkt P ein ebener Spannungszustand herrscht, der durch die Spannungen $\sigma_{x,P}$, $\sigma_{y,P}$ und $\tau_{xy,P}$ beschrieben wird.

Zusätzlich gegebene Größen: $\sigma_0 > 0$, $\sigma_{x,P} = -12\sigma_0$, $\sigma_{y,P} = 0$, $\tau_{xy,P} = -2,5\sigma_0$

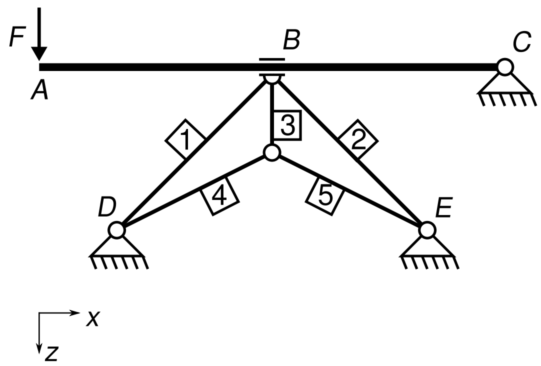
1.e) Berechnen Sie die beiden Hauptspannungen σ_1 und σ_2 im Punkt P ($\sigma_1 > \sigma_2$). Zeichnen Sie außerdem *einen* möglichen Ort für den Punkt P in die Skizze im Bearbeitungsbogen ein. *[ca. 4P]*

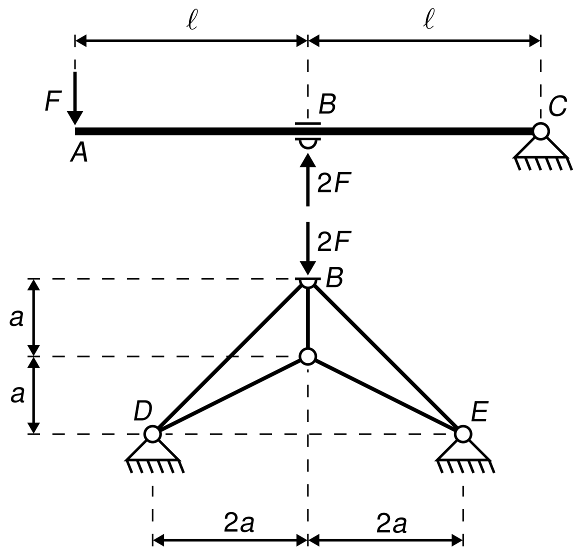
Aufgabe 2 (22 Punkte)

Aufbau und Lagerung: Das links dargestellte, ebene Tragwerk besteht aus dem starren Balken *ABC* und einem idealen Fachwerk. Das symmetrische Fachwerk besteht aus fünf homogenen Stäben (jeweils mit Dehnsteifigkeit *EA*) und ist in den Punkten *D* und *E* fest gelagert. Zur Berechnung wurde das Gesamtsystem bereits in die rechts dargestellten Teilsysteme zerlegt. Die Abmessungen des Systems sind den Zeichnungen zu entnehmen.

Äußere Lasten: Auf den Balken *ABC* wirkt im Punkt *A* eine Einzellast *F* in positiver *z*-Richtung. Infolge dieser äußeren Last stellt sich im Punkt *B* die eingezeichnete Gelenkkraft $2F$ ein.

Gegebene Größen: a, ℓ, EA, $F > 0$, Koordinatensystem xz





Die Teilaufgaben **2.a)** - **2.c)** sollen mit Hilfe des *Kraftgrößenverfahrens* gelöst werden. Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

2.a) Wählen Sie die Stabkraft im Stab $\boxed{3}$ als statisch Unbestimmte (positive Stabkraft entspricht Zugkraft) und leiten Sie daraus ein statisch bestimmtes Hauptsystem ab. Bestimmen Sie alle Stabkräfte S_i^0 im Lastzustand sowie alle Stabkräfte $\bar{S}_i$ im Einheitszustand. *[ca. 8P]*

Für die folgenden Teilaufgaben wird die Stabkraft im Stab $\boxed{1}$ als statisch Unbestimmte X gewählt. Die Stabkräfte im Last- und Einheitszustand sind als zusätzlich gegebene Größen zu verwenden.

Zusätzlich gegebene Größen:

i	1	2	3	4	5
S_i^0	0	0	$-2F$	$-\sqrt{5}F$	$-\sqrt{5}F$
$\bar{S}_i$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$

2.b) Berechnen Sie die Relativverschiebung δ_{10} im *Lastzustand*. *[ca. 3P]*

2.c) Berechnen Sie die Relativverschiebung δ_{11} im *Einheitszustand*. *[ca. 3P]*

Durch Anwendung des Superpositionsprinzips wurde die statisch Unbestimmte X berechnet. Für die folgende Teilaufgabe ist ihr Wert als zusätzlich gegebene Größe zu verwenden.

Zusätzlich gegebene Größe: X

2.d) Bestimmen Sie die vertikale Verschiebung v_B des Punktes B in positiver z-Richtung. *[ca. 3P]*

Für die folgenden Teilaufgaben ist die vertikale Verschiebung v_B des Punktes B in positiver z-Richtung als zusätzlich gegebene Größe zu verwenden.

Zusätzlich gegebene Größe: v_B

2.e) Bestimmen Sie die Federsteifigkeit k einer linearen Feder, die das Fachwerk hinsichtlich des Verformungsverhaltens in vertikaler Richtung im Punkt B elastostatisch äquivalent ersetzt. *[ca. 2P]*

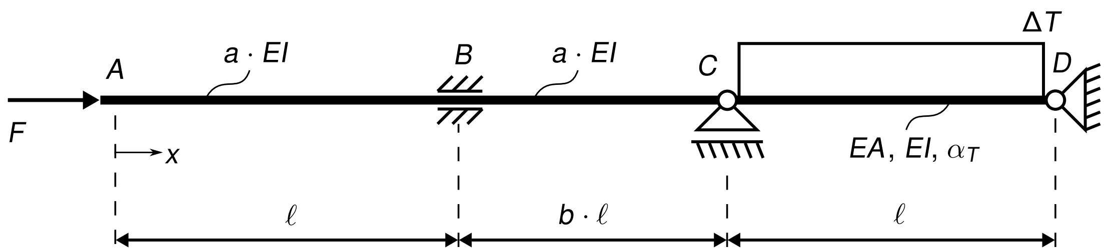
2.f) Bestimmen Sie die vertikale Verschiebung v_A des Punktes A in positiver z-Richtung. Kreuzen Sie weiterhin im Bearbeitungsbogen an, wie sich die vertikalen Verschiebungen v_A des Punktes A und v_B des Punktes B (jeweils in positiver z-Richtung) ändern, wenn der starre Balken ABC durch einen biegeweichen Balken ersetzt wird. *[ca. 3P]*

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Aufbau und Lagerung: Das dargestellte System besteht aus dem homogenen Balken ABC mit konstanter Biegesteifigkeit $a \cdot EI$ (positive Konstante a) und dem homogenen Balken CD (Biegesteifigkeit EI, Dehnsteifigkeit EA, Temperaturausdehnungskoeffizient α_T). Der Balken CD ist im Punkt C an ein in x-Richtung verschiebliches Auflager angeschlossen und im Punkt D drehbar gelagert. Der Balken ABC ist im Punkt B mittels einer Schiebehülse mit vernachlässigbarer Länge ausschließlich in x-Richtung verschieblich gelagert und im Punkt C an den Balken CD angeschlossen. Die Abmessungen des ebenen Systems sind der Zeichnung zu entnehmen.

Äußere Belastung: Im Punkt A wirkt eine Einzelkraft F in positiver x-Richtung. Auf den Balken CD wirkt eine konstante Temperaturlast ΔT ein.

Gegebene Größen: ℓ, EA, EI, α_T, $F > 0$, ΔT, Koordinate x



Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

3.a) Bestimmen Sie die Verschiebung u_C des Punktes C in positive x-Richtung. Nehmen Sie dabei an, dass die Balken nicht knicken. *[ca. 3P]*

3.b) Nehmen Sie an, dass in allen drei Balkenabschnitten AB, BC und CD Knicken in der ersten Eigenform auftritt. Zeichnen Sie den *qualitativen* Verlauf der Balkenachse $ABCD$ in einem ausgeknickten, stabilen Gleichgewichtszustand in die hierfür vorgesehene Skizze im Bearbeitungsbogen ein. Kennzeichnen Sie strukturparallele Tangenten. *[ca. 3P]*

3.c) Bestimmen Sie die positiven Konstanten a und b derart, dass alle drei Balkenabschnitte AB, BC und CD die gleiche kritische Knicklast besitzen. *[ca. 4P]*

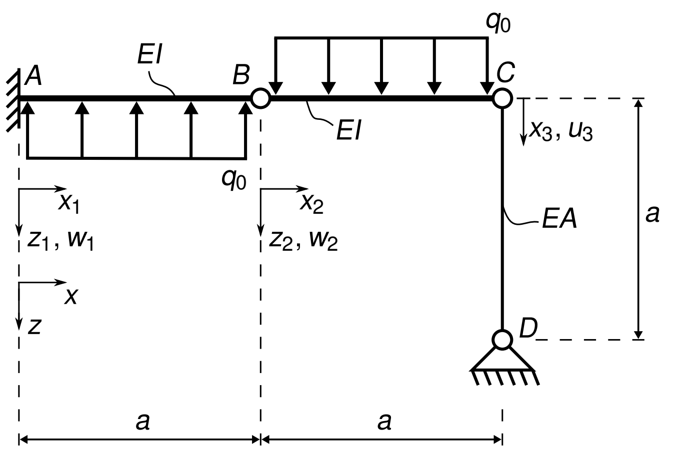
Aufgabe 4 (21 Punkte)

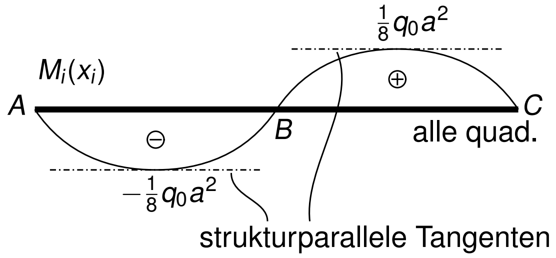
Aufbau und Lagerung: Das dargestellte, ebene Tragwerk besteht aus zwei homogenen, schubstarren Balken AB und BC (jeweils Biegesteifigkeit EI), die im Punkt B gelenkig miteinander verbunden sind. Der Balken AB ist im Punkt A fest eingespannt. Der Balken BC ist im Punkt C gelenkig an den Stab CD (Dehnsteifigkeit EA) angeschlossen, der im Punkt D fest gelagert ist. Die Abmessungen des Systems und die lokalen Koordinatensysteme sind der Zeichnung zu entnehmen.

Äußere Belastung: Auf den Balken AB wirkt eine konstante Linienlast q_0 in negativer z-Richtung. Auf den Balken BC wirkt eine konstante Linienlast q_0 in positiver z-Richtung.

Infolge dieser äußeren Belastung stellt sich entlang der beiden Balken der dargestellte grafische Verlauf des Schnittmoments M ein.

Gegebene Größen: a, EI, EA, q_0, Koordinatensysteme x_1z_1, x_2z_2 und xz (Rechtssysteme), Koordinate x_3





Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

4.a) Mittels Integration der für Balken gültigen Differentialgleichung können die analytischen Verläufe der Biegelinien $w_1(x_1)$ und $w_2(x_2)$ entlang der beiden Balken AB und BC berechnet werden. Zusätzlich kann mittels Integration der für Dehnstäbe gültigen Differentialgleichung der analytische Verlauf der Verschiebung $u_3(x_3)$ entlang des Dehnstabs CD berechnet werden. Formulieren Sie sämtliche hierfür erforderlichen statischen und kinematischen Rand- und Übergangsbedingungen ausschließlich unter Verwendung der Querkraft Q_i, des Schnittmoments M_i, der Verdrehung ϕ_i, der Durchsenkung w_i ($i = 1, 2$), der Normalkraft N_3 und der Verschiebung u_3 sowie der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme. *[ca. 5P]*

4.b) Bestimmen Sie die Durchsenkung w_C des Punktes C in z-Richtung. *[ca. 3P]*

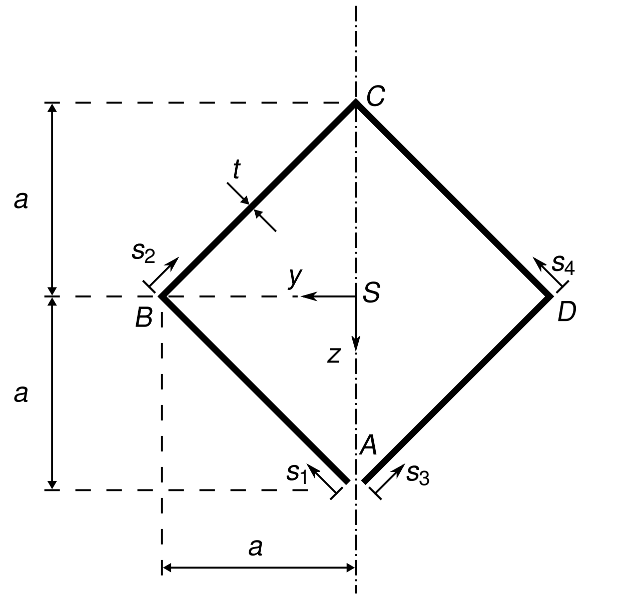
4.c) Zeichnen Sie für den Sonderfall $EA \to \infty$ die *qualitativen* grafischen Verläufe der Verdrehung ϕ und der Durchsenkung w entlang der beiden Balken AB und BC in die hierfür vorgesehenen Skizzen im Bearbeitungsbogen ein. Geben Sie Vorzeichen, polynomiale Ordnungen, Nullstellen sowie strukturparallele Tangenten an. Verwenden Sie die gegebenen Koordinatensysteme. *[ca. 9P]*

4.d) Im Bearbeitungsbogen sind zwei verschiedene Modifikationen ⓐ und ⓑ des Systems dargestellt. Kreuzen Sie in den zugehörigen Tabellen im Bearbeitungsbogen an, ob bzw. wie sich für Balken BC die Verdrehung ϕ_C und die Durchsenkung w_C am Punkt C infolge jeder der beiden Modifikationen ändern. Betrachten Sie die Modifikationen *nicht* in Kombination, sondern *separat*. *[ca. 4P]*

Aufgabe 5 (19 Punkte)

Das dargestellte dünnwandige Profil mit dem Flächenschwerpunkt S im Ursprung des Schwerachsensystems yz ist achsensymmetrisch zur z-Achse. Das Profil besitzt die konstante Dicke t und weist im Punkt A einen Schlitz mit vernachlässigbarer Breite auf. Die Abmessungen des Profils und die lokalen Wandkoordinaten sind der Zeichnung zu entnehmen.

Gegebene Größen: a, $t \ll a$, Schwerachsensystem yz (Rechtssystem), Wandkoordinaten s_1, s_2, s_3 und s_4



5.a) Berechnen Sie das axiale Flächenträgheitsmoment I_{zz} und das Deviationsmoment I_{yz} des Profils. Terme höherer Ordnung von t sollen hierbei vernachlässigt werden. *[ca. 4P]*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von der vorherigen bearbeitet werden.

5.b) Zeichnen Sie den grafischen Verlauf des statischen Moments S_y entlang des Profilabschnitts ABC in die hierfür vorgesehene Skizze im Bearbeitungsbogen ein. Geben Sie Vorzeichen, polynomiale Ordnungen, charakteristische Werte, Nullstellen, Maximal- und Minimalstellen, Maximal- und Minimalwerte sowie strukturparallele Tangenten an. Verwenden Sie die vorgegebenen Wandkoordinaten s_1 und s_2. *[ca. 6P]*

Hinweis: Im Bearbeitungsbogen steht Ihnen für die Lösung der Aufgabe eine zusätzliche Skizze des Profils zur Verfügung. Dort können Sie den zt-Verlauf entlang des Profils eintragen, der jedoch nicht gewertet wird.

5.c) Geben Sie in der vorgefertigten Skizze im Bearbeitungsbogen mithilfe von Pfeilen die tatsächliche Wirkungsrichtung der Schubspannungen τ_{xs} entlang des gesamten Profils für eine in positive z-Richtung wirkende Querkraft Q_z an. Markieren Sie außerdem in derselben Skizze eindeutig alle Stellen im Profil, an denen für diese Belastung die betragsmäßig maximale Schubspannung $|\tau_{xs}|_{\max}$ auftritt. *[ca. 2P]*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von allen vorherigen und unabhängig voneinander bearbeitet werden.

5.d) Im Bearbeitungsbogen ist entlang des Profils der Schubfluss $T(s_i)$ für eine in positive y-Richtung wirkende Querkraft Q_y eingezeichnet. Ermitteln Sie damit die Koordinaten y_{SMP} und z_{SMP} des Schubmittelpunkts. *[ca. 4P]*

5.e) Kreuzen Sie für jede der im Bearbeitungsbogen genannten Größen an, wie sich deren Wert ändert, wenn der Schlitz im Punkt A geschlossen wird. *[ca. 3P]*