Inhaltsverzeichnis

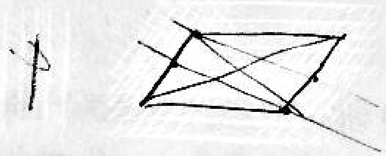
1 Mathematische Grundlagen

Aufgabe 1.1:

In welchem Verhältnis wird die Diagonale eines Parallelogramms von einer Geraden geteilt, die durch die Seitenmitte und einen Eckpunkt geht?

Lösung

$$\mu = \frac{1}{3}$$



Aufgabe 1.2:

Ein Vektor $\mathbf{A}$ wird auf den Vektor $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$ projiziert. Wie lang ist die Projektion p?

Lösung

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}} (A_x + A_y + A_z)$$

Aufgabe 1.3:

Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung, dass die Diagonalen einer Raute aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 1.4:

Der Ortsvektor $\mathbf{r}$ hat die Länge $r = 5$ cm. Zerlegen Sie ihn in drei aufeinander senkrechte Komponenten $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_y$, $\mathbf{r}_z$, so dass sich deren Längen wie 1 : 2 : 3 verhalten.
Wie groß sind die Längen von $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_y$, $\mathbf{r}_z$ und welchen Winkel bilden sie mit $\mathbf{r}$?

Lösung

$$x = \frac{5}{\sqrt{14}}; \quad y = 2x; \quad z = 3x; \quad \alpha = 74,5°; \quad \beta = 57,7°; \quad \gamma = 36,7°;$$

Aufgabe 1.5:

In einem kartesischen Koordinatensystem seien drei Vektoren gegeben.

$\mathbf{A} = 5\mathbf{e}_x + \alpha\mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$, $\mathbf{C} = 2\mathbf{e}_x - 10\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z$.

Welchen Betrag muss die Komponente $\mathbf{A}_y$ haben, damit die drei Vektoren **komplanar** sind?

Lösung

$$\alpha = -\frac{23}{7}$$

Aufgabe 1.6:

Ein Dreieck im Raum werde durch die Ortsvektoren $\mathbf{a} = (3, 5, 2)$ und $\mathbf{b} = (7, 1, 4)$ aufgespannt.

Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung seine Fläche.

Lösung

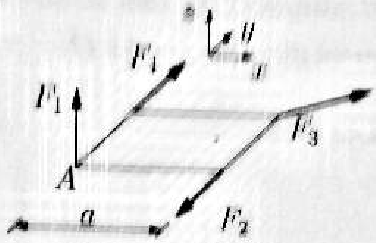
$$F_\triangle = \frac{1}{2}\sqrt{1352}$$

Aufgabe 1.7:

Zeigen Sie, dass der Entwicklungssatz $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{CA})\mathbf{B} - (\mathbf{CB})\mathbf{A}$ für die speziellen Vektoren $\mathbf{A} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{B} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{C} = (1, 1, 1)$ gilt.

Aufgabe 1.8:

An einer quadratischen Platte der Seitenlänge a greifen die folgenden Kräfte an: $\mathbf{F}_1 = (0, 0, \sqrt{2})\,F$, $\mathbf{F}_2 = (0, -1, 0)\,F$, $\mathbf{F}_3 = (1, 1, 0)\,F$, $\mathbf{F}_4 = (0, 4, 0)\,F$. Bestimmen Sie den Kraftwinder (resultierende Kraft und Moment) bezüglich A.



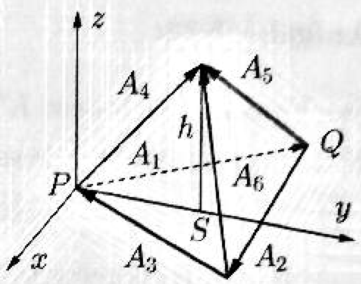
Lösung

$(\mathbf{R}, \mathbf{M}_A)$ mit

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot F; \qquad \mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Fa \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1.9:

Die Kanten eines regelmäßigen Tetraeders stellen sechs gebundene Kraftvektoren mit gleichem Betrag A dar, wie die Zeichnung zeigt.



a) Ersetzen Sie bezüglich des Punktes P das gegebene System durch einen Kraftwinder (resultierende Kraft und Moment).

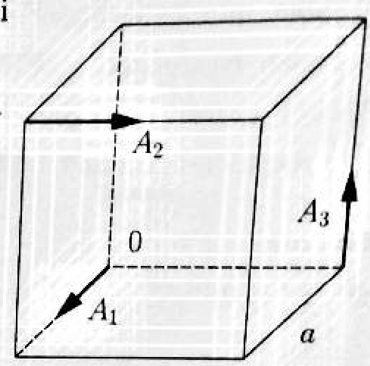
b) Bestimmen Sie den Kraftwinder des Systems für den Punkt Q.

Lösung

a) $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_P)$ mit $\mathbf{R} = \sqrt{6}A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{M}_P = A^2 \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$

b) $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_Q)$ mit $\mathbf{R}$ wie bei a) und $\mathbf{M}_Q = -\dfrac{1}{2}A^2 \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Aufgabe 1.10:



In drei Kanten eines Würfels mit der Kantenlänge a liegen drei windschiefe, Kräfte je vom Betrag A.
Bestimmen Sie den Kraftwinder (resultierende Kraft und Moment)für den Punkt O.

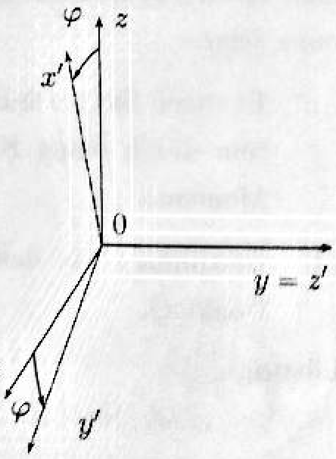
Lösung

$$(\mathbf{R},\ \mathbf{M}_O) \text{ mit } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} A \\ A \\ A \end{bmatrix} \ ; \quad \mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ aA \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1.11:

Zeige mit Hilfe der Vektorrechnung, dass die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Aufgabe 1.12:



Das Koordinatensystem K' ist relativ zum Koordinatensystem K in der dargestellten Weise verdreht.

a) Es seien für zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ im System K' die Komponentendarstellungen $\mathbf{a}' = [1,\ 1,\ 1]^T$, $\mathbf{b}' = [1,\ 1,\ 0]^T$ gegeben. Welche entsprechenden Komponenten ergeben sich im System K?

b) Bilde in beiden Koordinatensystemen jeweils das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ und das Kreuzprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ und vergleiche die Ergebnisse.

Aufgabe 1.13:

Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ ist.

Aufgabe 1.14:

Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{A} = (3, 6, 2)$, $\mathbf{B} = (1, 2, -1)$ und $\mathbf{C} = (0, 0, 2)$. Wie groß muss der skalare Faktor λ sein, wenn $\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ den Winkel $\alpha = 60°$ einschließen sollen?

Lösung

$\lambda_1 = -0,82$ und $\lambda_2 = 20,18$

Aufgabe 1.15:

Die beiden Vektoren $\mathbf{A} = (1, 2, 3)$ und $\mathbf{B} = (2, 2, 5)$ sollen von dem Anfangspunkt $(0, 0, 0)$ ausgehen und spannen somit eine Ebene auf. Berechnen Sie die Vektoren, die auf dieser Ebene senkrecht stehen und denselben Betrag wie der Vektor $(1, 1, 1)$ haben.

Lösung

$$\mathbf{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1.16:

Ein Dreieck im Raum werde durch die Ortsvektoren $\mathbf{a} = (3, 5, 2)$ und $\mathbf{b} = (7, 1, 4)$ aufgespannt.
Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung seine Fläche.

Lösung

$A = \frac{1}{2}\sqrt{1352}$

Aufgabe 1.17:

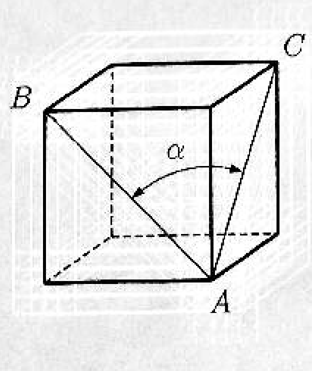
Zeige mit Hilfe der Vektorrechnung, dass die Diagonalen

a) eines Parallelogramms sich halbieren.

b) einer Raute sich senkrecht schneiden.

Aufgabe 1.18:

Bestimmen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts den Winkel zwischen zwei von derselben Ecke ausgehenden Flächendiagonalen eines Würfels.



Aufgabe 1.19:

Die Parameterdarstellung zweier sich nicht schneidender Geraden im Raum sei gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \ell_1 &= \mathbf{a}_1 + \lambda\,\mathbf{e}_1 \\ \ell_2 &= \mathbf{a}_2 + \mu\,\mathbf{e}_2 \end{aligned}\right\} \quad -\infty < \lambda,\, \mu < +\infty \;,$$

wo $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ die normierten Richtungsvektoren in Richtung der Geraden sind, d.h. $|\,\mathbf{e}_1\,| = |\,\mathbf{e}_2\,| = 1$.

a) Unter welcher Bedingung existiert ein eindeutiges gemeinsames Lot zwischen diesen Geraden? Wie lautet die entsprechende Bedingung für den durch $\cos\alpha = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$ definierten Winkel α?

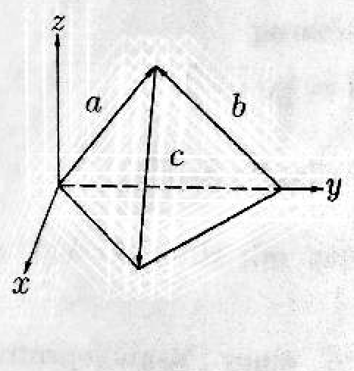
b) Bestimmen Sie die Parameterwerte λ^* und μ^* der Fußpunkte ℓ_1^* und ℓ_2^* des Gemeinlots.
(Hinweis: der Differenzvektor $\ell_1^* - \ell_2^*$ steht senkrecht auf $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$!)

c) Bestimmen Sie die Gleichung des Gemeinlotes in der Form

$$\ell^* = \mathbf{a}^* + t\,\mathbf{e}^* \;; -\infty \; < t < +\infty \;;\; |\mathbf{e}^*| = 1$$

unter Nutzung der in (b) ermittelten Parameterwerte λ^* und μ^*.

Aufgabe 1.20:



Gegeben ist ein regelmäßiger Tetraeder mit der Kantenlänge s.

a) Berechnen Sie die Höhe des Tetraeders aus der gegebenen Kantenlänge.

b) Bestimmen Sie die Komponenten der Kantenvektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ im dargestellten Koordinatensystem.

Aufgabe 1.21: ~ (c)?

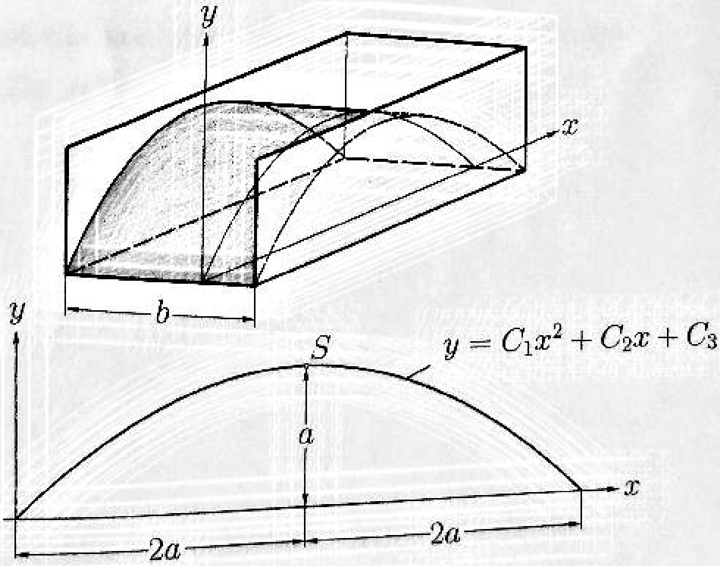
Auf dem Kipper eines Lastwagens befindet sich ein Sandhaufen mit parabelförmiger Kontur. Die untere Abbildung zeigt einen Schnitt durch den Sandhaufen in der dargestellten xy-Ebene. Die allgemeine mathematische Form der Parabel (obere Berandung der Schnittfläche) lautet $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$.

Gegeben sind die Abmessungen a und b des Haufens, der Punkt S bezeichnet den Parabelscheitel.

a) Bestimmen Sie die Konstanten C_1, C_2 und C_3 der Parabelgleichung anhand der gegebenen
Abmessung a im gegebenen Koordinatensystem xy.

b) Berechnen Sie das Volumen des Sandhaufens.

c) Stellen Sie zunächst ein infinitesimal kleines Bogenelement $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ der Parabel in integrierbarer Form auf und berechnen Sie die freie Oberfläche des Sandhaufens.
(Hinweis: Mit $X = Ax^2 + Bx + C$ und $k = \dfrac{4A}{4AC - B^2}$
ist $\int \sqrt{X}dx = \dfrac{(2Ax + B)}{4A}\sqrt{X} + \dfrac{1}{2k}\dfrac{1}{\sqrt{A}}\ \ln(2\sqrt{AX} + 2Ax + B)\ +\ C_{Int}$)



2 Kraftsysteme

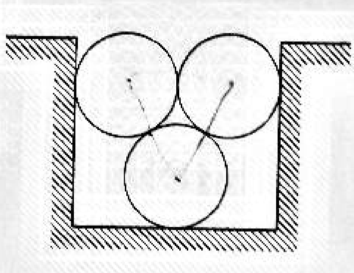
2.1 Ebene Kraftsysteme

Aufgabe 2.1:

Drei Rohre gleichen Durchmessers liegen so in einem Kanal, dass die beiden oberen sich gerade nicht mehr berühren. Das Gewicht eines jeden Rohres ist G.

a) Zeichnen Sie die Freikörperbilder, wenn die Wände und Rohre als glatt angenommen werden.

b) Wie groß sind die von der seitlichen Kanalwand aufgebrachten Kräfte H?



Gegeben: G

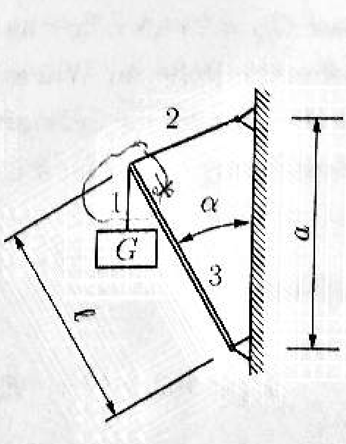
Lösung

$$H = \frac{1}{3}\sqrt{3}G \quad \text{bzw.} \quad H = G \cdot \underbrace{\tan\alpha}_{\tan 30^\circ} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot G$$

Aufgabe 2.2:

Wie groß sind bei der skizzierten Verladevorrichtung die in das Seil 2 und die Stange 3 eingeleiteten Kräfte?

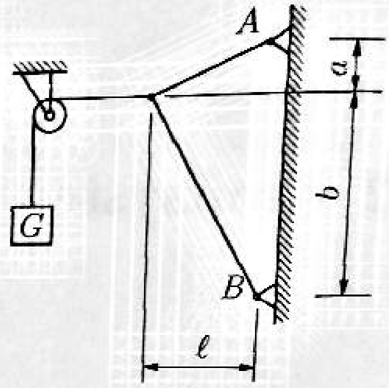
Gegeben: $a = 2,7$ m; $\ell = 3$ m; $\alpha = 30°$; $G = 10$ kN



Lösung

$$F_2 = 5,57\ kN; \quad F_3 = -11,1\ kN$$

Aufgabe 2.3:



In dem dargestellten System sind die Seilkräfte in den Ankern A und B zunächst formelmäßig, dann rechnerisch und durch Zeichnung zu ermitteln.

Gegeben: $\ell = 1$ m; $a = 0,577$ m; $b = 1,730$ m; $G = 5$ kN

Lösung

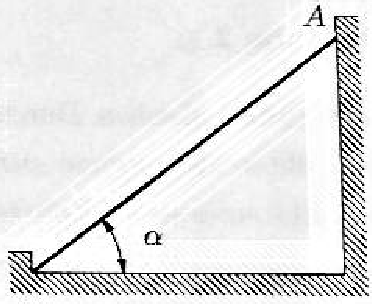
$$A = 0,866\,G; \quad B = 0,5\,G$$

Aufgabe 2.4:

Ein homogener schlanker Balken (Gewicht G) stützt sich bei A gegen eine glatte Wand und bei B in einer Ecke ab.

a) Zeichnen Sie das Freikörperbild.

b) Bestimmen Sie die bei A und B auf den Balken ausgeübten Kräfte.



Gegeben: $G;\alpha$

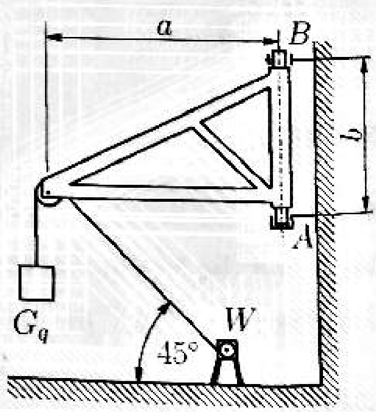
Lösung

$$A = \frac{G}{2}\cot\alpha$$

Aufgabe 2.5:

Der skizzierte Wanddrehkran vom Gewicht $G_K = 15$ kN ist in A und B drehbar gelagert. Der Schwerpunkt S des Krangerüstes hat den Abstand $s = 0,8$ m von der Drehachse. Die Last $G_Q = 20$ kN hängt an einem Seil, das über eine am Kran befestigte Rolle zur Winde W läuft.

Bestimmen Sie die Seilkraft und die Auflagereaktionen.

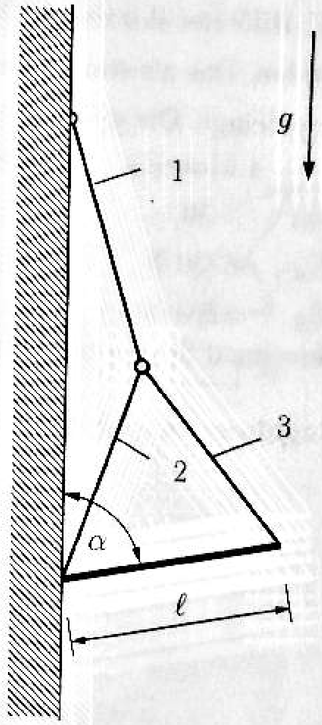


Gegeben: $a = 3$ m; $b = 1,5$ m; $s = 0,8$ m; $G_Q = 20$ kN; $G_K = 15$ kN

Lösung

$$F_A = 102,9\ kN; \quad F_B = 76,3\ kN$$

Aufgabe 2.6: ~ (noch einmal)



Ein homogener Stab (Masse m, Länge ℓ) soll an einer senkrechten Wand wie dargestellt an Seilen aufgehängt werden. Die Seile 2 und 3 haben die Länge ℓ. Der Stab liegt bei A reibungsfrei an der Wand an.

a) Wie lang muss das Seil 1 sein, damit der Stab sich unter einem Winkel α an der Wand abstützt?

b) Wie groß ist dann die Kraft im Seil 1?

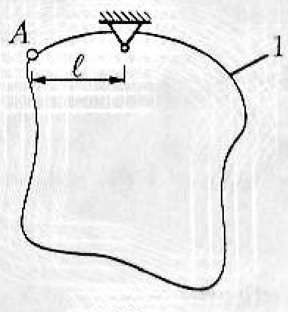
Gegeben: m; ℓ; $60° \leq \alpha \leq 90°$; g

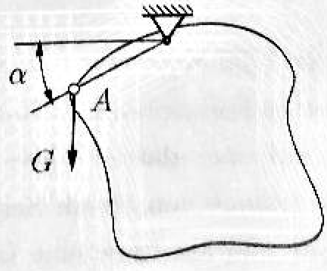
Lösung

a) $\ell_1 = \frac{1}{2}\ell(\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha)\sqrt{(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\alpha)^2 + 1}$

b) $F_S = mg\sqrt{1 + \frac{1}{(1+\tan\alpha)^2}}$

Aufgabe 2.7: ~ (noch einmal)





An eine drehbar gelagerte Masse 1 wird im Abstand ℓ vom Aufhängepunkt ein Gewicht G gehängt, sodass sich die Masse um den Winkel α dreht. Erhöht man das Zusatzgewicht auf $3G$, so stellt sich der Winkel 2α ein. Wie groß ist α?

Gegeben: G; ℓ

Lösung

$\alpha = 30°$

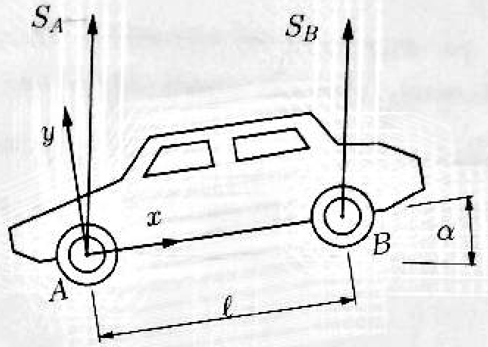
Aufgabe 2.8:

Mit Hilfe der skizzierten Anordnung soll die Schwerpunktslage eines Fahrzeuges bestimmt werden. Das als starr angenommene Fahrzeug wird unter zwei Winkel α_1 und α_2 an Seilen aufgehängt. Die gemessenen Seilkräfte S_A und S_B sind:

	1.Messung	2.Messung
α	30°	0°
S_A	6230 N	6000 N
S_B	3770 N	4000 N

Berechnen Sie die Schwerpunktskoordinaten x_S und y_S des Fahrzeuges.

Gegeben: Radabstand $\ell = 2,5$ m



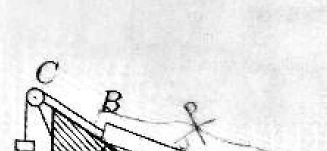
Lösung

$x_S = 1\ m; \quad y_S = 0,1\ m$

Aufgabe 2.9:

Eine 1000 N schwere Stange berührt mit dem Ende A den glatten horizontalen Fußboden, mit dem anderen Ende B liegt sie auf einer glatten, unter 30° geneigten Fläche auf. In B wird die Stange von einem Seil gehalten, welches über eine Rolle läuft und am Ende eine Last G_Q trägt. Das Seilstück BC ist parallel zur geneigten Fläche.

Unter Ausschluss jeglicher Reibung sind numerisch die Last G_Q, die Kraft $\mathbf{F}_A$ auf den horizontalen Fußboden und die Kraft $\mathbf{F}_B$ auf die geneigte Fläche zu bestimmen.



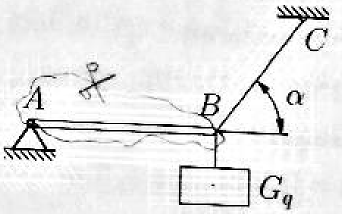
Lösung

$F_A = 500\ N; \quad F_B = 433\ N; \quad G_Q = 250\ N$

Aufgabe 2.10:

Der homogene Balken AB vom Gewicht G_B ist am Ende B durch ein Gewicht G_Q belastet. Der Balken ist in A gelenkig gelagert und wird durch das gewichtslose Seil BC in der horizontalen Lage gehalten.

Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen in A und die Seilkraft.



Gegeben: $G_B = 100$ N; $G_Q = 20$ N; $\alpha = 45°$

F_G F_q

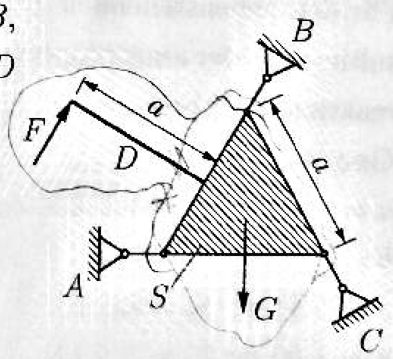
Lösung

$F_A = 86\ N; \quad F_S = 99\ N;$

Aufgabe 2.11: (nocheinmal)

Die homogene Scheibe S vom Gewicht $G = F/2$ hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks und wird durch drei Stäbe A, B, C gehalten. Die Scheibe ist mit einem gewichtslosen Balken D starr verbunden, an dessen Ende die Kraft $\mathbf{F}$ angreift.

Bestimmen Sie die Stabkräfte.

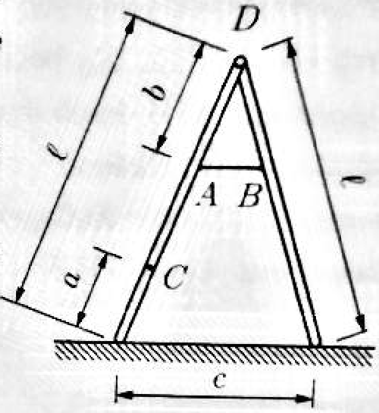


Gegeben: $F = 2000$ N; $a = 1$ m

Lösung

$A = 2309\ N; \quad B = 3732\ N; \quad C = 2887\ N$

Aufgabe 2.12: (noch einmal)

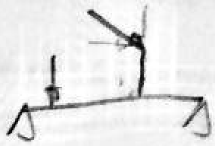


Die Holme der skizzierten Trittleiter sind bei D durch ein reibungsfreies Gelenk verbunden. Das Gewicht der Leiter beträgt G_L und ist gleichmäßig über die Holme verteilt. Auf der Stufe bei C steht ein Mann vom Gewicht G_M.
Welche Kraft tritt in dem Verbindungsstück $A - B$ auf? (Das System ist reibungsfrei.)
Gegeben: $G_L = 250$ N; $\ell = 2,40$ m; $b = 0,9$ m; $G_M = 750$ N; $a = 0,6$ m; $c = 1,5$ m

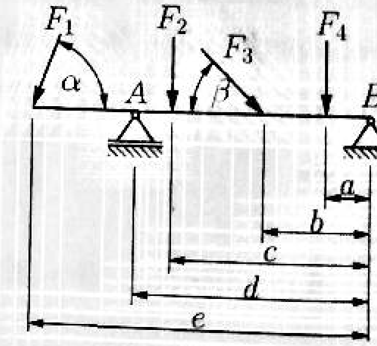
Lösung

$$S = 137\ N$$

Aufgabe 2.13:



Für den nebenstehenden Träger auf zwei Stützen sind die Resultierende der eingeprägten äußeren Kräfte und die Auflagerreaktionen zu bestimmen.
Gegeben:
$a = 0,75$ m; $F_1 = 1,3$ kN; $\alpha = 70°$;
$b = 1,50$ m; $F_2 = 2,0$ kN; $\beta = 45°$;
$c = 2,50$ m; $F_3 = 3,0$ kN;
$d = 3,00$ m; $F_4 = 1,2$ kN;
$e = 4,00$ m;

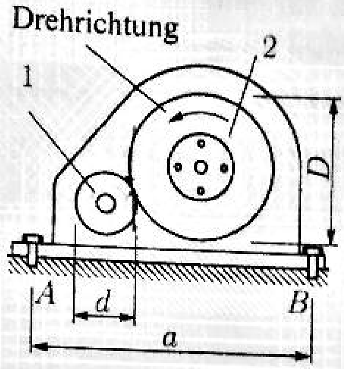


Lösung

$$A = 4,66\ kN; \quad B_H = 1,68\ kN; \quad B_V = 1,89\ kN$$

Aufgabe 2.14: (Kontrollieren)

An die Abtriebswelle 2 eines Zahnradgetriebes soll eine Arbeitsmaschine angeschlossen werden, zu deren Betrieb ein Moment M_2 erforderlich ist.



a) Wie groß ist das an der Antriebswelle 1 erforderliche Moment M_1?

b) Welche Kräfte treten an den Befestigungsschrauben A und B auf, wenn der Antriebsmotor

1) auf einem gesonderten Fundament steht?

2) am Getriebe angeflanscht ist?

Gegeben: M_2; a; d; D

Lösung

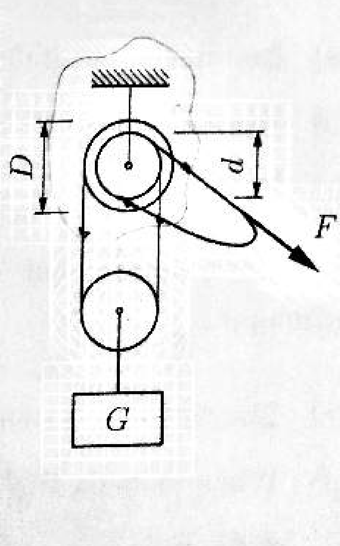
$$a)\ |\mathbf{M}_1| = \frac{d}{D}\,|\mathbf{M}_2|$$

- ?

$$b)\ i)\ |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = \frac{|\mathbf{M}_2|}{a}\left(1 + \frac{d}{D}\right); \quad ii)\ |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = \frac{|\mathbf{M}_2|}{a}$$

Aufgabe 2.15: (Kontrollieren, gleicher Fehler (Freimachen) wie 2.14)

Der skizzierte Differential-Flaschenzug besteht im Wesentlichen aus zwei fest miteinander verbundenen Rollen unterschiedlichen Durchmessers, über die in der gezeichneten Weise eine endlose Kette gelegt ist. Die Last hängt an einer einfachen Umlenkrolle.



Welche Kraft F ist erforderlich, um einer Last G das Gleichgewicht zu halten?

Gegeben: $G = 1$ kN; $D = 25$ cm; $d = 20$ cm

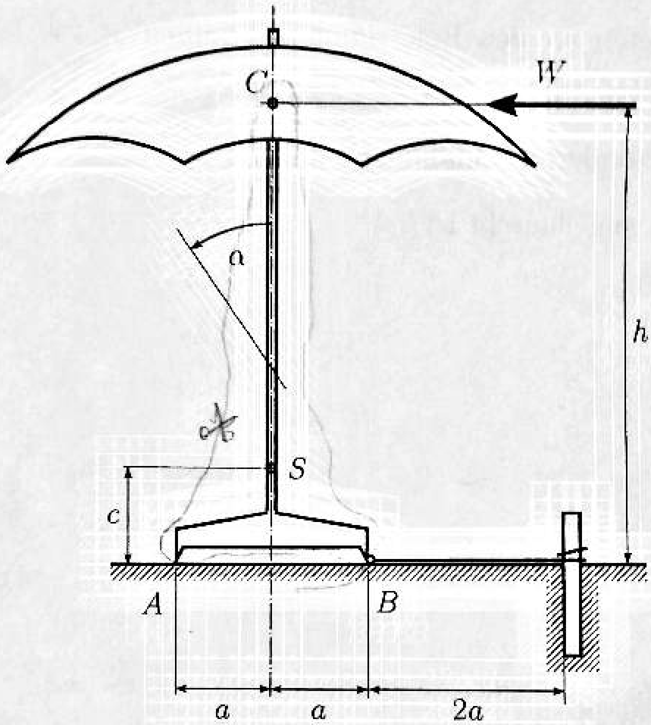
Lösung

$$F = 100N$$

Dm?

Aufgabe 2.16:

Ein auf einer glatten horizontalen Fläche stehender Sonnenschirm (Gewicht G, Angriffspunkt S) ist durch ein masseloses, horizontal gespanntes Seil an einen fest verankerten Pflock gebunden. Der Schirm wird durch eine aus Windeinwirkung resultierende Kraft W belastet, die im Systempunkt C angreift.



a) Bestimmen Sie grafisch und rechnerisch die Reaktionskräft in A und B.

b) Wie groß muss $W(G, h, a)$ sein, damit der Schirm den Grenzzustand zum Kippen erreicht?

Der Schirm beginne nun infolge der Windlasteinwirkung (Kraft W im Systempunkt C) aufzukippen.

c) Skizziere das System in einer aufgekippten Lage (zugehörige Verdrehung α).

d) Wie groß muss $W(G, h, a, \alpha)$ sein, damit der Schirm in der Kippstellung im Gleichgewicht ist?

Gegeben: W, G, h, a, c

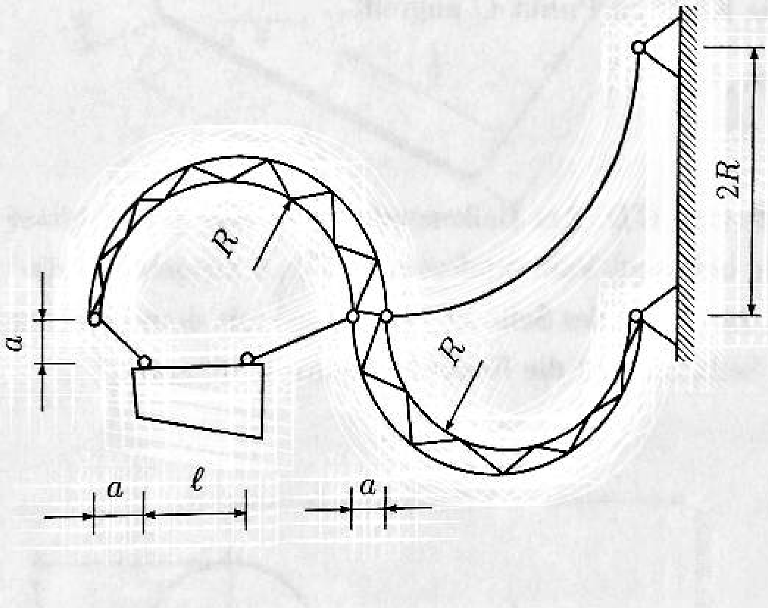
Aufgabe 2.17: ?

Das Namensschild von Herrn Schulze hat das Gewicht G.
Bestimmen Sie die Auflagereaktionen der beiden Wandlager, wenn das Gewicht der Stützkonstruktion nicht berücksichtigt wird.
Hinweis: Der Schwerpunkt liegt nicht in der Mitte zwischen den beiden Aufhängeösen!

Gegeben: a; $\ell = 3a$; $R = 3a$; G

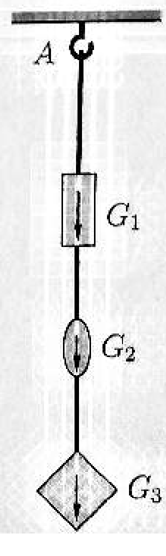
Lösung

$$B_h = -\frac{11}{6}G; \quad B_v = -\frac{5}{6}G; \quad A_h = A_v = \frac{11}{6}G;$$



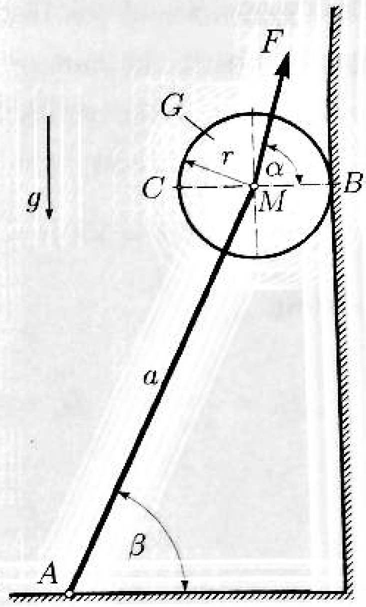
Aufgabe 2.18:

An einer am Haken A befestigten Schnur hängen drei Gewichte G_1, G_2 und G_3. Mit welcher Kraft F_A muss der Haken an der Schnur ziehen, damit die Schnur mitsamt den Gewichten im statischen Gleichgewicht ist? Versuche die Aufgabe auch grafisch (Skizze) zu lösen (Benutze dazu die dargestellten Kraftvektoren G_1, G_2 und G_3).



Aufgabe 2.19:

Ein im Punkt A gelenkig gelagerter masseloser Stab (Länge a) ist am oberen Ende mit dem Mittelpunkt M einer kreisrunden, homogenen Scheibe (Gewicht G, Radius r) verbunden. Die Scheibe stützt sich auf eine glatte vertikale Wand. Das System wird zusätzlich durch die Kraft F belastet.



a) Welche Rolle spielt es, ob die Verbindung Stab-Scheibe im Punkt M gelenkig oder fest ist, wenn einerseits die Kraft in M angreift, bzw. bei Verlagerung des Kraftangriffes in den Punkt C der Scheibe?

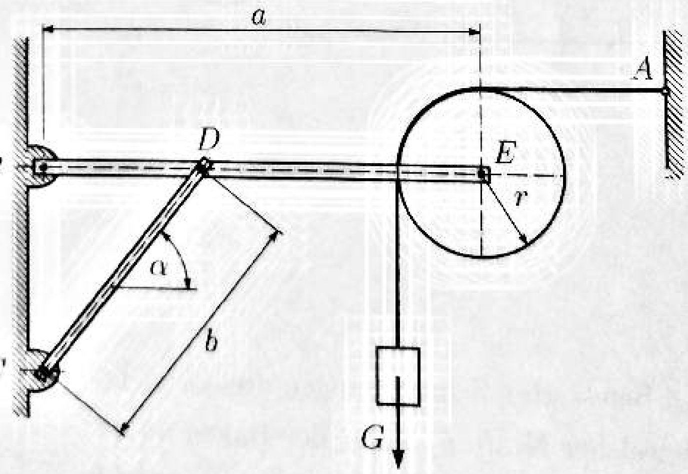
b) Bestimmen Sie mögliche Schnitt- und Lagerreaktionen des Systems, wenn die Kraft im Punkt M angreift.

c) Berechne mögliche Schnitt- und Lagerreaktionen des Systems, wenn die Kraft im Punkt C angreift.

Gegeben: G, F, α, β

Aufgabe 2.20:

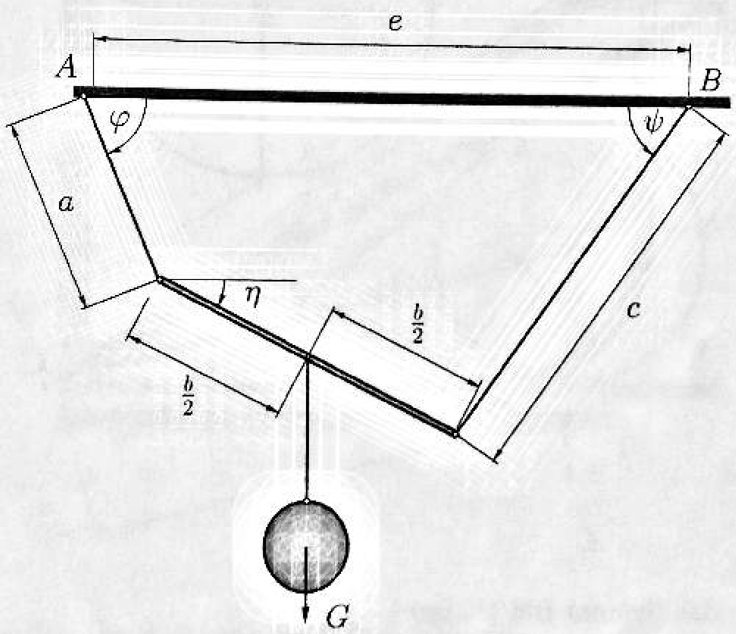
Balken BE, Pendelstütze CD. Am Balkenende E ist eine gewichtslose Rolle (Radius r) reibungsfrei gelenkig befestigt. Vom ortsfesten Punkt A ausgehend führt ein gewichtsloses Seil über die Rolle. Am Ende des Seils ist eine Masse mit dem Gewicht G befestigt. Bestimmen Sie die Seilkraft und die Reaktionskräfte in B und C.



Aufgabe 2.21:

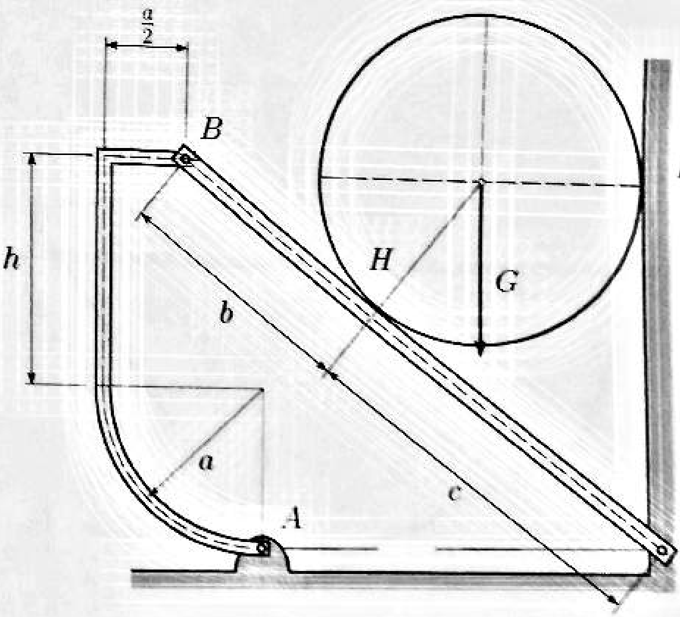
Eine gewichtslose dünne Stange ist mit zwei Schnüren in den ortsfesten Punkten A und B aufgehängt. In der Mitte der Stange ist das Gewicht G befestigt. Stelle notwendige Gleichgewichtsbedingungen (Gleichungen) auf, um die Winkel φ, ψ und η und die beiden Seilkräfte A und B zu bestimmen, die sich bei statischem Gleichgewicht des Systems einstellen.

Gegeben: G, a, b, c, e



Aufgabe 2.22:

Der gewichtslose Dreigelenkbogen ABC wird im Punkt H durch einen Zylinder (Eigengewicht G) belastet, der an dieser Stelle frei am Balken BC aufliegt und im Punkt D von einer vertikalen Wand gestützt wird.



a) Schneiden Sie das System frei (Skizze).

b) Bestimmen Sie grafisch die Reaktionskräfte in den Punkten A, B, C, D und H.

c) Berechnen Sie die Reaktionskräfte in den Punkten A, B, C, D und H.

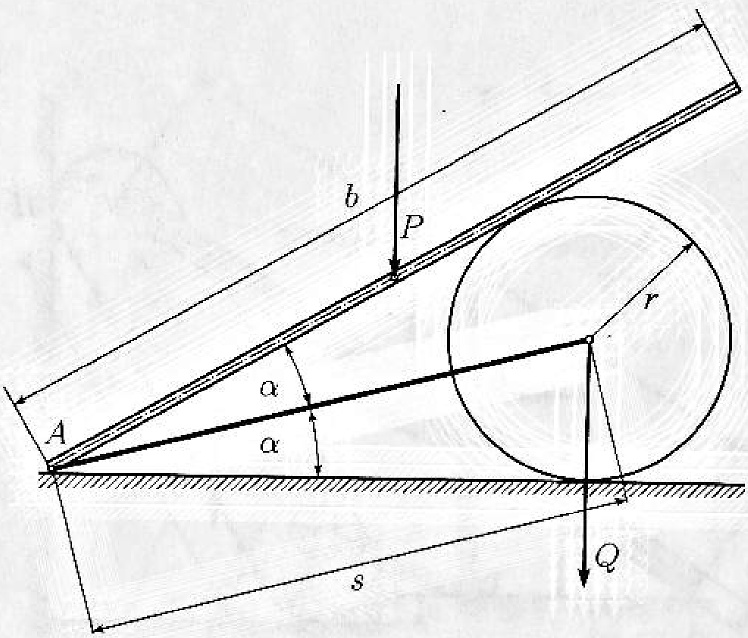
Gegeben: G und die in der Darstellung eingezeichneten Systemmaße

Lösung

$$C_x = B \sin\beta + H \sin\alpha$$

Aufgabe 2.23:

Eine Stange (Gewicht P im Stangenmittelpunkt, Stangendicke vernachlässigbar) stützt sich auf eine zylindrische Rolle vom Radius R und Gewicht Q, die auf dem horizontalen Boden liegt. Der Mittelpunkt des Zylinders ist über ein gewichtsloses Seil der Länge s mit dem auf dem Boden liegenden Ende A der Stange verbunden. Die Kontaktstellen an der Rolle und der Kontakt im Punkt A sind reibungsfrei.



a) Schneiden Sie Stange, Seil und Rolle frei (Skizze).

b) Bestimmen Sie grafisch die Reaktionskräfte an den Kontaktstellen und die Seilkraft.

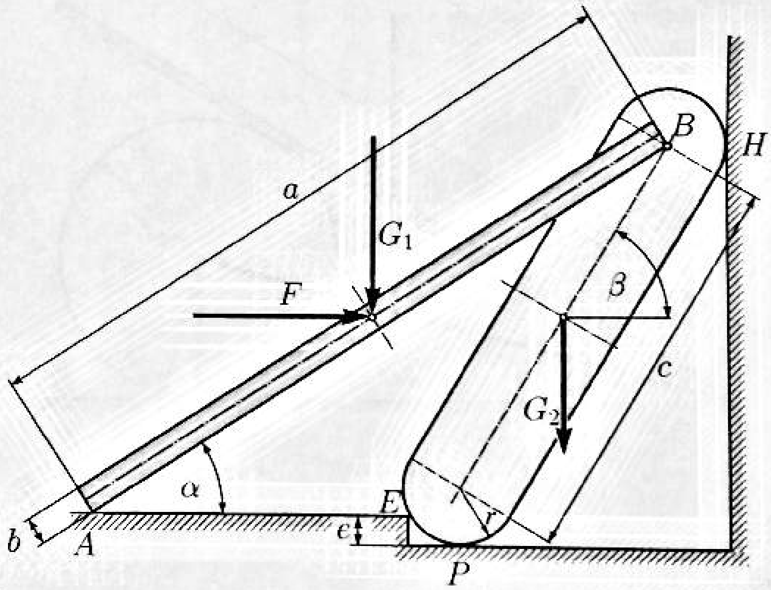
c) Berechnen Sie die Reaktionskräfte an den Kontaktstellen und die Seilkraft.

Lösung

$$B = Q + P\frac{b}{2s}\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

Aufgabe 2.24:

Ein homogener Quader AB ist in B gelenkig mit einem an den Enden kreisförmig abgerundeten, homogenen Balken verbunden, der in H an einer vertikalen Wand, an der ortsfesten Kante E und auf der horizontalen Unterlage (P) gelagert ist.
Im Quadermittelpunkt wirkt das Eigengewicht G_1 des Quaders und eine horizontale Kraft F. Der Balken wird durch sein Eigengewicht G_2 belastet. Sämtliche Kontaktstellen sind reibungsfrei (glatt).



a) Schneiden Sie das System frei (Skizze).

b) Bestimmen Sie grafisch die Reaktionskräfte an den Stützstellen A, E, P und H und im Gelenk B.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Reaktionskräfte an den Stützstellen A, E, P und H und im Gelenk B

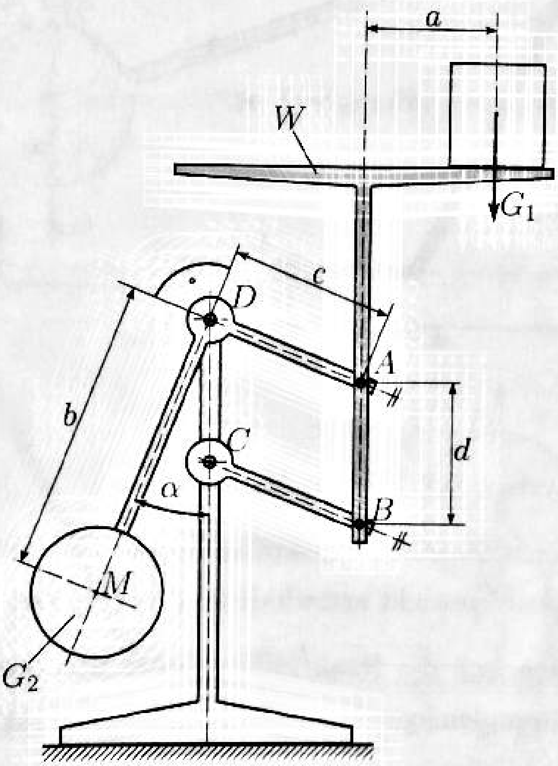
Gegeben: G_1, F, G_2 und die in der Darstellung eingezeichneten Systemmaße

Lösung

$$P = G_2 + B_y - E\sin\gamma; \qquad \sin\gamma = \frac{r-e}{r}$$

Aufgabe 2.25:

Die dargestellte altmodische Briefwaage besteht aus dem Wägeteller W, einem im D gelenkig gelagerten rechtwinkelig geformten Balken MDA und einem zum Balkenteil DA parallel geführten Stab CB. Die Anordnung ist in C und D mit einem ortsfesten Stativ verbunden. Am Balkenende ist eine zylindrische Masse (Gewicht G_2, Angriffspunkt M) befestigt. Der Wägeteller ist mit dem Gewicht G_1 (exzentrisch im Abstand a zur Tellerachse) belastet.



a) Schneiden Sie Wägeteller, Balken MDA (inklusive Zylinder) und Stab CB frei (Skizze).

b) Berechnen Sie die Reaktionskräfte in A, B, C und D und bestimmen Sie den Winkel α für die Gleichgewichtslage des Systems Wägeteller, Balken MDA (inklusive Zylinder) und Stab CB.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Reaktionskräfte in den Gelenken und die Auslenkung α, wenn das Gewicht G_1 zentrisch ($a = 0$) angreift.

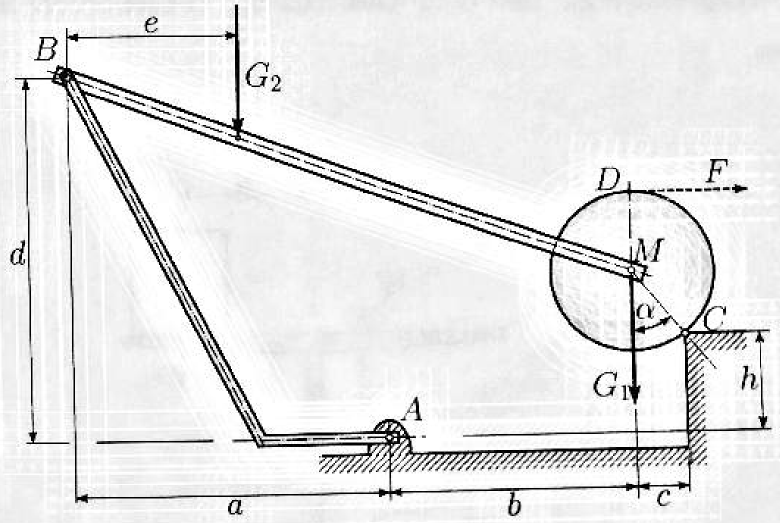
Gegeben: G_1, G_2 und die dargestellten Systemabmessungen

Lösung

$$\cot\alpha = \frac{G_2 b}{G_1 c}$$

Aufgabe 2.26:

Bei dem dargestellten Mechanismus ist der Zylinder CMD gelenkig mit der ortsfesten Kante C verbunden.



a) Schneiden Sie das System frei (Skizze, Kräfte).

b) Bestimmen Sie grafisch die Reaktionskräfte in den Gelenken A, B, M und C und den für das Systemgleichgewicht erforderlichen Betrag der Kraft F.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Reaktionskräfte in den Gelenken A, B, M und C und den für das Systemgleichgewicht erforderlichen Betrag der Kraft F.

Gegeben: G_1, G_2, α und die dargestellten Systemabmessungen. Richtung und Angriffspunkt D der strichliert dargestellten Kraft F.

Lösung

$$F = \frac{c}{h_F}\left(M_x \cdot \cot\alpha + M_y + G_1\right)$$

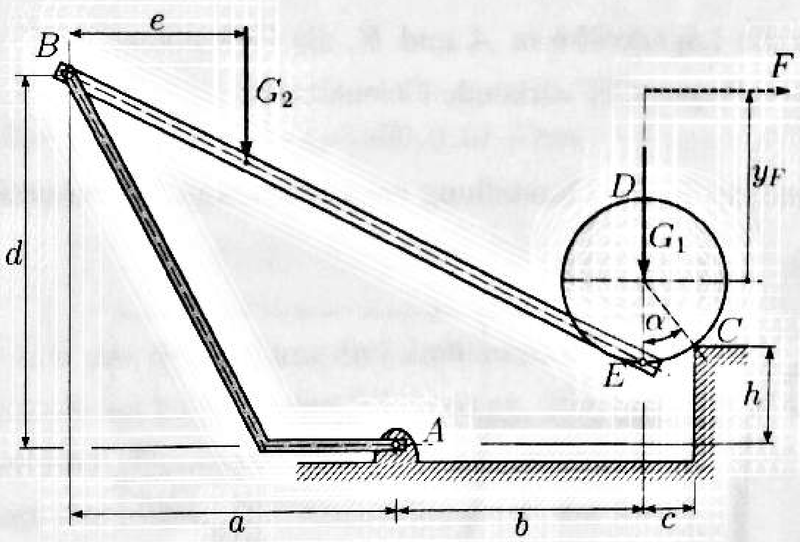
Aufgabe 2.27:

Die gelenkige Verbindung von Balken und Zylinder in M soll nun durch eine gelenkige Verbindung der beiden Systemteile in E ersetzt werden. Weiters soll das Gelenk an der Kante C durch eine reibungsfreie Stützung des Zylinders an der Kante C ersetzt werden.

a) Schneiden Sie das System frei (Skizze, Kräfte).

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Reaktionskräfte in den Gelenken A, B und E, den für das Gleichgewicht erforderlichen Betrag der Kraft F mit der zugehörigen Lage y_F und die Stützkraft in C.

Gegeben: G_1, G_2, α und die dargestellten Systemabmessungen, sowie die Richtung der strichliert dargestellten Kraft F.



Lösung

$$F = E_x + (G_1 + E_y)\tan\alpha$$

Aufgabe 2.28:

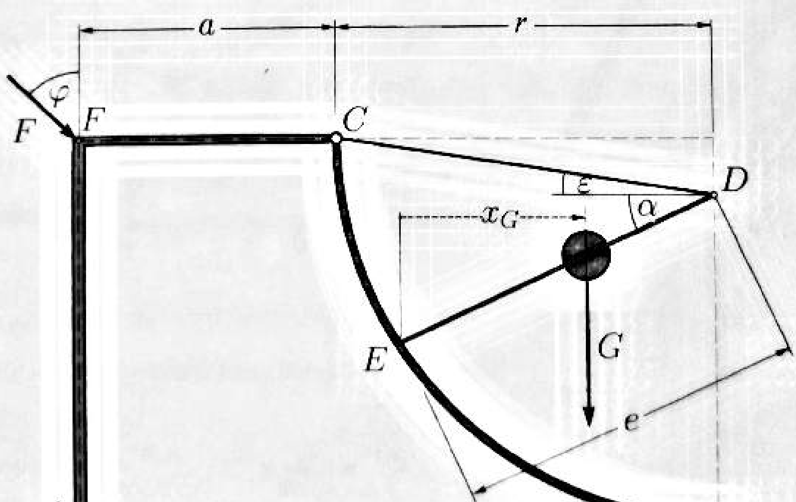
Der gewichtslose Dreigelenkbogen ACB setzt sich aus dem Winkel AFC und dem Viertelkreisbogen CB zusammen. Er wird im Punkt F durch die Kraft F belastet. Im Bogenpunkt E stützt sich eine gewichtslose Stange (ED) ab (reibungsfreier Kontakt), an der längsverschieblich ein feststellbares Gewicht (G) angebracht ist. Die Stange wird in D durch das masselose Seil CD gehalten.

a) Schneiden Sie zunächst die Stange ED frei (Skizze) und bestimmen Sie rechnerisch den Abstand x_G, die Stützkraft in E und die Seilkraft für die das Teilsystem CDE im statischen Gleichgewicht ist.

b) Schneiden Sie die Anordnung in A, C und B frei (Skizze). Betrachten Sie dabei Bogen, Seil, Stange und Gewicht G zusammen als einen Systemteil (Scheibe). (Erstarrungsprinzip)

c) Berechnen Sie die Lagerkräfte in A und B, die Gelenkkraft in C am Teil AC und die in C auf den Bogen CB wirkende Gelenkkraft.

Gegeben: F, G und die in der Darstellung eingezeichneten Systemmaße



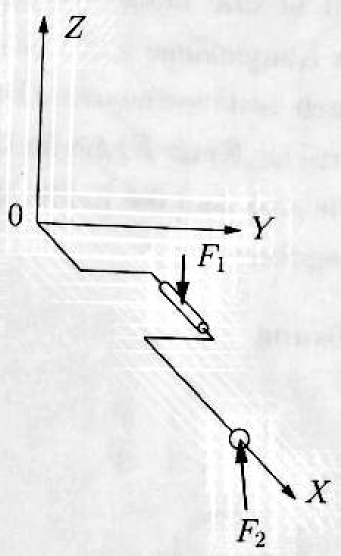
Lösung

$$C_{CB_y} = C_y + S \sin \varepsilon$$

2.2 Raumkraftsysteme

Aufgabe 2.29:

Eine Bohrleier wird in x-Richtung rechtwinklig zu einer Wand (yz-Ebene) angesetzt. An der Leier greifen die eingezeichneten Kräfte $\mathbf{F}_1 = (0, 0, -100)$ N und $\mathbf{F}_2 = (-100, 0, 40)$ N an. Die Angriffspunkte werden durch die Ortsvektoren $\mathbf{r}_1 = (12, 10, 0)$ cm und $\mathbf{r}_2 = (30, 0, 0)$ cm bestimmt.
Berechnen Sie die Kraft $\mathbf{F}$ und das Moment $\mathbf{M}_0$, dass der Bohrer an der Bohrstelle 0 auf die Wand ausübt, d.h. den äquivalenten Kraftwinder bezogen auf den Punkt 0.



Gegeben: F_1; F_2; r_1; r_2

Lösung

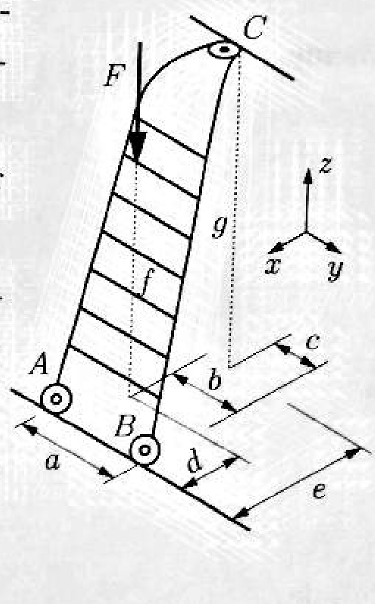
$$\mathbf{F} = (-100, 0, -60)\ N; \quad \mathbf{M}_0 = (-1000, 0, 0)\ Ncm$$

Aufgabe 2.30:

Eine Leiter stützt sich mit den reibungsfrei drehbaren Rädern A, B, C auf zwei parallelen horizontalen Schienen ab. Das Rad C kann nur horizontale Kräfte aufnehmen. Auf der Leiter steht seitlich übergebeugt ein Mann. Die Resultierende $\mathbf{F}$ der Gesamtbelastung (Mann und Leiter) möge den in der Skizze angegebenen Angriffspunkt haben und betrage 1000 N.

a) Bestimmen Sie die Komponenten und die Beträge der Reaktionskräfte $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$, $\mathbf{F}_C$.

b) Wie weit darf der Angriffspunkt der Kraft $\mathbf{F}$ in der y-Richtung verschoben werden, ohne dass die Leiter umfällt?



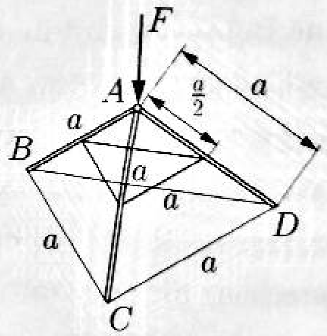
Gegeben: $a = 1,0$ m; $b = 0,4$ m; $c = 0,5$ m; $d = 0,6$ m; $e = 1,5$ m; $f = 2,0$ m; $g = 3,0$ m; $F = 1000$ N

Lösung

a) $F_A = 412\ N; \quad F_B = 608\ N; \quad F_C = 200\ N$

Aufgabe 2.31:

Das gezeichnete Dreibein besteht aus drei gewichtslosen Stäben der Länge a, die bei A gelenkig miteinander verbunden sind, und die sich bei B, C und D reibungsfrei abstützen. B, C und D sind die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge a Die Mitten der drei Stäbe sind wie skizziert durch Seile verbunden. Belastet wird das System durch die vertikale Kraft F, die im Gelenk A angreift.
Wie groß sind die Kräfte in den 3 Seilen?



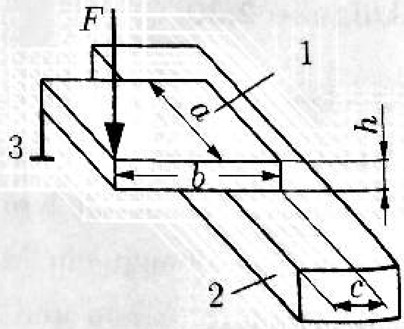
Gegeben: a; F

Lösung

$$S = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{F}{3}$$

Aufgabe 2.32:

Ein Stein 1 (Quader) liegt wie skizziert auf einem zweiten Stein 2 und ist an einer Ecke durch den Pfahl 3 zusätzlich gestützt. Mit welcher Kraft F darf man auf die nichtunterstützte Ecke des homogenen Steines 1 (Eigengewicht G) drücken, ohne dass er kippt?



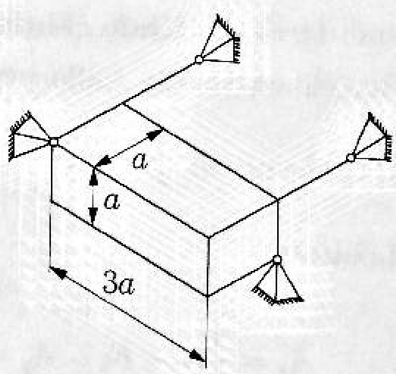
Gegeben: a; b; c; h; G

Lösung

$$F = \frac{c \cdot G}{2(b - c)}$$

Aufgabe 2.33:

Ein homogener Quader mit den Kantenlängen a, a und $3a$ und dem Gewicht G wird durch ein Festlager A und durch die Stäbe 1 und 3 am Untergrund verankert.
Welche Stabkräfte S_1 bis S_3 erzeugen das Gewicht G (Stäbe gewichtslos) ?



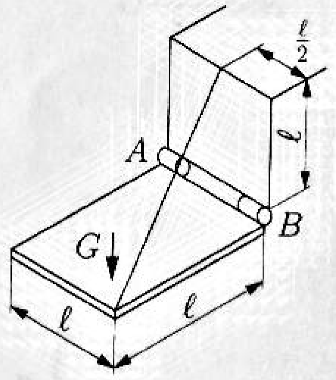
Gegeben: a; G

Lösung

$$S_2 = \frac{G}{2}; \quad S_3 = -\frac{3}{2}G$$

Aufgabe 2.34:

Ein quadratischer Deckel (Gewicht G) einer Kiste wird durch zwei Scharniere A und B sowie durch einen Faden wie skizziert in horizontaler Lage gehalten.
Wie groß ist die Fadenkraft F?



Gegeben: G; ℓ

Lösung

$$F = \frac{3}{4}G$$

Aufgabe 2.35:

Das skizzierte räumliche Tragwerk wird durch das Gewicht der Platte mit der Masse m und durch die Kraft F belastet.
Berechnen Sie die Auflagerreaktionen in A, B, C und die Stabkraft S?

Gegeben: m; g; F; a

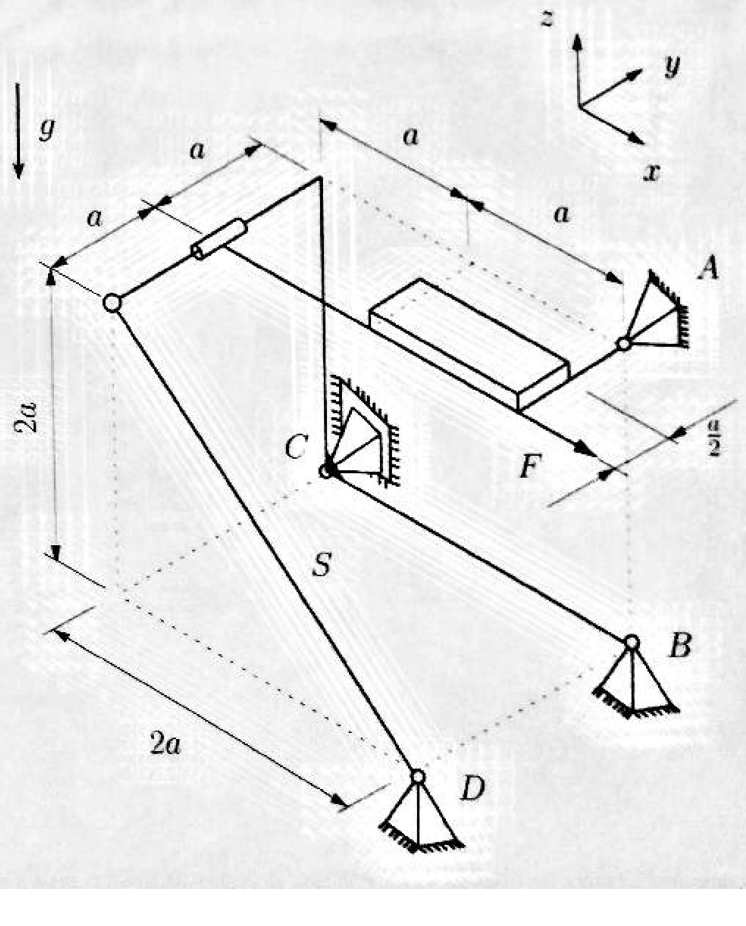
Lösung

$$A_x = \frac{1}{4}G - F; \quad A_y = 0; \quad A_z = \frac{3}{4}G$$

$$B_x = \frac{1}{8}G; \quad B_y = \frac{3}{8}G - \frac{1}{2}F; \quad B_z = -\frac{1}{8}G$$

$$C_x = 0; \quad C_y = \frac{1}{2}F - \frac{3}{8}G; \quad C_z = 0$$

$$S = \frac{3\sqrt{2}}{8}G$$



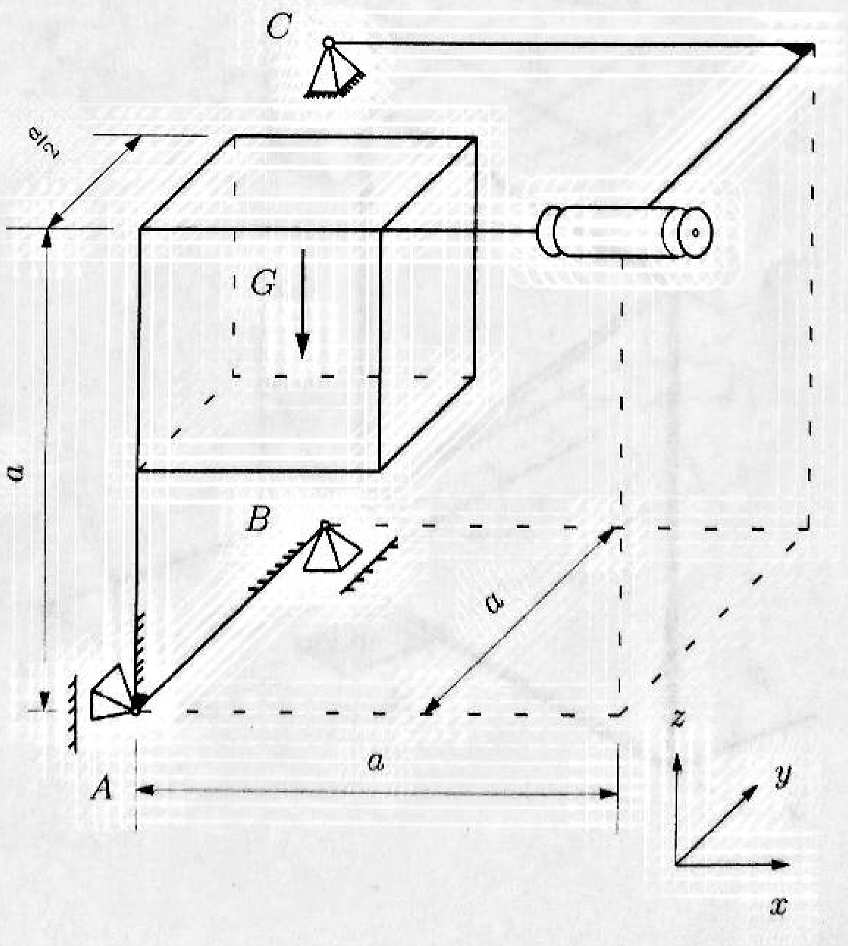
Aufgabe 2.36:

Das dargestellte räumliche Tragwerk wird durch die Gewichtskraft G und durch die Einzelkräfte F_x und F_y belastet. Bestimmen Sie die Auflagekräfte in A, B, C.

Gegeben: a; G; F_x; F_y

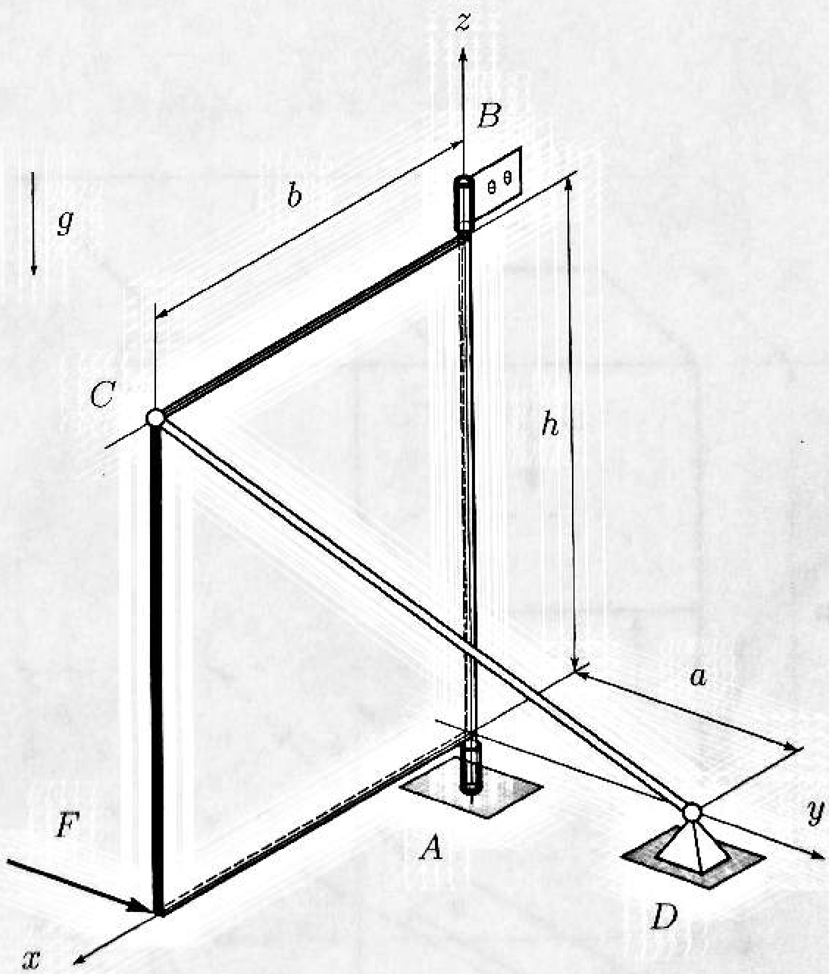
Lösung

$$A_x = -F_y; \quad A_y = -\frac{3}{4}G; \quad B_x = \frac{1}{4}G + F_y; \quad B_z = G; \quad C_z = 0$$



Aufgabe 2.37:

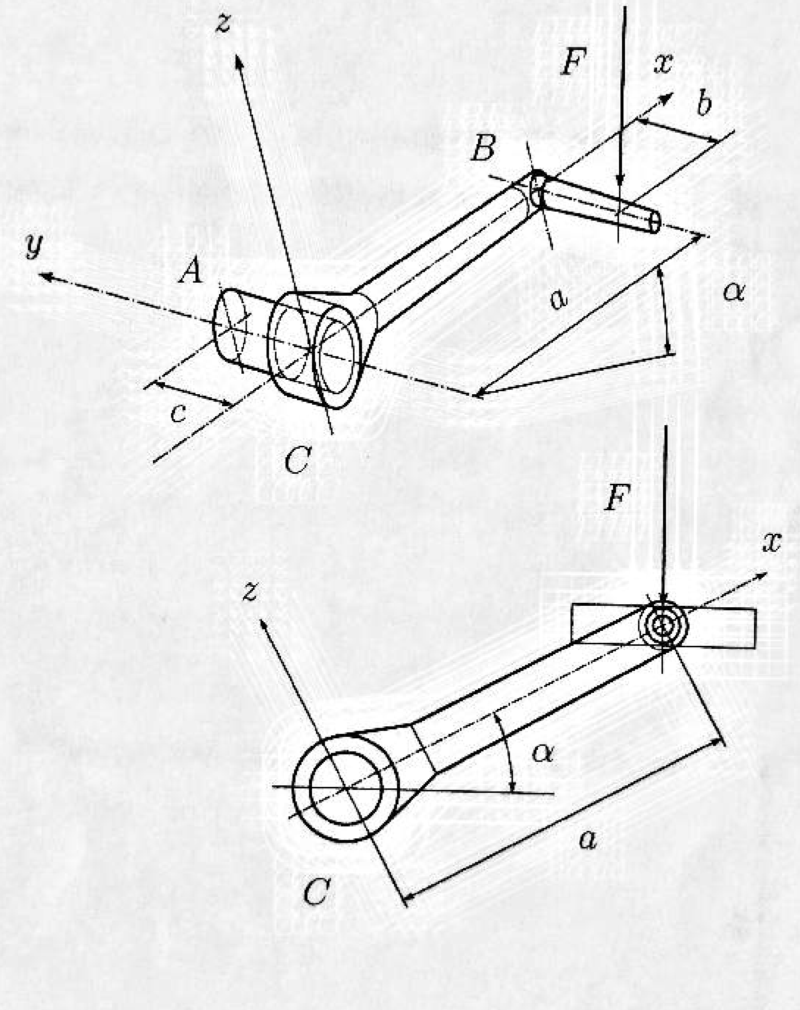
Eine in A und B gelagerte, homogene Tür (Gewicht G) soll durch einen gewichtslosen Stab CD gesichert werden. Das Lager B kann nur horizontale Kräfte aufnehmen, während A auch Vertikalkräfte übertragen kann. An den Gelenken C und D sollen keine Momente übertragen werden. Die Tür werde nun durch eine Kraft F in y-Richtung belastet.
Berechnen Sie die Komponenten der Lagerkräfte in A, B und C. Wie groß darf F höchstens sein, damit die Tür nicht angehoben wird?



Aufgabe 2.38:

Tretkurbel CB (um α zur Horizontalebene geneigt), Tretachsenstück AC, Vertikale Last F auf die Pedalachse wirkend.

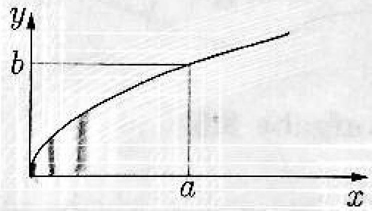
Gesucht: Schnittlasten an der Kurbel in C und B und an einer beliebigen Stelle x der Tretkurbel.



3 Schwerpunkt

Aufgabe 3.1:

Suchen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes eines halben Parabelsegments und des Schwerpunktes seiner Ergänzung zum Rechteck.

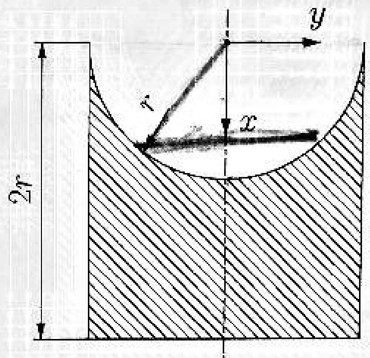


Lösung

$$x_{sl} = \frac{3}{5}a; \quad y_{sl} = \frac{3}{8}b$$

Aufgabe 3.2:

Bestimmen Sie den Schwerpunkt der nebenstehenden schraffierten Fläche mit $r = 10$ m.



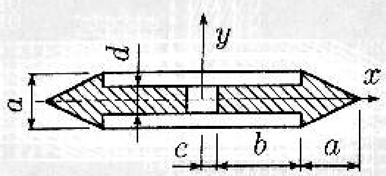
Lösung

$$x_s = 13,72\ m$$

Aufgabe 3.3:

Ermitteln Sie das Volumen des dargestellten homogenen Ringkörpers, der durch Rotation der schraffierten Fläche um die y-Achse erzeugt wird.

Gegeben: $a = 9$ cm; $b = 6$ cm; $c = 4$ cm; $d = 5$ cm

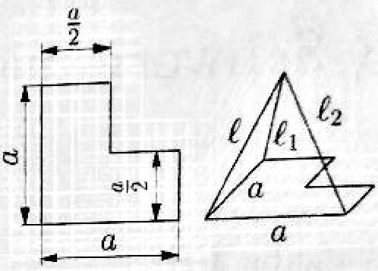


Lösung

$$V = 4628\ cm^3$$

Aufgabe 3.4:

Eine Blechplatte (siehe linkes Bild), die die Form eines Quadrates hat, aus dem ein Quadrat herausgeschnitten wurde, soll an drei Seiten so aufgehängt werden, dass sie waagerecht hängt. Welche Längen ℓ_1 und ℓ_2 müssen die beiden rechten Tragseile haben?



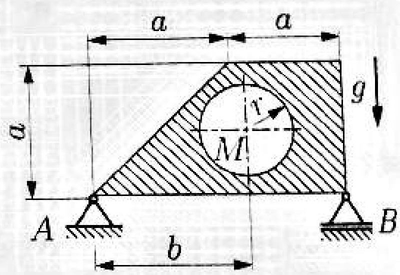
Gegeben: ℓ; a

Lösung

$$\ell_1 = \ell_2 = \sqrt{\ell^2 + \frac{a^2}{6}}$$

Aufgabe 3.5:

Die dargestellte Scheibe konstanter Dicke aus homogenem Material ist durch ihre Gewichtskraft belastet.
Wie groß ist der Abstand b vom Auflager A zum Mittelpunkt M des herausgeschnittenen Kreises zu wählen, damit die Auflager A und B gleich belastet sind?



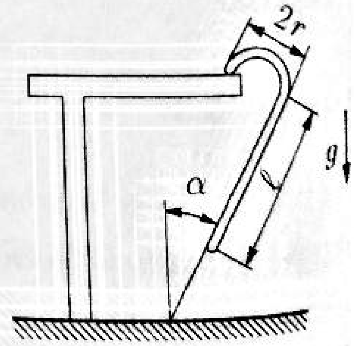
Gegeben: a; r

Lösung

$$b = a\left(1 + \frac{a^2}{3\pi r^2}\right)$$

Aufgabe 3.6:

Ein Gehstock wird an einen Tisch gehängt.
Welcher Winkel α stellt sich ein?

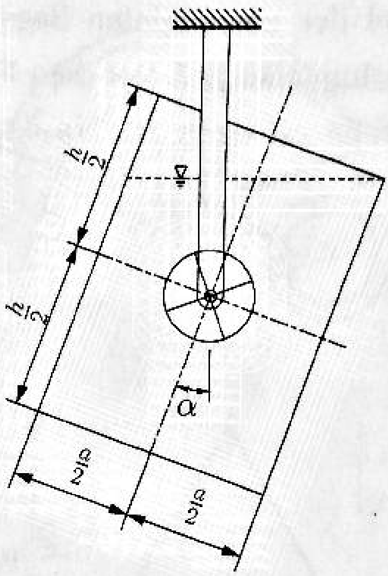


Gegeben: ℓ; r; $\frac{\ell}{r} = 10$

Lösung

$$\tan\alpha = \frac{5}{12} + \frac{\pi}{48}$$

Aufgabe 3.7:

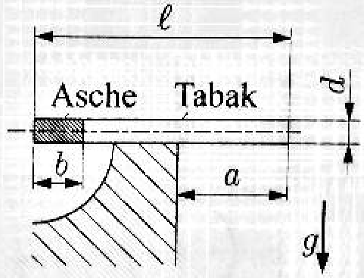


Ein mit Wasser (spezif. Gewicht γ_w) gefüllter Behälter mit quadratischer Bodenfläche (Breite a, Tiefe a) und der Höhe h ist in der Schwerachse des leeren Behälters reibungsfrei drehbar gelagert. Der Behälter wird um den Winkel α geneigt, und es stellt sich der skizzierte Wasserspiegel ein.
Welches Moment muss an der Achse aufgebracht werden, um den Behälter in dieser Stellung zu halten?
Gegeben: $a = 1$ m; $h = 1,5$ m; $\alpha = 30°$; $\gamma_w = 10\ kN/m^3$

Lösung

$$M = 388\ Nm$$

Aufgabe 3.8:



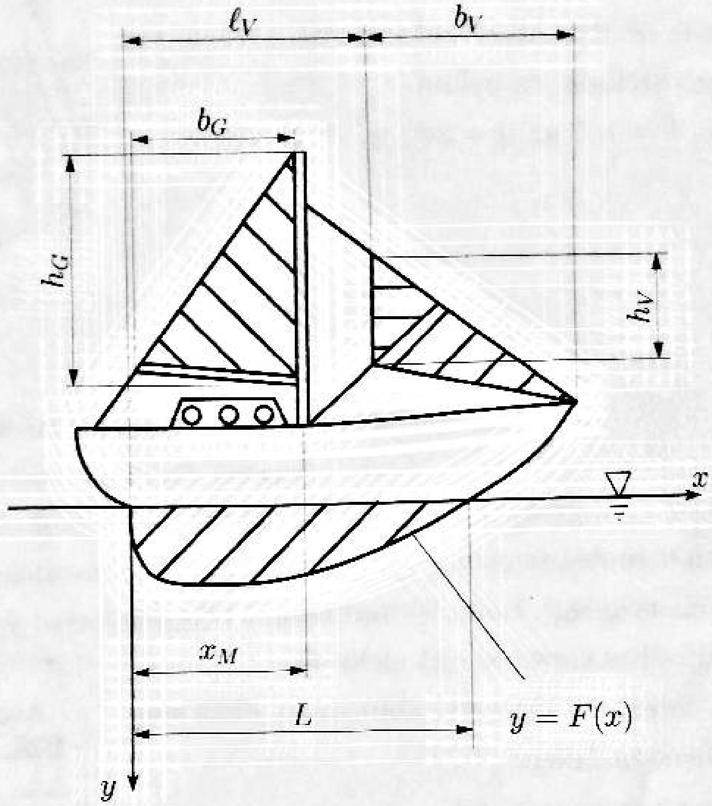
Eine filterlose Zigarette (Länge ℓ; Durchmesser d, spezifisches Gewicht γ_T) wird nach dem Anbrennen, wie dargestellt, auf den Rand eines Aschenbechers gelegt. Beim Weiterbrennen fällt die Asche (Länge b, spezifisches Gewicht γ_A) nicht ab.
Bis zu welcher Länge b darf die Zigarette abbrennen, ohne vom Rand des Aschenbechers zu fallen?
Gegeben: ℓ; d; a; γ_T; γ_A; $\gamma_A < \gamma_T$; g

Lösung

$$b = \ell - a - \sqrt{(\ell - a)^2 - (\ell - 2a)\frac{\gamma_T \cdot \ell}{\gamma_T - \gamma_A}}$$

Aufgabe 3.9:

Bei der abgebildeten Segelyacht soll der Flächenschwerpunkt der Segel 10% der Wasserlinienlänge L vor dem Flächenschwerpunkt des Unterwasserschiffes liegen. An welcher Stelle x_M muss der Mast aufgestellt werden?



Gegeben: $F(x) = \sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{L}}$; L; ℓ_v; h_v; h_G; b_v; b_G

Lösung

$$x_M = \frac{\frac{1}{2}L\left(b_v h_v + b_G h_G\right) - \left(\ell_v + \frac{b_v}{3}\right) b_v h_v}{h_G b_G} + \frac{1}{3} b_G$$

Aufgabe 3.10:

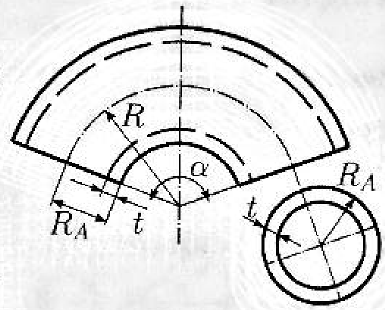
Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Kreiskegelmantels. Der Kegel habe die Höhe H und den halben Öffnungswinkel α.

Lösung

$$z_S = \frac{1}{3} H$$

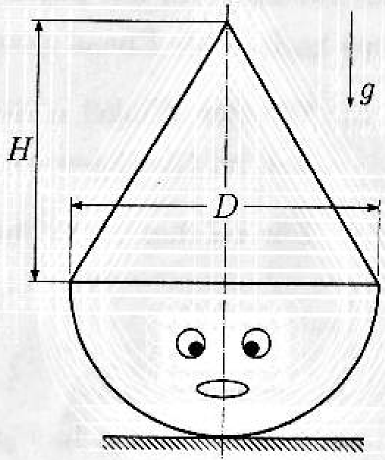
Aufgabe 3.11:

Von einem Rohrkrümmer soll die Lage des Schwerpunktes bestimmt werden.



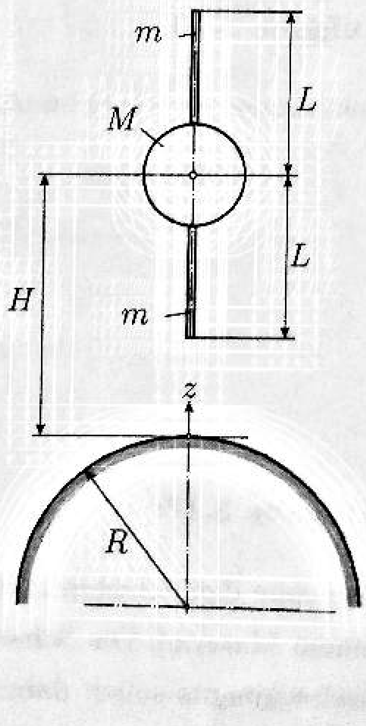
Gegeben sind die dargestellten Abmessungen Krümmungsradius R, Rohrdurchmesser $2R_A$ und Wandstärke t, sowie der Umlenkwinkel α.

Aufgabe 3.12:



Ein Stehaufmännchen aus homogenem Werkstoff soll sich noch aufrichten können, wenn sich seine Symmetrieachse in einer horizontalen Lage befindet. Wie groß darf die Höhe H bei einem Durchmesser D höchstens sein, damit dies möglich ist?

Aufgabe 3.13:



Ein Satellit bestehe aus einer kompakten Kapsel der Masse M und zwei stabförmigen Auslegern mit homogener Verteilung der Massen m. Das Gesetz für die Schwerebeschleunigung ist $g = g_0 R^2/(R+z)^2$.

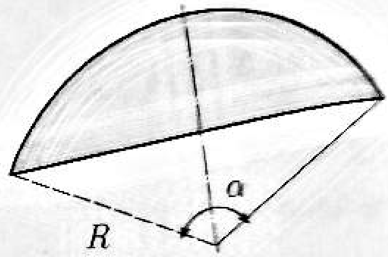
Bestimmen Sie für die skizzierte Lage des Satelliten den Abstand des Schwerkraftangriffspunktes vom Massenmittelpunkt.

Zahlenwerte:

Satellitendaten:	M	=	100	kg
	m	=	10	kg
	L	=	50	m
Höhe:	H	=	500	km
Erdradius:	R	=	6370	km
	g_0	=	9.81	m/s^2

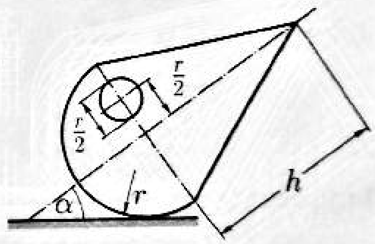
Aufgabe 3.14:

Bestimmen Sie den Schwerpunkt des dargestellten Kreissegments.



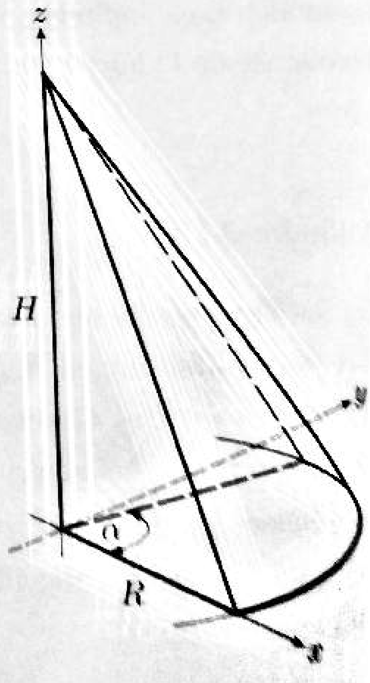
Aufgabe 3.15:

Eine homogene Scheibe konstanter Dicke der nebenstehend gezeichneten Form hat eine Bohrung vom Radius $r/4$ und ist auf eine horizontale Ebene gesetzt.



a) Welcher Winkel α der Achse gegen die Unterlage stellt sich im Gleichgewichtszustand ein?

b) Für welches Verhältnis h/r ist $\alpha \geq 0$?

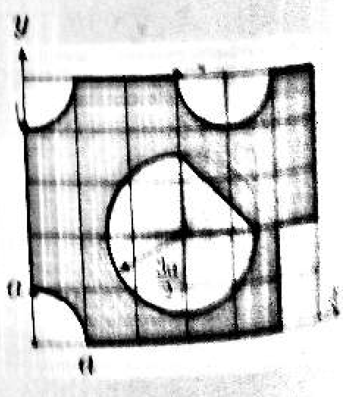


Aufgabe 3.16:

Bestimmen Sie die Schwerpunktslage des Kegelausschnittes.

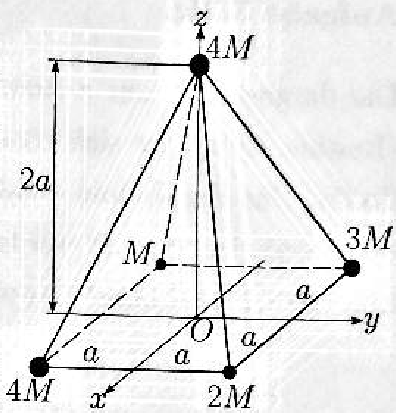
Aufgabe 3.17:

Berechne den Schwerpunkt der abgebildeten Platte aus homogenem Material. Die Schwerpunkte der Kreissektoren und des Kreissegments sollen dabei mittels Integration bestimmt werden.



Aufgabe 3.18:

Fünf Massenpunkte sind durch massenlose Stäbe zu einer pyramidenförmigen Konstruktion mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge $2a$) und der Höhe $2a$ zusammengefügt.



a) Bestimmen Sie die Koordinaten x_s, y_s, z_s des Schwerpunktes der Konstruktion.

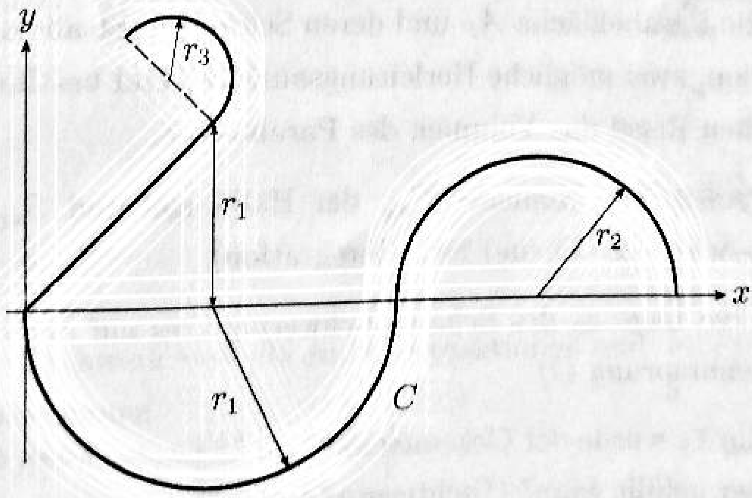
b) In welchem Punkt muss eine Zusatzmasse $3M$ angebracht werden, damit der Schwerpunkt im Punkt $(0, 0, \frac{a}{2})$ liegt?

Lösung

$$x_{Zusatz} = a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

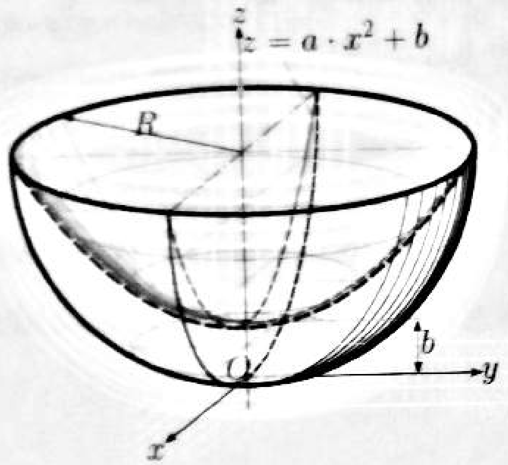
Aufgabe 3.19:

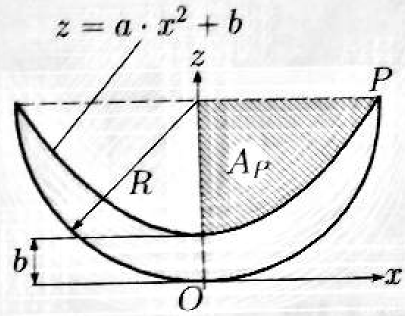
Eine Kurve C ist aus drei Halbkreisbögen mit den Radien r_1, r_2 und r_3 und einem Geradenstück zusammengesetzt. Berechne die x, y-Koordinaten des Linienschwerpunktes. Bestimmen Sie dazu die Schwerpunkte der Kreisbögen mittels Integration.



Aufgabe 3.20:

Die dargestellte, zur z-Achse rotationssymmetrische Schale besteht aus einer Halbkugel (Radius R) in der sich eine Ausnehmung von der Form eines Rotationsparaboloids befindet. Das Paraboloid entsteht durch Drehung um die z-Achse der von der z-Achse und der Parabel $z = a \cdot x^2 + b$ begrenzten Fläche. Der Abstand des Paraboloid-Scheitels vom untersten Kugelpunkt (Koordinatenursprung) ist mit $b = R/4$ festgelegt.





a) Bestimmen Sie mit Hilfe der 2. Guldinschen Regel das Volumen der Halbkugel.

b) Bestimmen Sie den Parameter a in der Parabelgleichung so, dass Parabel und Kreis (Schnitt: Paraboloid- bzw. Kreisoberfläche mit x-z Ebene) im Punkt P zusammenfallen.

c) Berechnen Sie die Parabelfläche A_P und deren Schwerpunktsabstand x_{A_P} von der z-Achse (Integration, zwei mögliche Herleitungsansätze) und bestimmen Sie mit Hilfe der 2. Guldinschen Regel das Volumen des Paraboloids.

d) Leiten Sie die statischen Momente S_{x_K} der Halbkugel und S_{x_P} des Paraboloids bezüglich der x-Achse (xy-Ebene) her. (Integration)

e) Bestimmen Sie die Lage z_S des Schalen-Schwerpunktes auf der z-Achse. (Abstand vom Koordinatenursprung O)

f) An welcher Stelle $\overline{z}_S$ würde der Gesamtschwerpunkt liegen, wenn die Schale bis zum Rand mit Wasser gefüllt wäre? (Dichteverhältnis: $\rho_{\text{Wasser}}/\rho_{\text{Schale}} = 1/2$)

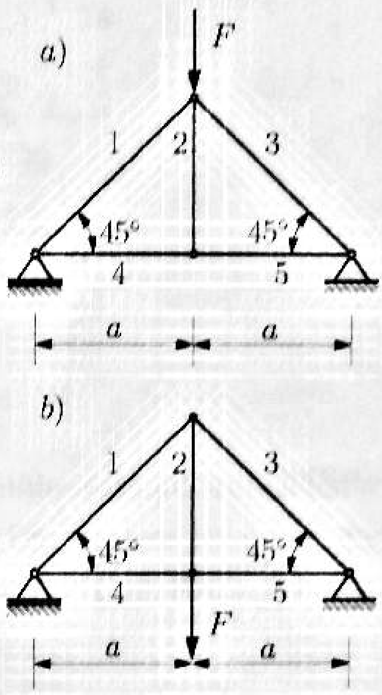
Lösung

e) $z_S = \dfrac{13}{28}R$

4 Fachwerke

4.1 Ebene Fachwerke

Aufgabe 4.1:



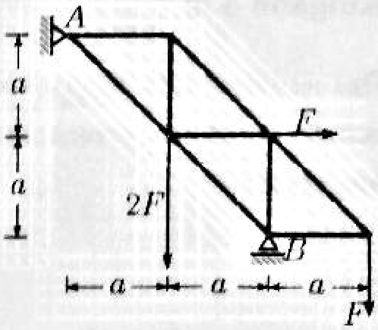
Berechnen Sie für das gezeichnete Fachwerk unter den Belastungsfällen (a) und (b) jeweils die Stabkräfte S_2 und S_5.
Gegeben: F; a

Lösung

a) $S_5 = \frac{1}{2}F; \quad S_2 = 0$

b) $S_5 = \frac{1}{2}F; \quad S_2 = F$

Aufgabe 4.2:

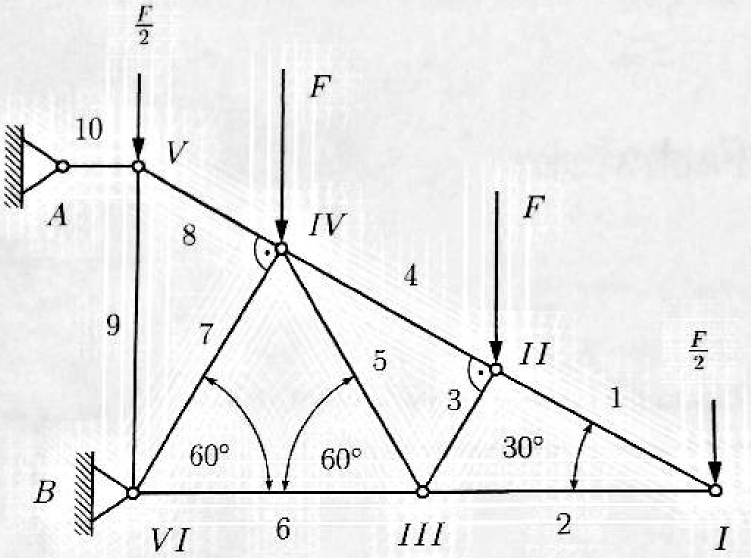


Für das dargestellte Fachwerk sind die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte zu bestimmen.

Aufgabe 4.3:

Berechnen Sie die Stabkräfte und Auflagerkräfte des angegebenen Pultdaches.

Gegeben: $F = 3$ kN

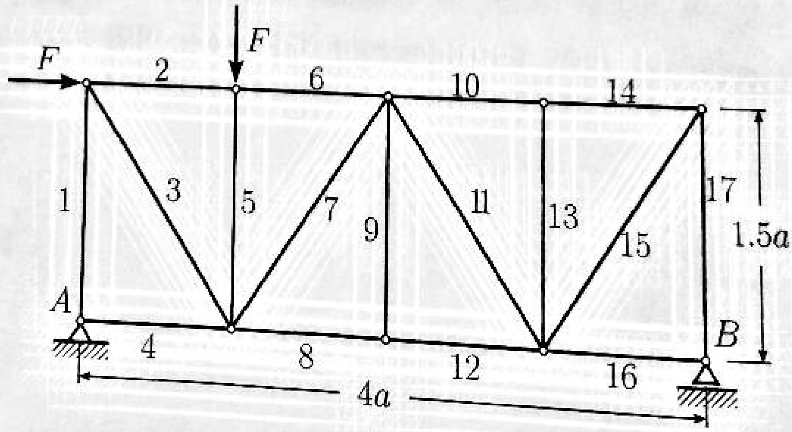


Lösung

$$z.B.: \ S_{10} = \frac{11}{8}\sqrt{3}F$$

Aufgabe 4.4:

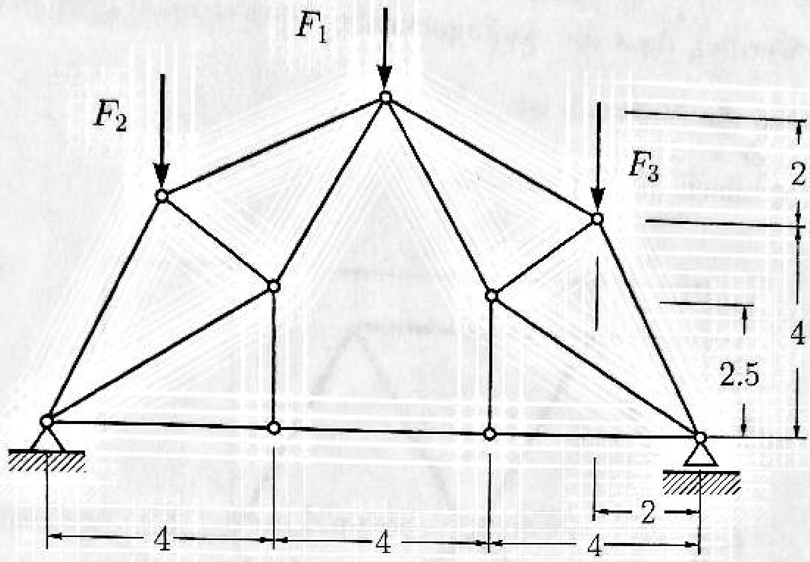
Das skizzierte Fachwerk besteht aus 17 Stäben und wird von zwei äußeren Kräften belastet. Die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte in den Stäben 10, 11 und 12 sind zu berechnen.



Aufgabe 4.5:

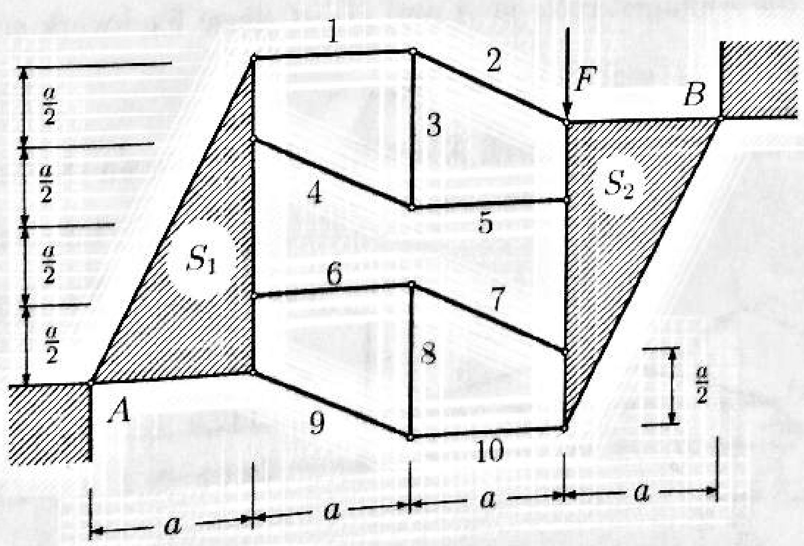
Ermitteln Sie für das Fachwerk die Stabkräfte.

Gegeben: $F_1 = 8000\text{N}$, $F_2 = F_3 = 5000\text{N}$, Maßangaben in m.



Aufgabe 4.6:

Zwei starre Scheiben S_1 und S_2 sind über zehn gewichtslose Stäbe gelenkig miteinander verbunden und in den Punkten A und B gelenkig gelagert. Das System ist durch die vertikale Kraft F belastet. Bestimmen Sie grafisch und rechnerisch die Auflagerkräfte und die Stabkräfte.



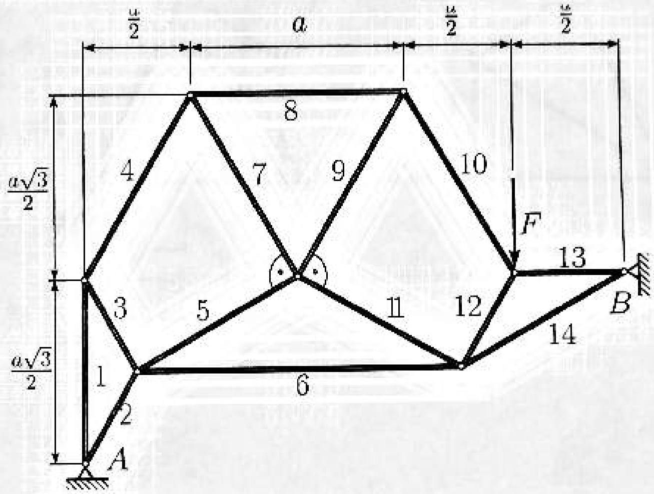
Aufgabe 4.7:

Ein aus vierzehn drehgelenkig verbundenen Stäben bestehendes Tragwerk ist in den Punkten A und B drehgelenkig gelagert. Die Belastung dieses Tragwerkes besteht in der im Punkt C angreifenden, lotrecht nach unten gerichteten Einzelkraft F.

a) Es soll gezeigt werden, dass die Auflagerkraft A horizontal gerichtet ist.

b) Zeige, dass Stab 6 ein Nullstab ist.

c) Bestimmen Sie grafisch die Stabkräfte.



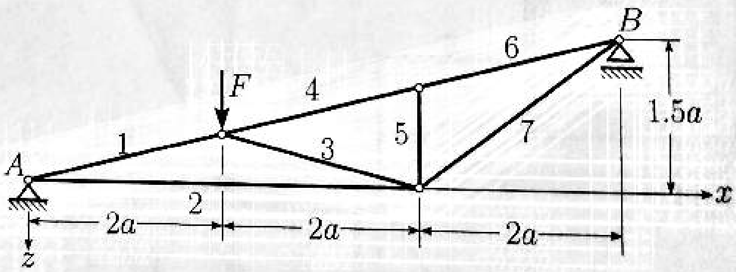
Aufgabe 4.8:

Ein Fachwerk wird durch die senkrechte nach unten gerichtete Kraft F belastet.

a) Ermitteln Sie die Auflagerkräfte in A und B. Ist diese Fachwerk statisch bestimmt?

b) Bestimmen Sie die Nullstäbe des Fachwerkes.

c) Berechnen Sie die Stabkräfte durch Aufstellen und Auflösen der Knotenpunktsgleichungen.



Lösung

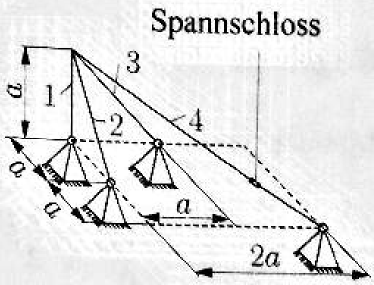
$F_7 = 0,828\ F$

4.2 Räumliche Fachwerke

Aufgabe 4.9:

An einem Dreibein aus den Stäben 1, 2, 3 wird ein Seil 4 befestigt und so gespannt, dass in ihm die Kraft F wirkt.
Wie groß sind die Stabkräfte in 1, 2, 3?

Gegeben: F; a



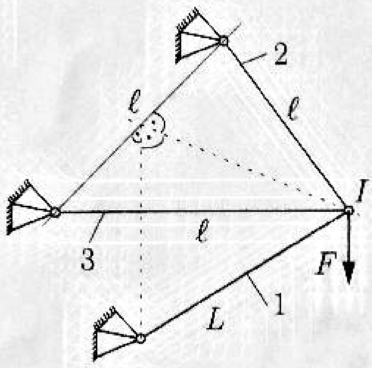
Lösung

z. B.: $S_1 = F$

Aufgabe 4.10:

Der gekennzeichnete Ausleger ist am Knoten I durch eine Kraft F belastet. Bestimmen Sie die Stabkräfte aller drei Stäbe und gebe an, ob sie auf Zug oder Druck beansprucht sind.
Anmerkung: Die Auflagerpunkte liegen sämtlich in einer senkrechten Ebene.

Gegeben: F; ℓ; L



Lösung

z. B.: $S_2 = \dfrac{\ell F}{\sqrt{4L^2 - 3\ell^2}}$

Aufgabe 4.11:

Bestimmen Sie für das nebenstehende Fachwerk

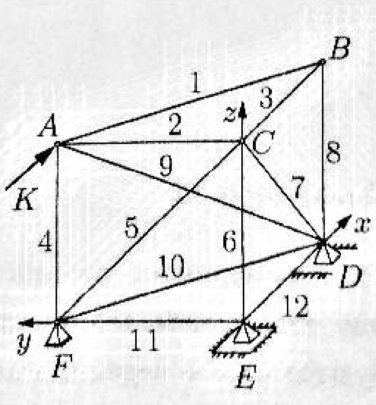
a) Auflagerkräfte und

b) alle Stabkräfte.

Gegeben: $\mathbf{K} = K \cdot \mathbf{e}_x$

a: Länge der Stäbe 2, 3, 4, 6, 8, 11, 12.

$a\sqrt{2}$: Länge der Stäbe 1, 5, 7, 10



Lösung

z. B.: S[illegible] $= S$[illegible] $= S$[illegible] $= K$; $S_9 = -\sqrt{3}K$

Aufgabe 4.12:

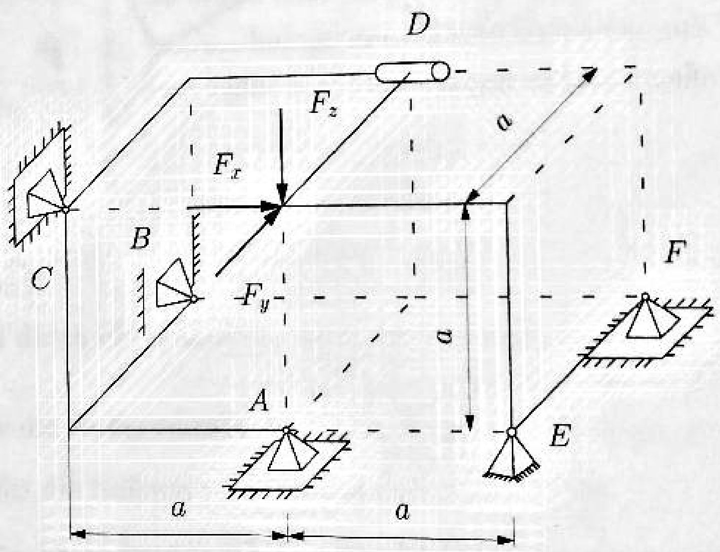
Das dargestellte räumliche Fachwerk mit einer räumlichen Schiebehülse in D wird durch die Kräfte F_x, F_y und F_z belastet. Berechnen Sie die Auflagerkräfte in den Auflagern A, B, C und E.

Gegeben: $F_x = F_y = F_z = F;\ a$

Lösung

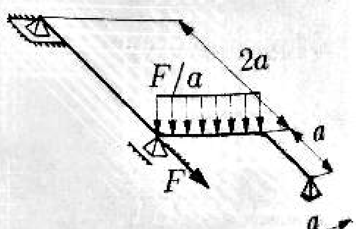
$$A_z = \frac{1}{3}F;\quad B_x = \frac{1}{3}F;\quad B_y = -\frac{1}{3}F$$

$$C_x = \frac{1}{3}F;\quad E_x = F;\quad E_y = \frac{2}{3}F;\quad E_z = \frac{1}{3}F;\quad F_z = F$$



Aufgabe 4.13:

Die Schnittgrößen des mit einer Einzelkraft vom Betrage F und einer konstanten Streckenlast (Resultierende F) belastete System (Stäbe liegen in einer Ebene) sind zu berechnen. Stellen Sie den Verlauf mit der Angabe von Extremwerten dar. Das System sei gewichtslos.



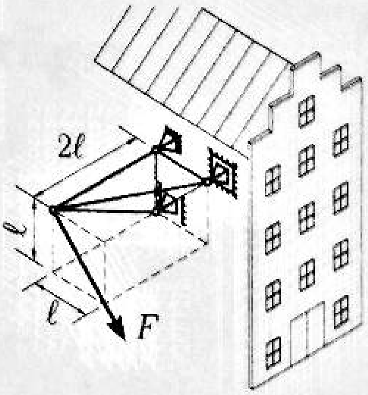
Gegeben: $F;\ a$

Aufgabe 4.14:

Das Amt für Denkmalschutz möchte bei der Renovierung eines alten Speicherhauses den historischen Kran benutzen. Es muss überprüft werden, ob die Tragfähigkeit des Krans auch bei stark ausgelenkter Kraft nicht überschritten wird.

Bestimmen Sie dazu die Kräfte in allen Balken, wenn der Kran wie skizziert durch die Kraft F belastet wird.

Gegeben: ℓ; F



Lösung

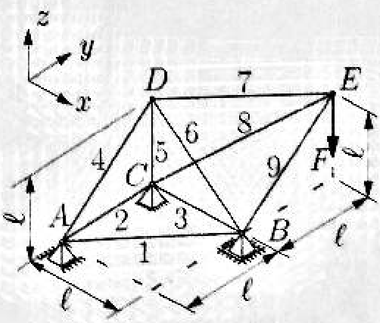
$$S_1 = 2\sqrt{2}F; \quad S_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}F; \quad S_3 = -\frac{\sqrt{10}}{2}F$$

$$S_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}F; \quad S_5 = 0; \quad S_6 = -\frac{\sqrt{10}}{2}F$$

Aufgabe 4.15:

Bestimmen Sie die Stabkräfte und geben Sie an, ob es sich um Zug- oder Druckkräfte handelt.

Gegeben: ℓ; F



Lösung

$$S_1 = 0; \quad S_2 = -F; \quad S_3 = F$$

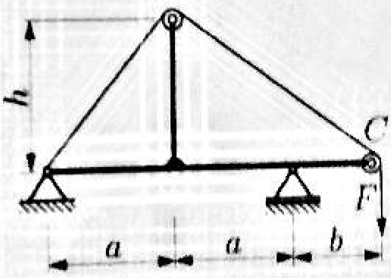
$$S_4 = \sqrt{2}F; \quad S_5 = 0; \quad S_6 = -\sqrt{2}F$$

$$S_7 = \sqrt{2}F; \quad S_8 = -\sqrt{3}F; \quad S_9 = 0$$

5 Balkenstatik und gekrümmte Träger

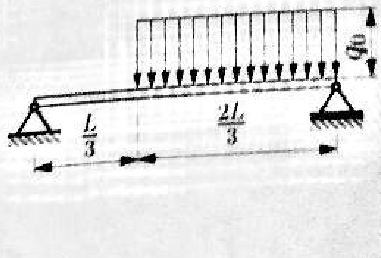
5.1 Gerade Balken

Aufgabe 5.1:



Ein Balken ist mit einem senkrechten Pfosten versehen, dessen Ende eine Rolle trägt. Über diese ist ein Seil geführt, das an seinem freien Ende bei c eine Last F aufnimmt. Die Rollendurchmesser seien vernachlässigbar klein.
Es sind die Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe zu ermitteln.
Gegeben: $F = 7,5$ kN; $a = 3$ m; $b = 1$ m; $h = 4$ m

Aufgabe 5.2:



Ein Balken ist entsprechend der nebenstehenden Skizze mit einer stetig verteilten Belastung $q(x) = q_0$ belegt.
Berechnen Sie die Lagerkräfte, die Querkraft- und Biegemomentenverläufe.
Wie groß ist das maximale Biegemoment?

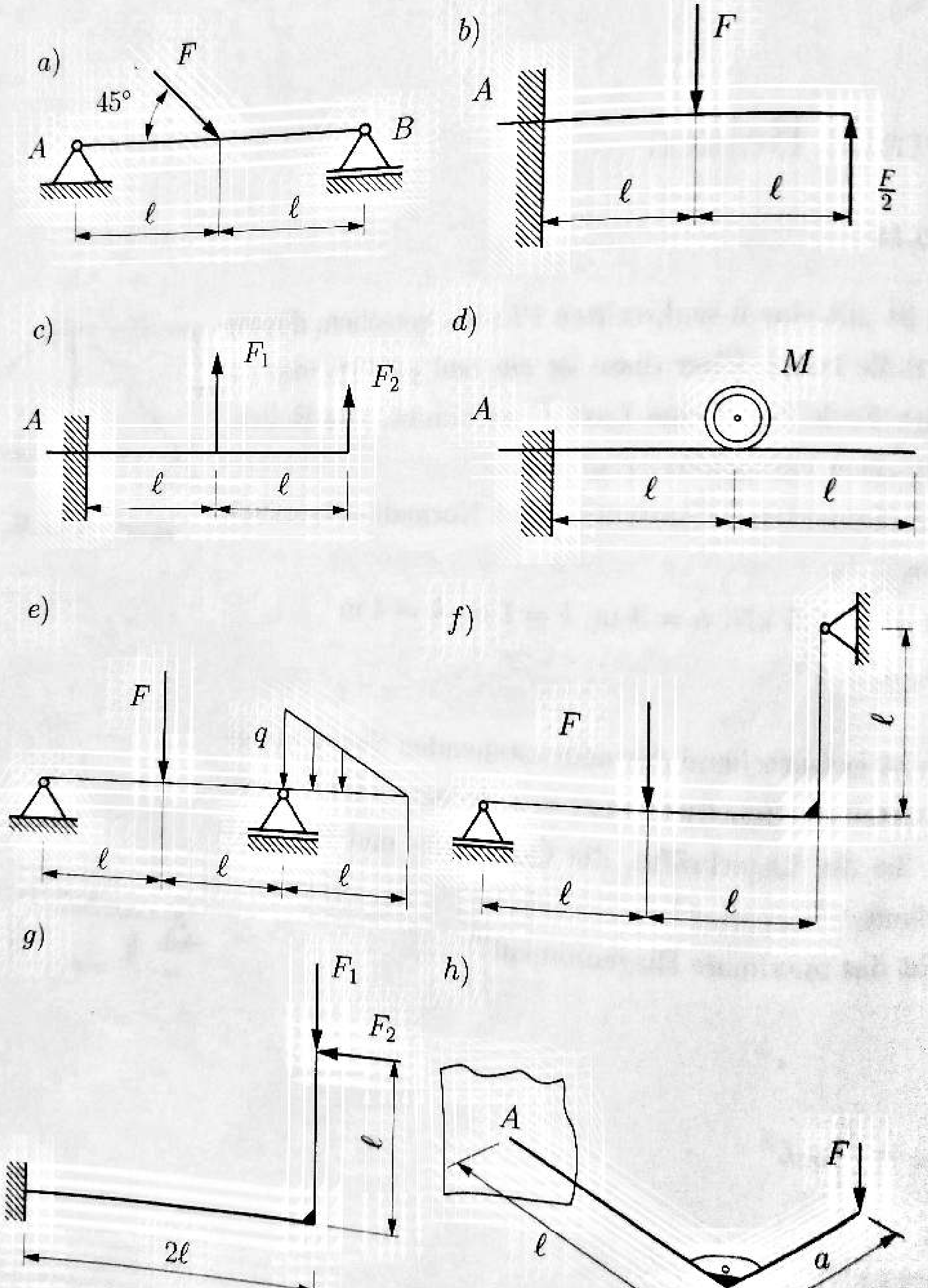
Lösung

$$M_{max} = \frac{8}{81} q_0 L^2$$

Aufgabe 5.3:

Für die nachstehend gezeichneten mechanischen Systeme sind die Lagerreaktionen und Schnittgrößen zu ermitteln.

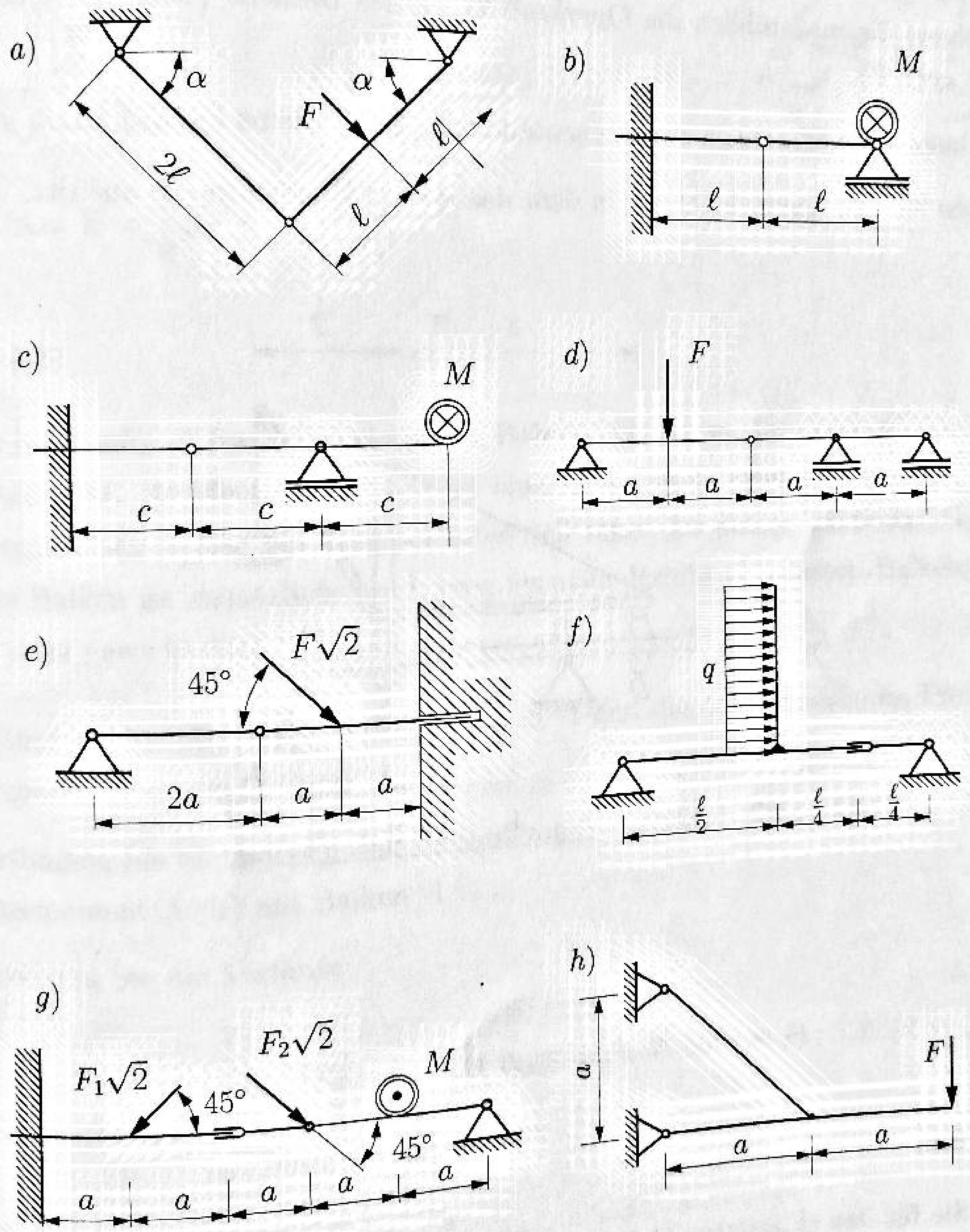
Gegeben: M; F; F_1; F_2; q; ℓ; a



Aufgabe 5.4:

Für die nachstehend gezeichneten mechanischen Systeme sind die Lagerreaktionen und Schnittgrößen zu ermitteln.

Gegeben: M; $F_1 = F_2 = F$; q; a; ℓ; α



Aufgabe 5.5:

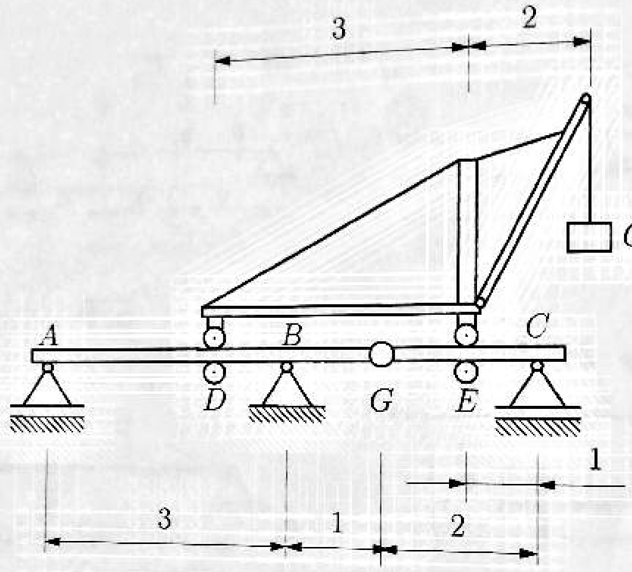
Auf einem Gelenkbalken ist, wie die Zeichnung zeigt, ein gewichtsloser Kran befestigt, der die Last $G_Q = 3000$ N trägt. Maßangaben sind in m.

a) Bestimmen Sie die Auflagerkräfte in A, B, C und die Gelenkkraft in G.

b) Zeichnen Sie maßstäblich die Querkraftfläche des Balkens ($MdL : 1 : 50$, MdK : $1cm \equiv 1kN$).

c) Zeichnen Sie maßstäblich die Momentenfläche des Balkens ($MdM : 1cm \equiv 1kNm$).

d) Geben Sie den Querschnitt an, in dem das größte Biegemoment auftritt.

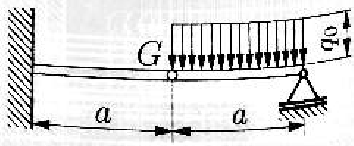


Lösung

$a)\ F_a = 1500\ N; F_b = 2000\ N; F_c = 2500\ N$

Aufgabe 5.6:

Ermitteln Sie für den skizzierten Gelenkbalken mit stetig verteilter Belastung q_0 die Querkraft- und Momentenfläche. Wie groß ist das maximale Biegemoment?

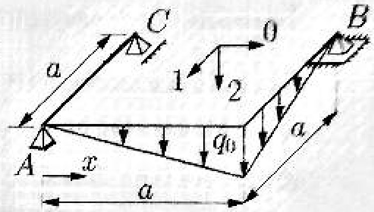


Lösung

$$M_{max} = \frac{1}{2} q_0 a^2$$

Aufgabe 5.7:

Der skizzierte ebene, gewichtslose Rahmen ist normal zu seiner Ebene durch zwei linear verteilte Streckenlasten (Maximalwert q_0) belastet.



Gesucht sind die Auflagerreaktionen sowie die Schnittgrößen im Bereich I in den angegebenen Richtungen.

Gegeben: a; q_0

Lösung

$$z.B.\ A = B = \frac{5}{6} q_0 \cdot a$$

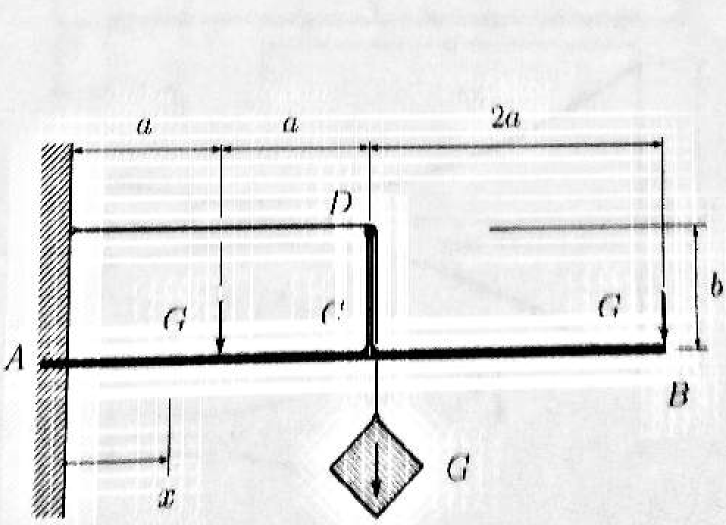
Aufgabe 5.8:

An einem im Punkt A fest eingespannten Balken AB ist an der Stelle C der Kragarm CD angeschweißt. An dessen Ende D ist eine kleine Rolle gelenkig befestigt, über die in der dargestellten Weise ein biegeschlaffes Seil führt, an dessen Ende das Gewicht G hängt. Der Balken ist zusätzlich durch zwei vertikale Kräfte G belastet. Balken, Seil und Kragarm seien gewichtslos.

a) Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen in A und die Schnittlasten im Punkt C des Kragarms bzw. des Balkens.

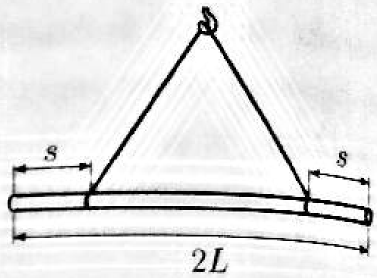
b) Bestimmen Sie rechnerisch den Verlauf von Normalkraft $N(x)$, Querkraft $Q(x)$ und Biegemoment $M(x)$ am Balken AB.

c) Skizzieren Sie die Verläufe.



Aufgabe 5.9:

Ein horizontal liegender, homogener Balken vom Gewicht G soll an zwei Seilen hängend angehoben werden.



a) Berechne und skizziere den Biegemomentenverlauf.

b) An welchen, durch die Abstände s gekennzeichneten Stellen müssen die Seile angebracht werden, wenn eine möglichst geringe Biegebeanspruchung auftreten soll?

c) Wie groß ist das minimale M_{max} ?

d) Um welchen Faktor wird das maximale Biegemoment größer, wenn der Balken

1) an den Enden angehoben wird? ($s = 0$)

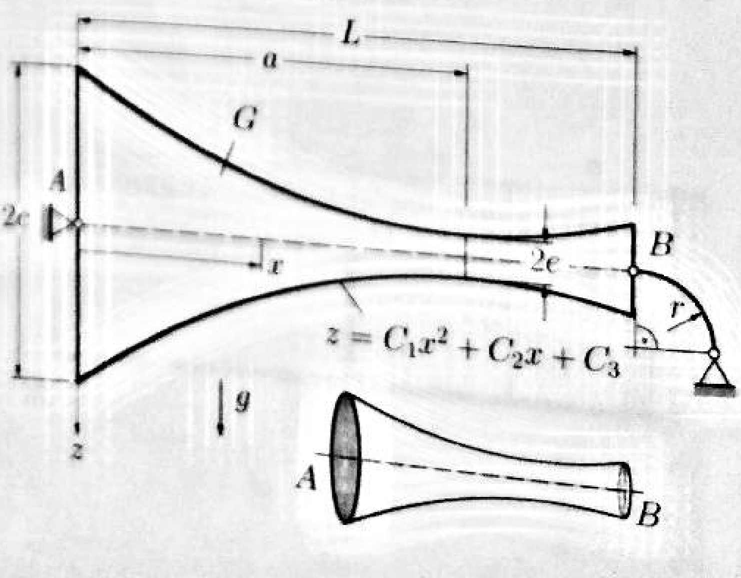
2) in der Mitte angehoben wird? ($s = L$)

Aufgabe 5.10:

Ein homogener Balken (Gewicht G) in Form eines Drehparaboloids (Rotation der Parabel $z = C_1x^2 + C_2x + C_3$ um die Balkenachse AB, Scheitel im Abstand a von A) wird in B durch einen gewichtslosen Bogen gestützt.

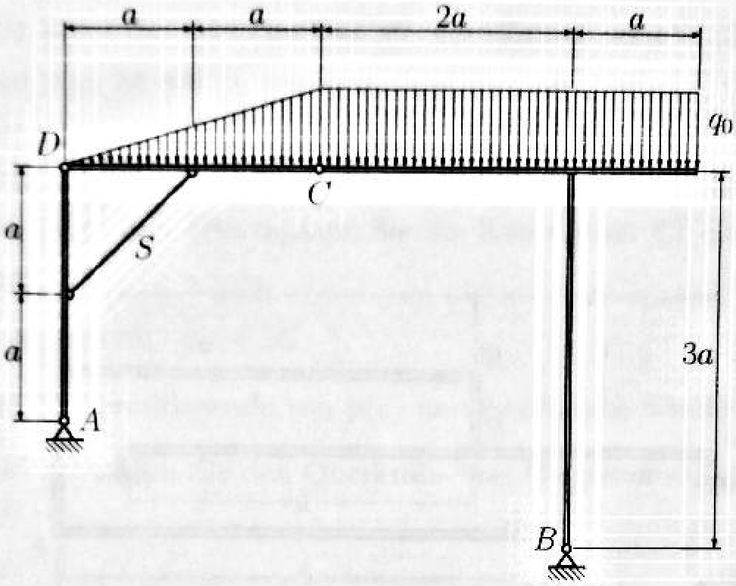
a) Berechnen Sie die Konstanten C_1, C_2 und C_3 mittels der gegebenen Abmessungen a, L, c und e und die Lagerreaktionen in A und B.

b) Bestimmen Sie die Streckenlast $q(x)$ aus dem Balkengewicht G und die Schnittreaktionen $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$.



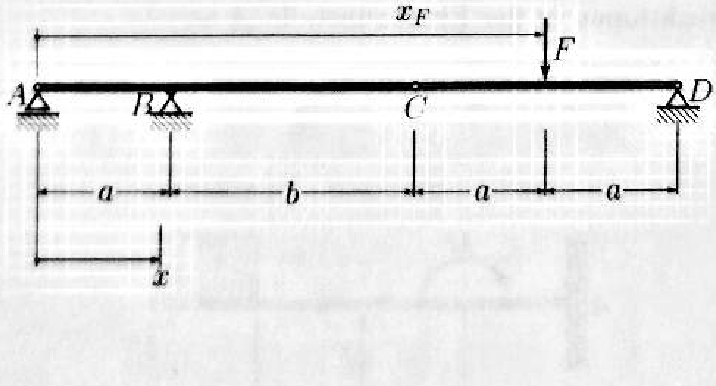
Aufgabe 5.11:

Ermitteln Sie für den dargestellten Rahmenträger den Verlauf der Schnittreaktionen (d.h. Normal- und Querkraft sowie Biegemoment) entlang der dargestellten Balkenabschnitte.



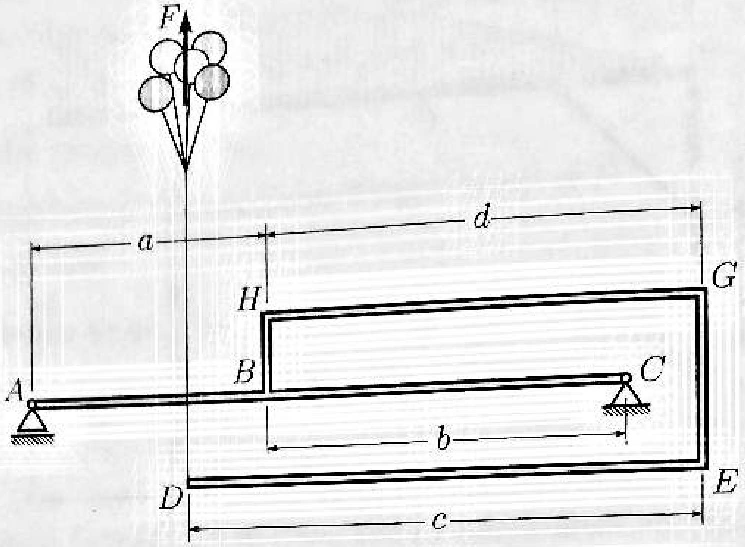
Aufgabe 5.12:

Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A, B und D bzw. die Gelenkkraft in C für $x_F = a/2$, $x_F = (a+b)$ und $x_F = (2a+b)$ und skizziere die jeweils dazugehörigen Verläufe von Querkraft $Q(x)$ und Biegemoment $M(x)$ am dargestellten Gerberträger.



Aufgabe 5.13:

Gegeben ist die in D angreifende vertikale Kraft F.
Bestimmen Sie die Auflagerkräfte in A und C sowie die Schnittreaktionen in E, G, H und B.

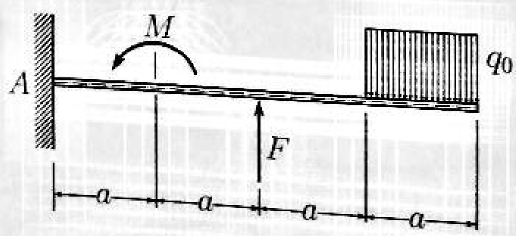


Aufgabe 5.14:

Ein Balken der Länge $4a$ ist am linken Ende fest eingespannt und durch die Einzelkraft F, die kontinuierliche Last $q_0 = 2F/a$ und das Moment $M = aF$ belastet. Das Eigengewicht des Balkens sei vernachlässigbar.

a) Gib die Lagerreaktionen in der Einspannstelle A an.

b) Berechne und skizziere den Verlauf von Querkraft und Biegemoment.



Lösung

$$M(x)_4 = -5aF + Fx + F(x-2a) - q_0\frac{(x-3a)^2}{2}$$

Aufgabe 5.15:

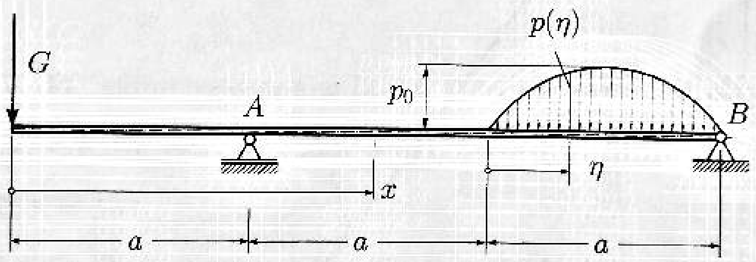
Bestimmen Sie für ein Brett, das durch einen Arbeiter und einen Sandhaufen belastet wird, die Verläufe von Querkraft und Biegemoment. Die Kontur (und somit auch die Streckenlastfunktion $p(\eta)$) des Sandhaufens sei sinusförmig (eine Halbwelle). Der Scheitelwert der Funktion $p(\eta)$ ist mit p_0 gegeben.

a) Stelle die Belastungsfunktion $p(x)$ für $2a \leq x \leq 3a$ mit Hilfe des Ansatzes $p(\eta) = C_1 \cdot \sin C_2\eta$ auf. (Bestimmen Sie die Konstanten C_1 und C_2 und mache η von x abhängig.)

In der Folge soll gelten: $p_0 = 2G \cdot \frac{\pi}{a}$.

b) Berechnen Sie die Resultierende von $p(\eta)$ und bestimmen Sie die Auflagerkräfte.

c) Berechnen und skizzieren Sie den Querkraft- und Biegemomentenverlauf.



Lösung

$$M(x)_3 = -Gx + \frac{5}{2}G(x-a) - 2G\left[(x-2a) - \frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}(x-2a)\right)\right]$$

Aufgabe 5.16:

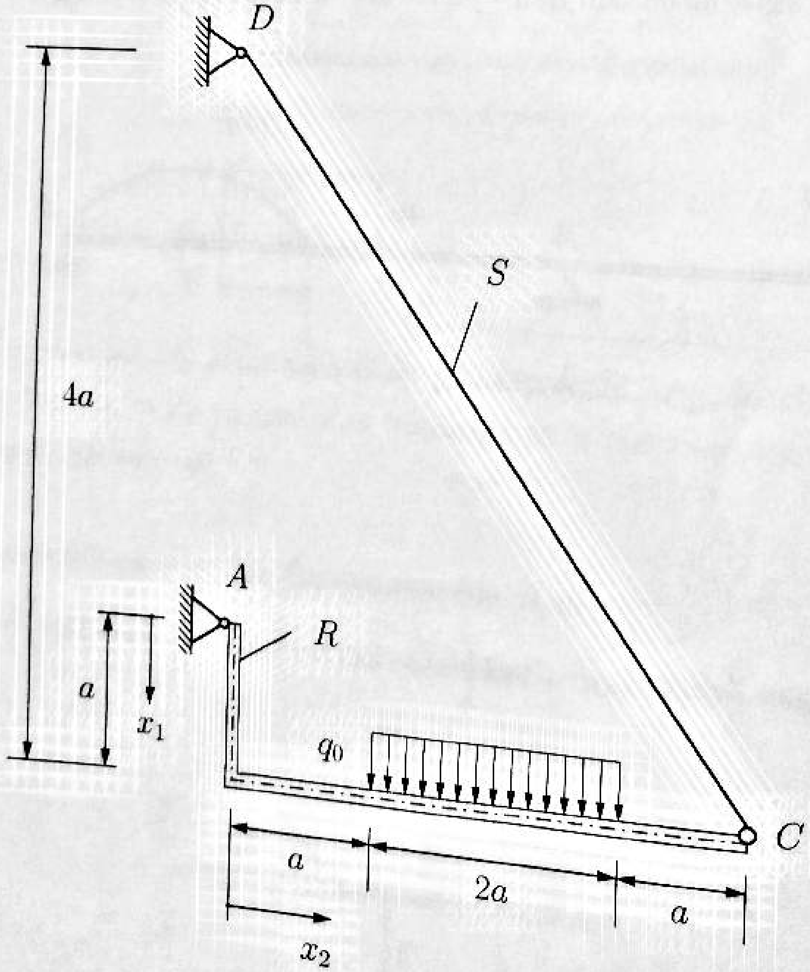
Der gewichtslose Rahmen R ist im Punkt A gelenkig gelagert und wird in C durch das gewichtslose Seil S gehalten. Der Rahmen ist im Bereich $a < x_2 < 3a$ durch die konstante Streckenlast q_0 belastet.

a) Zeichnen Sie das Freikörperbild des Rahmens und bestimmen Sie die Auflagerreaktionen in A und die Seilkraft S.

b) Berechnen Sie den Normalkraft-, Querkraft-, und Biegemomentenverlauf im Rahmen in Abhängigkeit von x_1 und x_2.

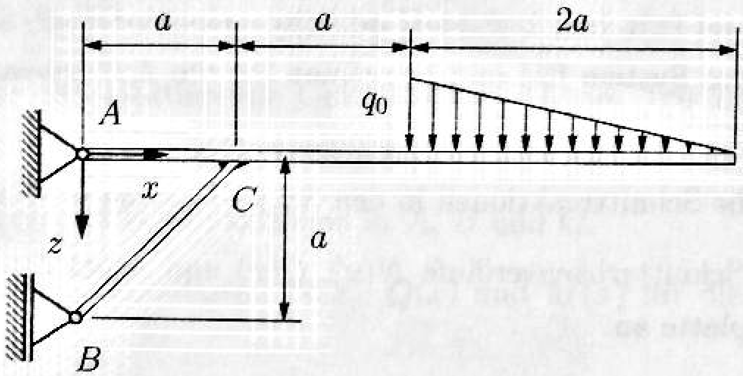
c) Skizzieren Sie die Verläufe.

Gegeben: a; q_0



Aufgabe 5.17:

Ein horizontal verlaufender, masseloser Balken ist im Punkt C mit dem ebenfalls masselosen Balken BC verschweißt. Das Gesamtsystem ist im Punkt A und im Punkt B wie dargestellt gelagert und wird durch eine lineare Streckenlast belastet.



a) Schneiden Sie das System frei und berechnen Sie die Auflagerreaktionen in A und B.

b) Ermitteln Sie die Schnittreaktionen in der Schweißnaht im Punkt C.

c) Geben Sie die Schnittgrößenverläufe $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$ für den horizontal verlaufenden Balken an.

d) Skizzieren Sie die Verläufe von $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$.

Aufgabe 5.18:

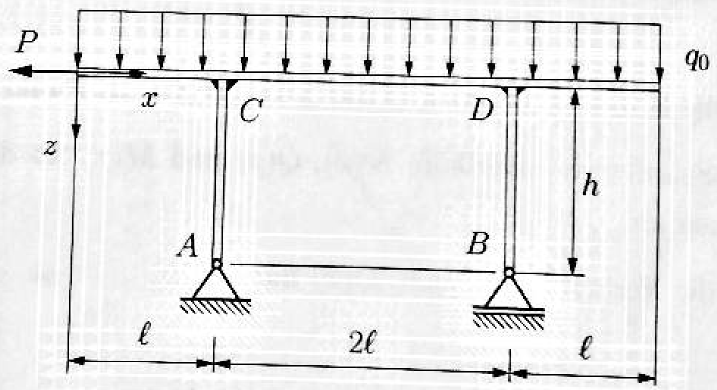
Die dargestellte Tischkonstruktion ist im Punkt A und im Punkt B gelagert. Die beiden vertikal verlaufenden Beine sind in den Punkten C und D an die horizontal verlaufende Tischplatte angeschweißt. Das Gewicht der Tischplatte wird durch die konstante Streckenlast $q_0 = \frac{P}{\ell}$ berücksichtigt. Alle anderen Gewichte können vernachlässigt werden. Zusätzlich greift an der Tischplatte eine horizontale Kraft P an.

a) Schneiden Sie das System frei und berechnen Sie die Auflagerreaktionen in A und B.

b) Ermitteln Sie die Schnittreaktionen in den Schweißnähten in C und D.

c) Geben Sie die Schnittgrößenverläufe $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$ für die horizontal verlaufende Tischplatte an.

d) Skizzieren Sie die Verläufe von $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$.



Aufgabe 5.19:

Der dargestellte homogene Balken (Welle, spezifisches Gewicht γ) mit kreisförmigem Querschnitt (Radien r_1 und r_2) besteht aus einem kegelförmigen Teil I und einem zylindrischen Teil II.

Der Balken wird durch sein Eigengewicht (spezifisches Gewicht γ) belastet.

a) Bestimmen Sie die Streckenlast $q(x)$ im Bereich I und $q(x)$ im Bereich II.

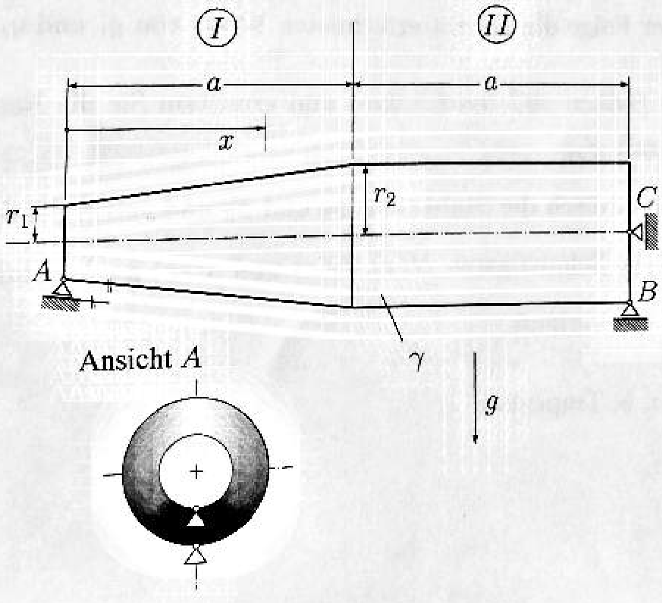
b) Bestimmen Sie die resultierende Gewichtskraft G_I am Teil I und deren Abstand von A und die resultierende Gewichtskraft G_{II} am Teil II

c) Berechnen Sie die Auflagerreaktionen in A, B und C.

d) Berechnen Sie die Schnittlasten $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$ für die Bereiche I und II des Balkens.

e) Skizzieren Sie die Verläufe von $q(x)$, $Q(x)$, $M(x)$ und $N(x)$. (Verwenden Sie dabei eventuell das Längenverhältnis $a/r = 8$.)

Gegeben: γ, $r_1 = r$, $r_2 = 2r$, a



Aufgabe 5.20:

An den Balken AC und CB, die durch die Stäbe 1, 2 und 3 biegesteif miteinander verbunden sind wirkt eine trapezförmige Streckenlast mit den Randwerten q_1 und q_2. Die Konstruktion ist in A und B an Seilen aufgehängt und wird durch die Gewichte G und $2G$ an den Seilenden und durch reibungsbehaftete Kontakte (Haftreibungskoeffizient μ_0) in I und II im Gleichgewicht gehalten.
Es sollen nun die Randwerte q_1 und q_2 der Streckenlast so bestimmt werden, dass an der Kontaktstelle I und an der Kontaktstelle II die Haftgrenze erreicht wird.

a) Geben Sie alle Kombinationen der Seilkraft in A und der Seilkraft in B an, bei denen in I und II die Haftgrenze erreicht wird.

b) Bestimmen Sie die Lage der Resultierenden R und deren Betrag für die Trapezlast (q_1, q_2).

c) Berechnen Sie die Randwerte q_1 und q_2 für den Fall, dass die Seilkraft in A und die Seilkraft in B ihren maximal möglichen Wert erreichen.

d) Bestimmen Sie den Abstand $b(a) = b_0$ so, dass der in c) errechnete Wert für q_1 gleich Null wird: $q_1(b_0) = 0$.

Verwenden Sie in der Folge die zuletzt errechneten Werte von q_1 und q_2.

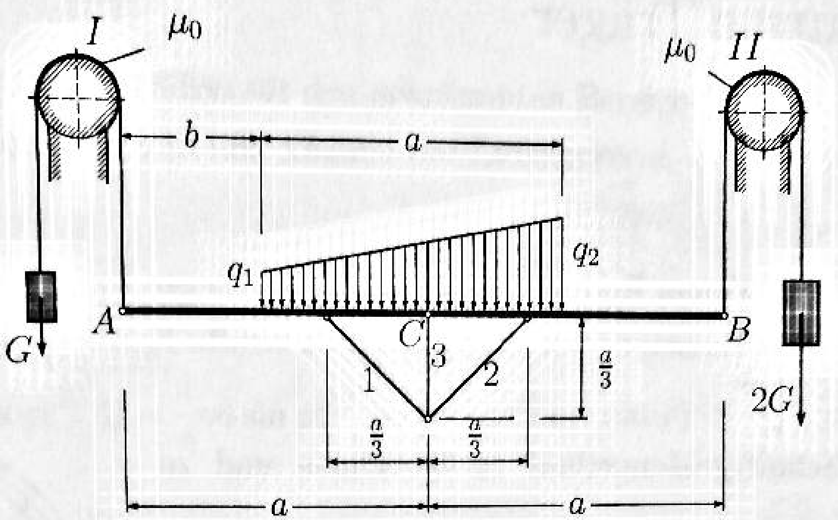
e) Schneiden Sie Balken AC frei (Skizze) und ermitteln Sie die Reaktionskraft in C und die Stabkraft S_1.

f) Bestimmen Sie grafisch die Stabkräfte S_2 und S_3 und geben Sie deren Beträge an.

g) Berechnen Sie die Schnittlasten $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$ an den Balken AC und CB.

h) Skizzieren Sie die Verläufe.

Gegeben: μ_0, G, a, b, Trapezlast



Lösung

$$M(x)_5 = 2F(2a - x)$$

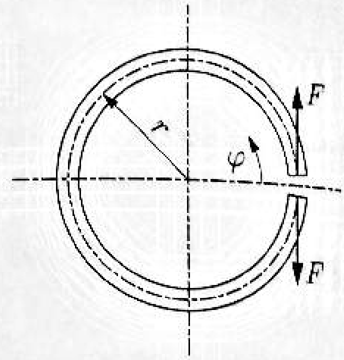
5.2 Gekrümmte Träger

Aufgabe 5.21:

Ein Sprengring von mittlerem Radius r und konstanter Biegesteifgkeit EI wird beim Einsetzen wie skizziert durch Kräfte F belastet.

a) Es ist der Schnittgrößenverlauf zu berechnen und zu zeichnen.

b) Bestimmen Sie die Federkonstante c für die Kraftangriffsstelle.



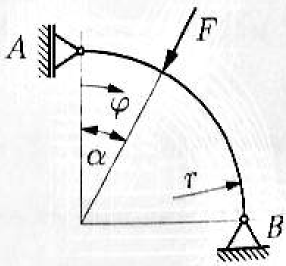
Gegeben: r; F; EI

Lösung

$$a)\ z.B.\ M_{by}(\varphi) = -F \cdot r(1 - \cos\varphi)$$

Aufgabe 5.22:

Der gezeichnete Viertelkreisträger ist durch eine Kraft F belastet. Berechnen Sie die Lagerreaktion und den Schnittgrößenverlauf.



Gegeben: r; F; α

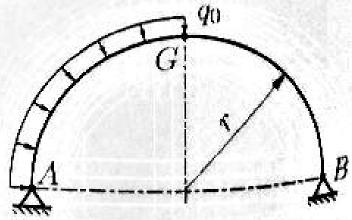
Lösung

$$B_V = A_H = F \cdot \cos\alpha; \quad B_H = F \cdot (\cos\alpha - \sin\alpha); \quad A_V = 0$$

Aufgabe 5.23:

Für den skizzierten Dreigelenkbogen sind die Kräfte in den Gelenken zu ermitteln. Berechnen Sie die Schnittgrößen.

Gegeben: q_0; r



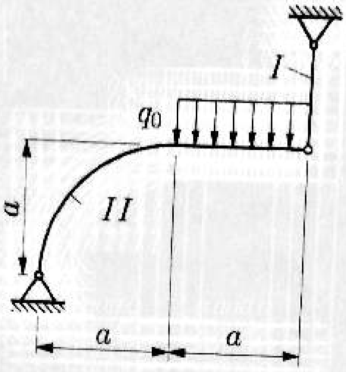
Lösung

$$A = B = \frac{\sqrt{2}}{2} q_0 r$$

Wirkungslinien unter 45° geneigt.

Aufgabe 5.24:

Bestimmen Sie die Schnittgrößen für den gekrümmten Bereich und skizzieren Sie die Verläufe mit Angabe der Extremwerte.
Gegeben: a; q



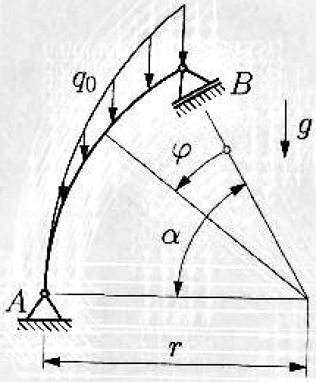
Lösung

$$N = -\frac{1}{4}qa\cos\varphi; \quad Q = \frac{1}{4}qa\sin\varphi; \quad M = \frac{1}{4}qa^2(1-\cos\varphi)$$

Aufgabe 5.25:

Bestimmen Sie für den abgebildeten Bogenträger die Schnittgrößen in Abhängigkeit vom Winkel φ für die angegebene konstante Streckenlast q_0.

Hinweis: Die Streckenlast q_0 resultiert aus der Gewichtskraft des Bogenträgers.
Gegeben: r; α; q_0



Lösung

$$N = q_0 r\left[\frac{\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha}\sin\varphi - \varphi\cos(\alpha-\varphi)\right]$$

Aufgabe 5.26:

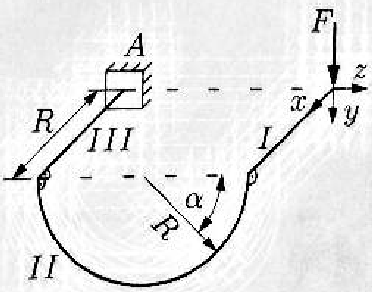
Für den räumlichen Rahmen ohne Eigengewicht sind zu bestimmen:

a) die Lagerreaktion, bei A,

b) die Schnittgrößen im Bereich I,

c) die Schnittgrößen im Bereich II.

Gegeben: F; R



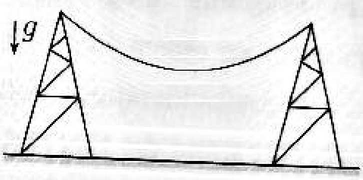
Lösung

$$a)\ M_x^A = 2FR; \quad A_x = 0; \quad A_y = F; \quad A_z = 0$$

6 Seilstatik

Aufgabe 6.1:

In einem ebenen Gelände soll zwischen zwei gleich hohen, voneinander 80 m entfernten Masten eine Leitung (Gewicht/Länge $p_0 = 960\,\mathrm{N/km}$) so gespannt werden, dass der tiefste Punkt 6 m über dem Boden liegt und die Seilkraft an dieser Stelle 2750 N beträgt.

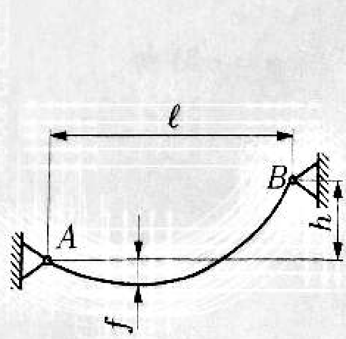


Wie hoch müssen die Masten sein, und wie groß ist die maximale Seilkraft?

Gegeben: $h = 6,28\,\mathrm{m}$; $S_{max} = 2750,3\,\mathrm{N}$

Aufgabe 6.2:

Eine Freileitung (Gewicht/Länge p_0) ist zwischen den Punkten A und B aufgespannt. Der tiefste Punkt der Leitung hat gegenüber A den Durchhang f. Wie groß ist die maximale Seilkraft? Ermitteln Sie die Länge der Leitung im Falle $h = 0$, $\ell = 60$ m, $f = 0,5$ m, $p_0 = 1,2$ N/m.

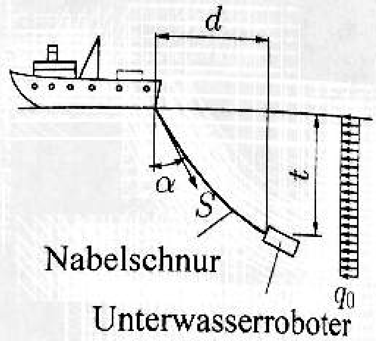


Lösung

$$S_{max} = 1080,6\ N; \quad L = 60,011\ m$$

Aufgabe 6.3:

Ein ferngesteuerter Unterwasserroboter ist durch eine masselose Nabelschnur mit einem Schiff verbunden, von dem aus er gesteuert wird. Er hat einen Antrieb, mit dem er entgegen der Strömung vorangetrieben wird. Die Strömung des Wassers ergibt eine spezifische Belastung q in horizontaler Richtung auf die Nabelschnur. Die Belastung ist unabhängig von der Wassertiefe, $q = const.$ Die Position des Unterwasserroboters wird mit der horizontalen Distanz d vom Schiff und der Tauchtiefe t angegeben. An der Einspannstelle der Nabelschnur am Schiff wird die Kraft S und der Neigungswinkel α gemessen.
Wie groß ist die Distanz d bei gemessener Tiefe t?



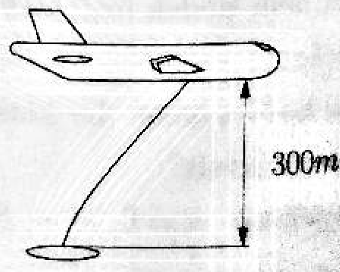
Gegeben: q; S; α; t

Lösung

$$d = \frac{q}{2S\cos\alpha}t^2 + t \cdot \tan\alpha$$

Aufgabe 6.4:

Ein Flugzeug fliegt mit konstanter Geschwindigkeit und schleppt an einem Seil eine Scheibe vom Gewicht $G = 5000$ N. Der Luftwiderstand der Scheibe beträgt $W = 250$ N. Der Luftwiderstand des Seils ist durch die Streckenlast $q_0 = 4$ N/m (Abstand in vertikaler Richtung) zu berücksichtigen.
Bestimmen Sie unter Vernachlässigung der Masse des Seils die Rücklage des unteren Einspannpunktes.



Lösung

$$y = -51\ m$$

Aufgabe 6.5:

Ein kugelförmiger Fesselballon (Radius R, vernachlässigbares Eigengewicht) ist über ein Seil (Länge L, Gewicht pro Längeneinheit q) mit dem Boden in Verbindung. Der Ballon erfährt dabei eine Auftriebskraft.

a) Linke Skizze: Bei Windstille ist das Seil straff gespannt. Wie groß ist die dazu mindestens nötige Auftriebskraft A_{min} ?

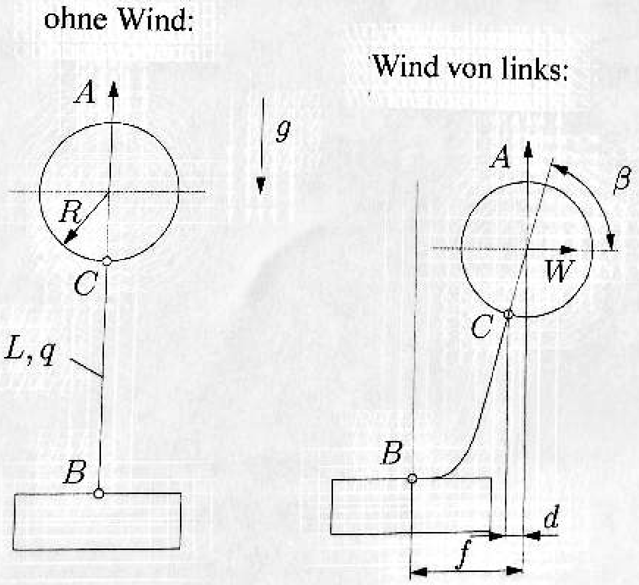
b) Rechte Skizze: In einer Windströmung wirkt auf den Ballon neben der Auftriebskraft zusätzlich noch die (horizontal gerichtete) Luftwiderstandskraft W die im Ballon-Mittelpunkt C angreift. Gegeben: W, $A = A_{min}$ (aus Punkt a berechnet)

   1) Schneiden Sie jeweils Ballon und Seil frei. Achten Sie dabei auf deutliche Skizzen.

   2) Geben Sie Gleichgewichtsbedingungen an, berechnen Sie die Seilkraft, und stellen Sie Gleichungen zur Bestimmung von Horizontal- und Vertikalkraft im Seil auf.

   3) Bestimmen Sie die Länge d. Wie weit (f) wird der Ballonmittelpunkt infolge der Windströmung seitlich abgetrieben?

Gegeben: R, L, q, Eigengewicht des Ballons wird vernachlässigt.



Lösung

$$x_C = a \cdot \operatorname{asinh}\left(\frac{L}{a}\right)$$

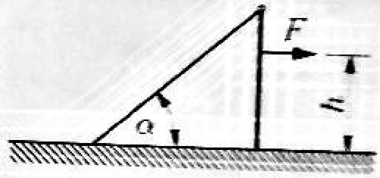
7 Reibung

Aufgabe 7.1:

Ein Stab (Gewicht G, Länge ℓ) steht senkrecht auf einer rauhen Ebene (Haftreibungskoeffizient μ). Der Stab wird durch die horizontale Kraft F belastet und durch ein Abspannseil gehalten.

a) Wie groß darf die Zugkraft sein, wenn $h < \frac{\ell}{1+\mu \tan\alpha}$ ist?

b) Was passiert, wenn $h > \frac{\ell}{1+\mu \tan\alpha}$?



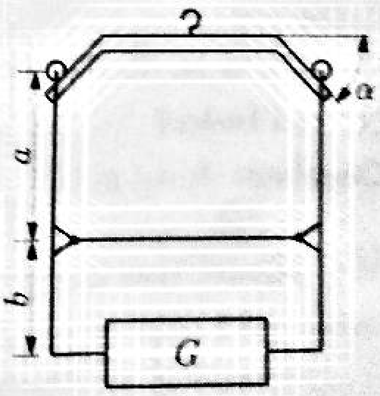
Lösung

$$a)\ F = \frac{\mu G}{1 - \frac{h}{\ell}(1 + \mu \tan\alpha)}$$

Aufgabe 7.2:

Der skizzierte Hebemechanismus dient zum Anheben von Rohgußblöcken. Welchen Grenzwert darf α annehmen, damit ein Block vom Gewicht G sicher angehoben werden kann?

Gegeben: $a = 0,6$ m; $b = 0,5$ m; $\mu_0 = 0,2$

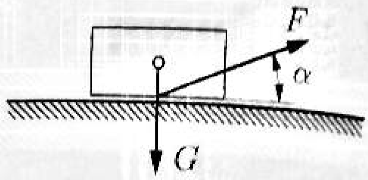


Lösung

$\alpha \geq 76,5°$

Aufgabe 7.3:

Ein Block vom Gewicht G soll über eine horizontale Ebene (Reibungsbeiwert zwischen Block und Ebene ist μ) gezogen werden. Unter welchem Winkel α gegen die Horizontale muss eine Kraft F wie gezeichnet angreifen, damit sie möglichst klein wird?



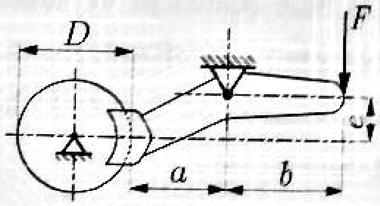
Gegeben: G; μ

Lösung

$$\alpha = \arctan \mu$$

Aufgabe 7.4:

Mit der skizzierten Bremsvorrichtung (Reibbeiwert μ) lassen sich in den beiden Drehrichtungen verschiedene Bremsmomente erzeugen. Die für ein Verhältnis β der beiden Bremsmomente (Beträge) erforderliche Exzentrizität e ist zu berechnen.
Bei welcher Drehrichtung tritt das größere Bremsmoment auf?



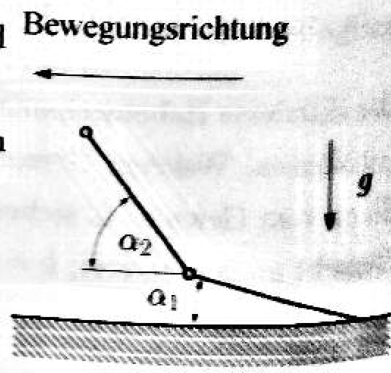
Gegeben: a; b; D; F; μ; $\beta > 1$

Lösung

$$e = \mu a \frac{\beta + 1}{\beta - 1}$$

Aufgabe 7.5:

Ein Stab (Länge ℓ, Gewicht G) wird an einem gewichtslosen Seil unter einem Winkel α_1 mit konstanter Geschwindigkeit über den Boden gezogen. Der Reibbeiwert zwischen Stab und Boden beträgt μ.
Wie groß ist im Gleichgewichtszustand der Winkel α_2 zwischen Seil und Boden?



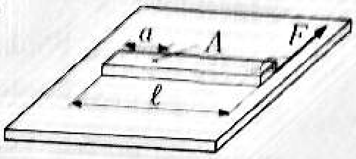
Gegeben: ℓ; α_1; μ; G

Lösung

$$\tan \alpha_2 = \frac{1}{\mu} + 2 \tan \alpha_1$$

Aufgabe 7.6:

Ein homogener ideal gerader Stab (Länge ℓ, Gewicht G) liegt im Schwerefeld auf einer ideal ebenen horizontalen Platte, so dass er an jeder Stelle mit dem gleichen Druck aufliegt. Wie groß muss die Kraft F sein, damit sich der Stab um einen Punkt A unbeschleunigt drehen läßt wenn zwischen Stab und Platte der Gleitreibwert μ gilt, und wo liegt A?



Hinweis: Der Stab muss im Gleichgewicht sein.

Gegeben: G; ℓ; μ

Lösung

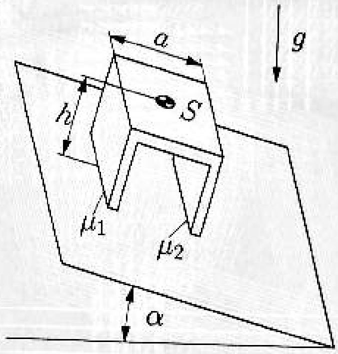
$$F = (\sqrt{2} - 1)\mu G; \quad a = \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\ell$$

Aufgabe 7.7:

Ein starrer Tisch wird auf eine schiefe Ebene gestellt. Der Schwerpunkt des Tisches befindet sich um die Höhe h von der schiefen Ebene entfernt.

a) Für welchen Winkelbereich $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ rutscht der Tisch ohne zu kippen?

b) Wie groß sind der Winkel α und die Reibbeiwerte μ_1 bzw. μ_2, wenn Rutschen und Kippen gleichzeitig auftreten sollen?



Gegeben: a; h; μ_1; μ_2

Lösung

$$a)\ \frac{a}{2h}\frac{\mu_1 + \mu_2}{\frac{a}{h} + (\mu_1 - \mu_2)} \leq \tan\alpha \leq \frac{a}{2h}$$

$$b)\ \mu_1 \text{ beliebig; } \mu_2 = \frac{a}{2h}$$

Aufgabe 7.8:

Ein dünner Balken vom Gewicht G_B hängt verschiebbar so zwischen zwei Schneiden A und B, dass er durch Reibung (Beiwert μ_0) gehalten wird, und dabei seine Längsachse mit der Horizontalen einen Winkel α bildet.
Am rechten Ende des Balkens wirkt die vertikale Last $G_Q = 2\,G_B$.

a) Bestimmen Sie - soweit möglich - die Auflagerreaktion.

b) Mit welcher Kraft F_L müsste man in Balkenlängsrichtung drücken, um den Balken nach links zu verschieben?

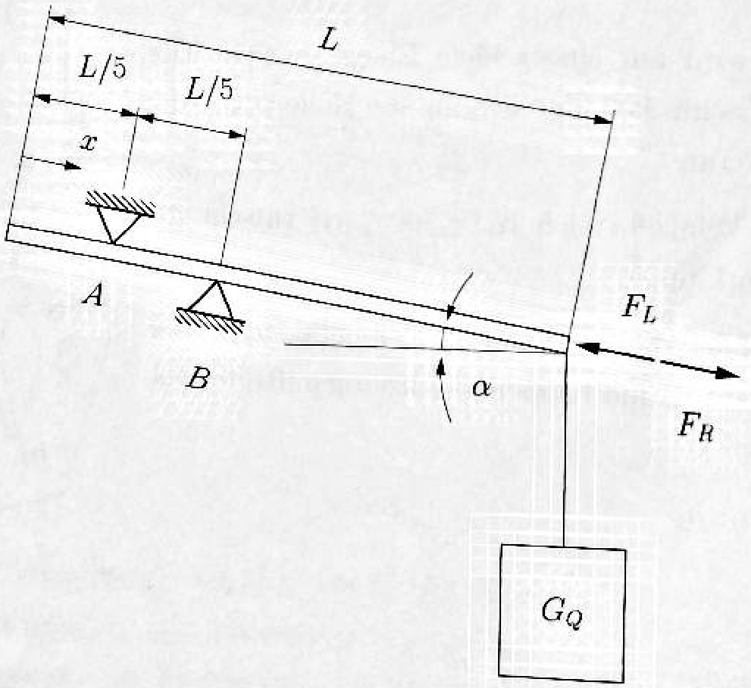
c) Mit welcher Kraft F_R müsste man in Längsrichtung des Balkens ziehen, um den Balken nach rechts zu verschieben?

d) Bis zu welchem Winkel α kann der Balken gerade noch zwischen den Schneiden A und B gehalten werden, ohne abzurutschen?

e) Skizzieren Sie den Verlauf der Querkraft $Q(x)$ und gebe Ort und Größe des maximalen Betrages von $Q(x)$ an.

f) Skizzieren Sie den Verlauf des Momentes $M(x)$ und gebe Ort und Größe des maximalen Betrages von $M(x)$ an.

g) Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf der Normalkraft $N(x)$.



Lösung

a) $N_B = 9,5\,G_B \cos\alpha; \quad N_A = 6,5\,G_B \cos\alpha$

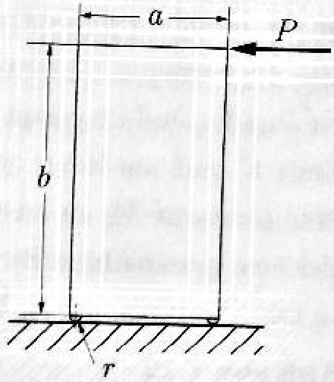
b) $F_L = (16\mu_0 \cos\alpha + 3\sin\alpha)\,G_B$

c) $F_R = (16\mu_0 \cos\alpha - 3\sin\alpha)\,G_B$

d) $\alpha < \arctan\dfrac{16\mu_0}{3}$

Aufgabe 7.9:

Ein Kasten mit den Kantenlängen a und b und dem Gewicht G steht auf halbkugelförmigen Füßen vom Radius r. Er soll durch eine waagerechte Kraft P, die an seiner oberen Kante angreift, umgeworfen werden, ohne daß er dabei auf dem Boden gleitet. Wie groß muß der Haftreibungskoeffizient μ_0 zwischen den Füßen und dem Boden mindestens sein, und welche Kraft P muß man dabei mindestens aufwenden? Der Schwerpunkt S kann in der Quadermitte angenommen werden.



Zahlenwerte:

$a = 0.5\text{m}$, $b = 1.2\text{m}$

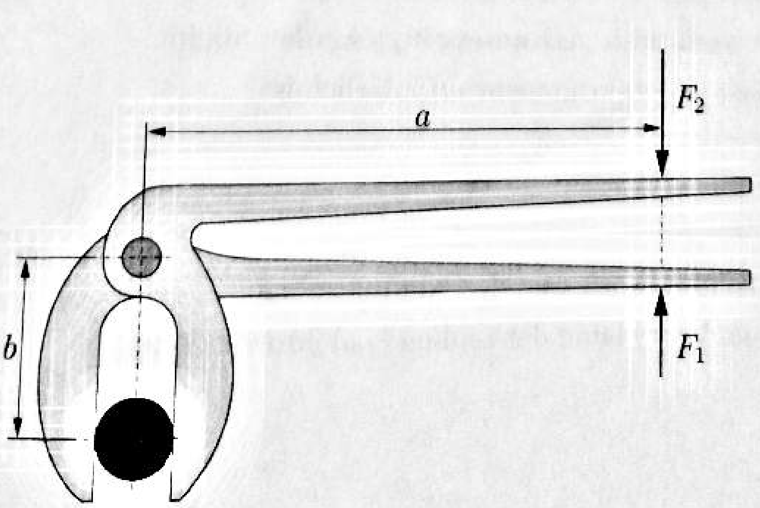
$r = 0.05\text{m}$, $G = 2400\text{N}$.

Aufgabe 7.10:

Die abgebildete Zange wird an einem fest angespannten Rohr vom Durchmesser D angesetzt und mit den beiden Kräften F_1 und F_2 ($F_1 < F_2$) zusammengedrückt.

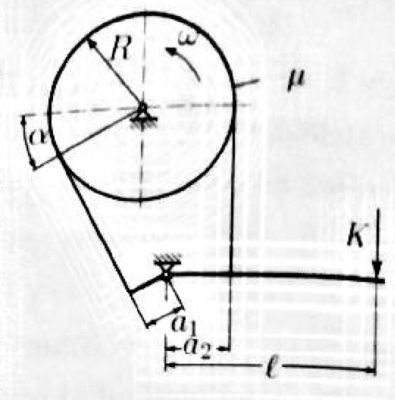
a) An welchen der beiden Berührungsstellen zwischen Rohr und Zange rutscht bei einer Vergrößerung der Kraft F_2 die Zange zuerst ab, wenn der Haftreibungskoeffizient μ_0 an beiden Berührungsstellen gleich ist?

b) Wie groß darf bei gegebebem Haftreibungskoeffizient μ_0 das Verhältnis F_2/F_1 höchstens werden, damit kein Abgleiten stattfindet?



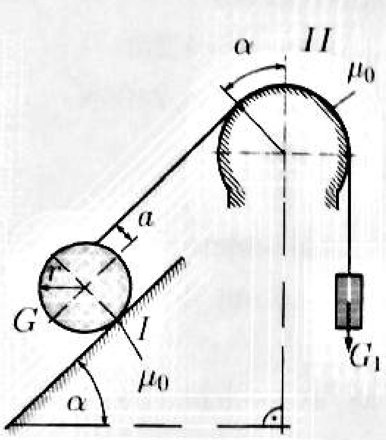
Aufgabe 7.11:

Die abgebildete Differential-Bandbremse besteht aus einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe und einem um die Scheibe aufgelegtes Band. Zwischen Scheibe und Band tritt Gleitreibung (Gleitreibungskoeffizient μ) auf. Die Enden des Bandes sind an einem Winkelhebel angelenkt. Mit welcher Kraft K muß am Hebel gedrückt werden, um ein gewünschtes Bremsmoment M_0 zu erzeugen? Wie ändert sich die Kraft bei gleichem gewünschten Bremsmoment M_0, wenn sich die Scheibe im entgegengesetzten Umlaufsinn dreht?



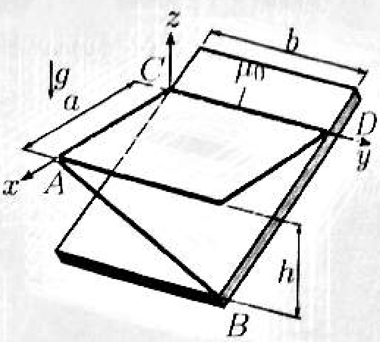
Aufgabe 7.12:

Eine zylindrische Walze (homogen, Radius r, Gewicht G) ist über ein Seil mit dem Gewicht G_1 verbunden und auf einer schiefen Ebene wie dargestellt gelagert (Haftreibungskoeffizient μ_0). Das Seil führt über einen ortsfesten Zylinder (Haftreibungskoeffizient μ_0). Bestimmen Sie die Wertebereiche für den Winkel α, bei denen an den Stellen I und II jeweils Haften auftritt. Wie muss das Gewichtsverhältnis G/G_1 eingestellt werden, damit die Haftgrenze in I und II jeweils beim selben Neigungswinkel α erreicht wird?



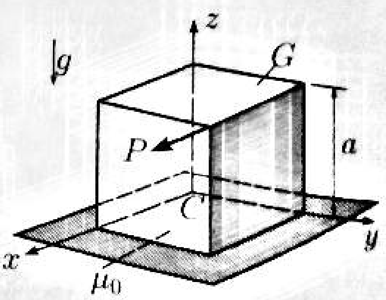
Aufgabe 7.13:

Eine dünne homogene Platte (Gewicht G) ist entlang ihrer Kante CD auf einer schiefen Ebene gelagert (Haftreibungskoeffizient μ_0). Im Punkt A wird die Platte von der Pendelstütze AB gehalten. Bestimmen Sie die Reaktionskraft und das Haftmoment an der Kante CD und die Stützkraft in A.
Wo muss die Platte vom Stab AB unterstützt werden, damit an der Kante CD kein Kontaktmoment erforderlich ist?



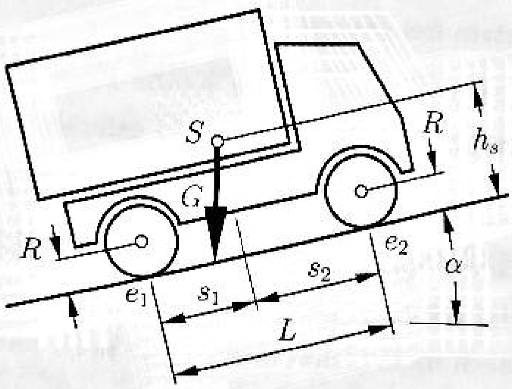
Aufgabe 7.14:

Bestimmen Sie die Kontaktkraft und das Kontaktmoment zwischen dem homogenen Würfel und der rauhen (μ_0) horizontalen Unterlage.



Aufgabe 7.15:

Ein LKW steht abgebremst auf einer rauhen Rampe. Das Gesamtgewicht G des LKW und das auf die Hinterräder wirkende Bremsmoment M_B ist bekannt. Für die Vorderräder wird angenommen, daß diese um die Radachsen reibungsfrei drehbar gelagert sind. Die Rollreibungsexzentrizitäten der Reifen sind e_1 und e_2. Zu bestimmen ist der Grenzneigungswinkel (α^*) der Rampe, bei dessen Überschreitung der LKW nach hinten rollt.



Aufgabe 7.16:

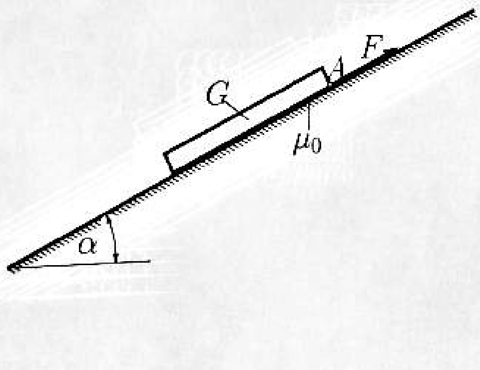
An einem, auf einer rauhen (Haftreibungsbeiwert μ_0) schiefen Ebene (Neigungswinkel α) liegenden flachen homogenen Brettchen (Eigengewicht G, Dicke vernachlässigbar) werde im Punkt A mit einer, zur schiefen Ebene parallel gerichteten Kraft F gezogen.

a) Schneiden Sie das Brett frei (Skizze) und zeichne die wirkenden Kräfte ein.

b) Für welchen Bereich $F_{min} \leq F(G, \alpha, \mu_0) \leq F_{max}$ ist die Anordnung in Ruhe?

c) Bestimmen Sie den Abstand der senkrecht zur Kontaktfläche (Quader - schiefe Ebene) wirkenden Reaktionskraft N vom Punkt A. Nimm dazu die Brettdicke mit d und die Länge des Brettes mit b an.

Gegeben: μ_0, G, α



Lösung

$$F_{max} = G\,(\sin\alpha + \mu_0 \cos\alpha)$$

Aufgabe 7.17:

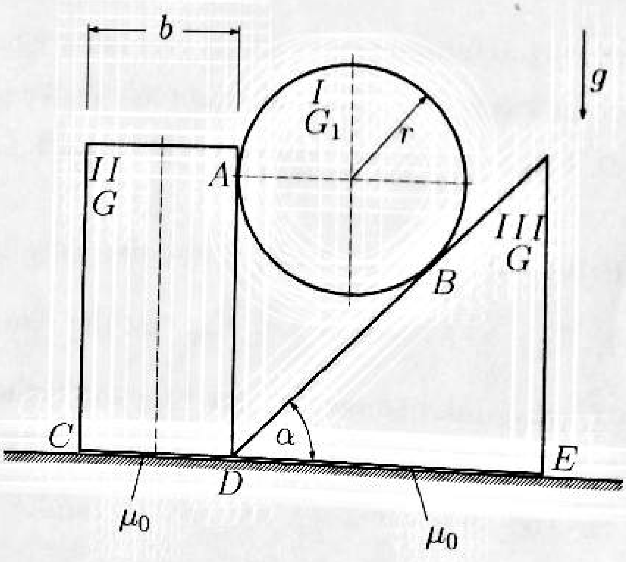
Die dargestellte Anordnung besteht aus einer homogenen Walze I (Eigengewicht G_1), einem homogenen Quader II (Eigengewicht G) und einem homogenen Dreiecksprisma III (Eigengewicht G). Die Kontaktstellen A und B sind reibungsfrei. Der Kontakt zwischen der horizontalen Unterlage und den Auflagerflächen von Quader und Prisma ist jeweils reibungsbehaftet (Haftreibungskoeffizient μ_0).

a) Schneiden Sie das System frei (Skizze).

b) Berechnen Sie die in A und B wirkenden Kräfte sowie die statisch erforderlichen Reaktionskräfte in den Kontaktflächen CD und DE.

c) Welcher der beiden Körper, Quader oder Prisma beginnt zuerst zu gleiten?

d) Geben Sie das Verhältnis Quaderbreite b zum Walzenradius r als Funktion des Winkels α und des Haftreibungskoeffizienten μ_0 für den Grenzfall an, bei dem der Quader (II) gerade noch nicht gleitet und gerade noch nicht umkippt.



Lösung

$$\frac{b}{r} = 2\mu_0 \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Aufgabe 7.18:

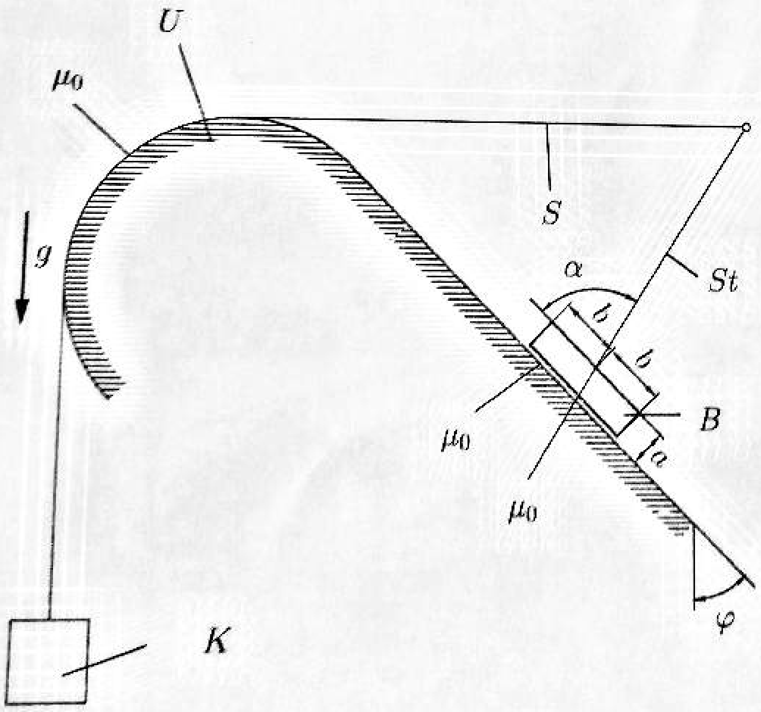
Ein masseloses undehnbares Seil S verbindet über die Umlenkrolle U (Haftreibungskoeffizient μ_0) den Körper K (Masse m_K) mit der homogenen Stange St (Masse m_S, Länge ℓ). Die Stange stützt sich unter dem Winkel α auf dem Block B (Masse m_B) wie skizziert ab, wobei zwischen den beiden Kontaktpartnern der Haftreibungskoeffizient μ_0 herrscht. Der Block haftet auf einer unter dem Winkel φ zur vertikalen geneigten Ebene (Haftreibungskoeffizient μ_0). Das System sei im Gleichgewicht.

a) Zeichnen Sie die Freikörperbilder der Körper St und B.

b) Stellen Sie die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen für die Körper K, St und B auf und berechnen Sie die unbekannten Schnittgrößen.

c) Wie groß muss der Haftreibungskoeffizient μ_0 mindestens sein, damit das System im Gleichgewicht ist?

Gegeben: $2m_K = m_S = m_B = m$; α; ℓ; μ_0; a; b; φ; g



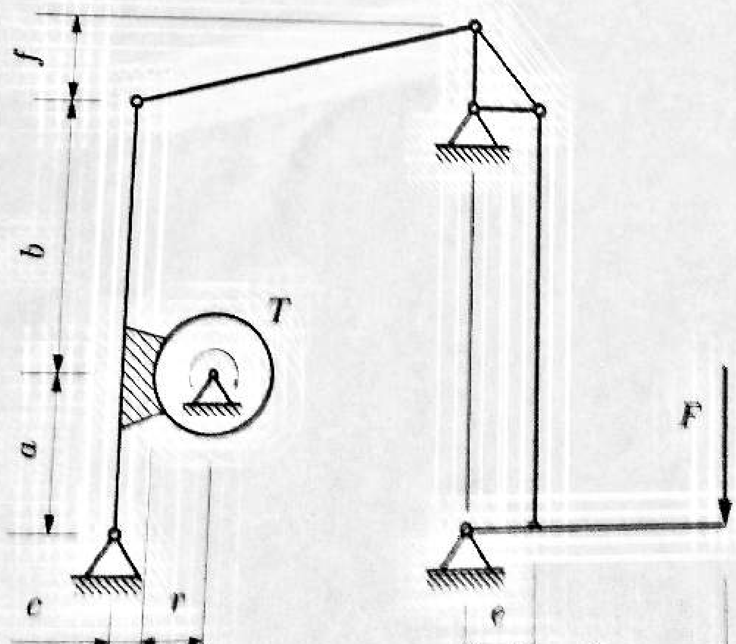
8 Prinzip der virtuellen Arbeit

Aufgabe 8.1:

Die skizzierte Backenbremse wirkt auf eine Bremstrommel. Berechnen Sie mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit diejenige Kraft **F**, die an der rechtsherum drehenden Trommel T ein Bremsmoment **M** erzeugt.
Wie ändert sich das Bremsmoment, wenn die Trommel entgegen dem Uhrzeigersinn dreht?
Berechnen Sie die Zahlenwerte für:
$a = 0,25$ m; $b = 0,40$ m; $c = 0,1$ m
$r = 0,25$ m; $e = 0,16$ m; $f = 0,05$ m
$g = 1,0$ m; $M = 250$ Nm; $\mu = 0,2$

Lösung

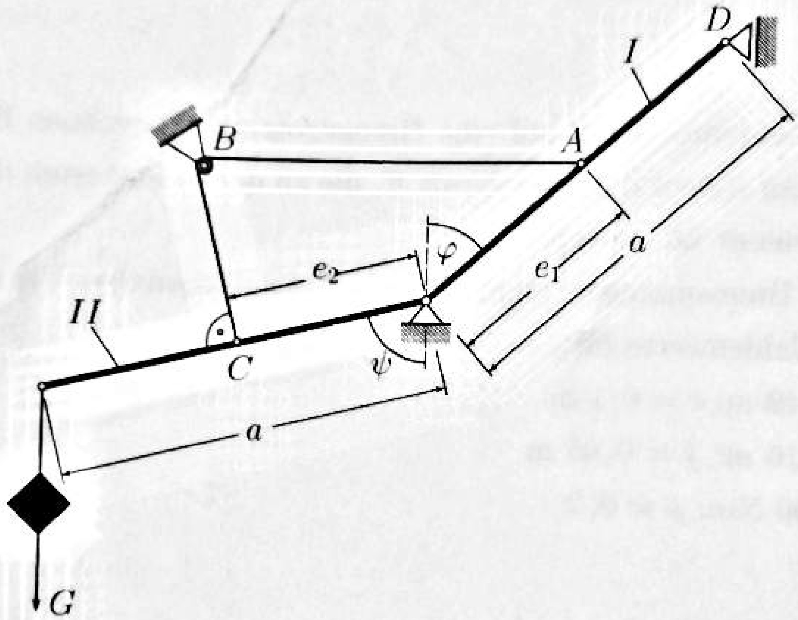
$$F = 104\ N; \quad M = 294\ Nm$$



Aufgabe 8.2:

Die Lagerkraft D ist mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit zu bestimmen.

Gegeben: Balken I und Balken II (beide gewichtslos), Gewicht G, Seil ABC (Das Seilstück AB verläuft horizontal.), Umlenkrolle B (Radius vernachlässigbar).
Systemmaße: a, e_1, e_2, φ, ψ.



Lösung

$$D = -G\frac{e_1}{e_2}\sin\psi$$