

Inhalt

Abschnitt I: Spannung und Festigkeit	4
Abschnitt II: Deformation und Verzerrung	56
Abschnitt III: Arbeit, Energie und Elastizität	80
Abschnitt IV: Stabtheorie – Dehn- und Biegestäbe	112
Abschnitt V: Stabtheorie – Querkraft und Torsion	149
Abschnitt VI: Stabtheorie – Knickstäbe und Stabilität	195

Abschnitt I

SPANNUNG UND FESTIGKEIT

1. Kolloquium WS2020/2021

1. Beispiel: Transformationsmatrix für einen Basiswechsel

Angabe:

Gegeben sind die beiden Basissysteme $\mathbf{e}_1\text{-}\mathbf{e}_2\text{-}\mathbf{e}_3$ und $\mathbf{e}'_1\text{-}\mathbf{e}'_2\text{-}\mathbf{e}'_3$ nach Abbildung 1.1. Dabei weist der Basisvektor \mathbf{e}'_2 in die negative \mathbf{e}_1 -Richtung, und die Basisvektoren \mathbf{e}'_1 und \mathbf{e}'_3 liegen in der $\mathbf{e}_2\text{-}\mathbf{e}_3$ -Ebene, sind aber um einen Winkel von 20° gedreht.

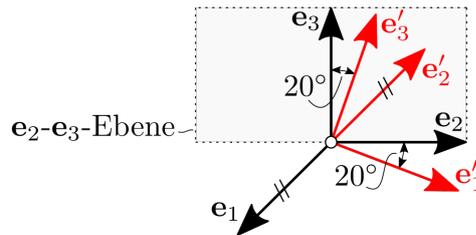


Abbildung 1.1: Basissystem $\mathbf{e}_1\text{-}\mathbf{e}_2\text{-}\mathbf{e}_3$ (in schwarz) und $\mathbf{e}'_1\text{-}\mathbf{e}'_2\text{-}\mathbf{e}'_3$ (in rot).

Gesucht: Wählen Sie die Transformationsmatrix \mathbf{Q} , die zur Transformation von Vektor- und Tensorkomponenten aus dem $\mathbf{e}_1\text{-}\mathbf{e}_2\text{-}\mathbf{e}_3$ Basissystem in das $\mathbf{e}'_1\text{-}\mathbf{e}'_2\text{-}\mathbf{e}'_3$ Basissystem dient.

$$(1) \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & +\sin(20) & +\cos(20) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(20) & +\sin(20) \end{bmatrix} \quad (2) \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & +\sin(20) & -\cos(20) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos(20) & +\sin(20) \end{bmatrix}$$
$$(3) \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & +\cos(20) & -\sin(20) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & +\sin(20) & +\cos(20) \end{bmatrix} \quad (4) \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & +\cos(20) & +\sin(20) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & +\sin(20) & +\cos(20) \end{bmatrix}$$

Lösung:

Für die Bestimmung der Komponenten der Transformationsmatrix Q_{ij} müssen wir die Winkel zwischen den Basisvektoren der „neuen“ Basis \mathbf{e}'_i und jenen der „alten“ Basis \mathbf{e}_j bestimmen. Diese ergeben sich wie folgt, wobei ersichtlich wird, dass die gesuchte Transformationsmatrix \mathbf{Q} für die Transformation aus dem $\mathbf{e}_1\text{-}\mathbf{e}_2\text{-}\mathbf{e}_3$ Basissystem in das $\mathbf{e}'_1\text{-}\mathbf{e}'_2\text{-}\mathbf{e}'_3$ Basissystem jener bei (3) entspricht.

$$\begin{aligned} \alpha_{11} \hat{=} \angle(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_1) &= 90^\circ & \rightarrow Q_{11} &= \cos(\alpha_{11}) = 0 \\ \alpha_{21} \hat{=} \angle(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_1) &= 180^\circ & \rightarrow Q_{21} &= \cos(\alpha_{21}) = -1 \\ \alpha_{31} \hat{=} \angle(\mathbf{e}'_3, \mathbf{e}_1) &= 90^\circ & \rightarrow Q_{31} &= \cos(\alpha_{31}) = 0 \\ \alpha_{12} \hat{=} \angle(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_2) &= 20^\circ & \rightarrow Q_{12} &= \cos(\alpha_{12}) = \cos(20) \\ \alpha_{22} \hat{=} \angle(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_2) &= 90^\circ & \rightarrow Q_{22} &= \cos(\alpha_{22}) = 0 \\ \alpha_{32} \hat{=} \angle(\mathbf{e}'_3, \mathbf{e}_2) &= (90 - 20)^\circ & \rightarrow Q_{32} &= \cos(\alpha_{32}) = \cos(90 - 20) = +\sin(20) \\ \alpha_{13} \hat{=} \angle(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_3) &= (90 + 20)^\circ & \rightarrow Q_{13} &= \cos(\alpha_{13}) = \cos(90 + 20) = -\sin(20) \\ \alpha_{23} \hat{=} \angle(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_3) &= 90^\circ & \rightarrow Q_{23} &= \cos(\alpha_{23}) = 0 \\ \alpha_{33} \hat{=} \angle(\mathbf{e}'_3, \mathbf{e}_3) &= 20^\circ & \rightarrow Q_{33} &= \cos(\alpha_{33}) = \cos(20) \end{aligned}$$

1. Kolloquium WS2020/2021

2. Beispiel: Gleichgewicht eines 3D-Kontinuums

Angabe:

Gegeben ist ein homogener dreidimensionaler T-förmiger Körper mit einer horizontalen Beanspruchung laut Abbildung .

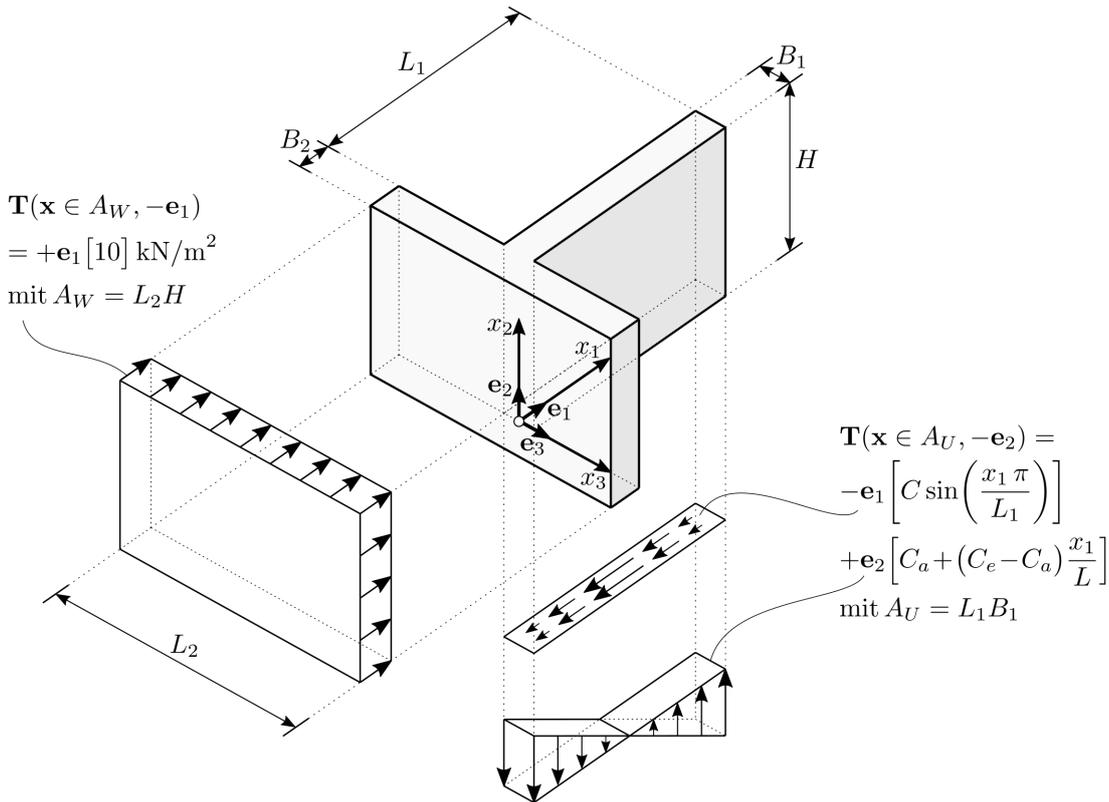


Abbildung 1.2: Dreidimensionales Kontinuum mit Traktionsvektorfeldern.

Hinweis: Das Eigengewicht ist zu vernachlässigen. Die Berücksichtigung etwaiger Teilsicherheitsbeiwerte (wie im Übungsbeispiel) ist an dieser Stelle nicht notwendig.

Gesucht: Ermitteln Sie mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen die Konstante C in $[\text{kN/m}^2]$.
 Mit: $B_1 = 0,25 \text{ m}$, $L_1 = 3,00 \text{ m}$, $B_2 = 0,25 \text{ m}$, $L_2 = 2,00 \text{ m}$, $H = 2,50 \text{ m}$.

Lösung:

Die Kräftegleichgewichtsbedingung in \mathbf{e}_1 -Richtung kann für eine statische Aufgabenstellung nach Gl.(2.8) des UE-Skriptums wie folgt angeschrieben werden:

$$\int_V [f_1] dV + \int_S [T_1] dS = 0$$

Die Berücksichtigung von $f_1 = 0$ und die Spezialisierung mit $T_1 = -C \sin \left(\frac{x_1 \pi}{L_1} \right)$ sowie $T_1 =$

10 kN/m² ergibt:

$$-C \int_{-B_1/2}^{+B_1/2} \int_0^{L_1} \left[\sin\left(\frac{x_1\pi}{L_1}\right) \right] dx_1 dx_3 + 10 \int_{-L_2/2}^{+L_2/2} \int_0^H [] dx_2 dx_3 = 0$$

Auswertung der Integrale und Umformen liefert:

$$+\frac{B_1 L_1}{\pi} [\cos(\pi) - \cos(0)] C + 10 L_2 H = 0$$
$$-\frac{2 B_1 L_1}{\pi} C + 10 L_2 H = 0$$

Die gesuchte Konstante C folgt schließlich mit:

$$C = +\frac{5\pi L_2 H}{B_1 L_1} \rightarrow C = \frac{5\pi \cdot 2,00 \cdot 2,50}{0,25 \cdot 3,00} = +104,7198 \text{ kN/m}^2$$

1. Kolloquium WS2020/2021

3. Beispiel: Räumlicher Spannungszustand

Angabe:

Gegeben sind die Komponenten eines Spannungstensors σ (mit Ausnahme der Normalspannungskomponente σ_{22}) und sein hydrostatischer Anteil σ_H , jeweils mit Bezug auf ein globales x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystem und in $[\text{kN}/\text{cm}^2]$.

$$\sigma = \begin{bmatrix} +0,50 & +0,10 & 0 \\ +0,10 & \sigma_{22} & +0,20 \\ 0 & +0,20 & -0,50 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}, \quad \sigma_H = \begin{bmatrix} +0,08\dot{3} & 0 & 0 \\ 0 & +0,08\dot{3} & 0 \\ 0 & 0 & +0,08\dot{3} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Gesucht:

- Ermittlung der fehlenden Normalspannungskomponente σ_{22} in $[\text{kN}/\text{cm}^2]$.
- Berechnung der 3. Invariante des deviatorischen Spannungsanteils $I_3^{\sigma_D}$ in $[\text{kN}^3/\text{cm}^6]$.

Lösung:

(a) Fehlende Normalspannungskomponente σ_{22}

Für die Ermittlung der fehlenden Normalspannungskomponente σ_{22} wird zunächst der deviatorische Spannungsanteil ermittelt ($\sigma_D = \sigma - \sigma_H$).

$$\sigma_D = \begin{bmatrix} +0,50 & +0,10 & 0 \\ +0,10 & \sigma_{22} & +0,20 \\ 0 & +0,20 & -0,50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +0,08\dot{3} & 0 & 0 \\ 0 & +0,08\dot{3} & 0 \\ 0 & 0 & +0,08\dot{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0,41\dot{6} & +0,100 & 0 \\ +0,100 & \sigma_{22} - 0,08\dot{3} & +0,200 \\ 0 & +0,200 & -0,58\dot{3} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

In weiterer Folge kann die 1. Invariante des deviatorischen Spannungsanteils $I_1^{\sigma_D}$ betrachtet werden, welche es ermöglicht, die fehlende Normalspannungskomponente zu ermitteln:

$$I_1^{\sigma_D} = \sigma_{D,11} + \sigma_{D,22} + \sigma_{D,33} = (+0,41\dot{6}) + (\sigma_{22} - 0,08\dot{3}) + (-0,58\dot{3}) = 0 \rightarrow \sigma_{22} = 0,250 \text{ kN}/\text{cm}^2$$

Alternativ könnte die fehlende Normalspannungskomponente σ_{22} auch mit Hilfe der Beziehung zwischen der mittleren Spannung σ_m und der 1. Invariante I_1^σ ermittelt werden.

$$\sigma_m = \frac{I_1^\sigma}{3} \rightarrow +0,08\dot{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{+0,50 + \sigma_{22} - 0,50}{3} \rightarrow \sigma_{22} = 0,250 \text{ kN}/\text{cm}^2$$

(b) Invariante $I_3^{\sigma_D}$

Berücksichtigung der Normalspannungskomponente σ_{22} im Ausdruck des Spannungsdeviators σ_D ermöglicht die Berechnung der Invariante des deviatorischen Spannungsanteils $I_3^{\sigma_D}$ gemäß Gl.(3.5) des UE-Skriptums.

$$I_3^{\sigma_D} = \begin{vmatrix} +0,41\dot{6} & +0,100 & 0 \\ +0,100 & +0,16\dot{6} & +0,200 \\ 0 & +0,200 & -0,58\dot{3} \end{vmatrix} = -0,051\,343 \text{ kN}^3/\text{cm}^6$$

1. Kolloquium WS2020/2021

4. Beispiel: Rechnen mit Vektoren (Kreuz-, Skalarprodukt)

Angabe:

Gegeben sind die Spannungskomponenten eines Spannungstensors σ in $[\text{kN}/\text{cm}^2]$ mit Bezug auf ein globales x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystems,

$$\sigma = \begin{bmatrix} -1,0 & 0 & -0,6 \\ 0 & +0,2 & 0 \\ -0,6 & 0 & -1,2 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

die drei entsprechenden Hauptnormalspannungen σ_I , σ_{II} und σ_{III} ,

$$\sigma_I = +0,2000 \text{ kN}/\text{cm}^2, \quad \sigma_{II} = -0,4917 \text{ kN}/\text{cm}^2, \quad \sigma_{III} = -1,7083 \text{ kN}/\text{cm}^2,$$

und die Richtung der Hauptnormalspannung \mathbf{e}_{III} ,

$$\mathbf{e}_{III} = \begin{bmatrix} +0,6464 \\ 0 \\ +0,7630 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}.$$

Hinweis: Beachten Sie die besondere Form des gegebenen räumlichen Spannungszustands. Einer der Basisvektoren fällt mit einer Hauptnormalspannungsrichtung zusammen.

Gesucht: Berechnen Sie das Skalarprodukt von \mathbf{e}_{II} mit \mathbf{e}_1 , wobei \mathbf{e}_I , \mathbf{e}_{II} und \mathbf{e}_{III} ein rechtshändiges Koordinatensystem bilden sollen.

Lösung:

In Anlehnung an den Hinweis erkennt man, dass der Basisvektor \mathbf{e}_2 mit einer Hauptnormalspannungsrichtung zusammenfällt, da $\sigma_{12} = \sigma_{32} = 0$ gilt. Und da σ_{22} der Hauptnormalspannung σ_I entspricht folgt $\mathbf{e}_I = \mathbf{e}_2$. Da uns nun zwei Richtungen der Hauptnormalspannungen bekannt sind, lässt sich die verbleibende Hauptnormalspannungsrichtung (für das geforderte Rechtskoordinatensystem) durch das Kreuzprodukt aus \mathbf{e}_{III} mit \mathbf{e}_I berechnen.

$$\mathbf{e}_{II} = \mathbf{e}_{III} \times \mathbf{e}_I = \begin{bmatrix} +0,6464 \\ 0 \\ +0,7630 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} = \begin{bmatrix} -0,7630 \\ 0 \\ +0,6464 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Das gesuchte Skalarprodukt folgt schließlich zu

$$\mathbf{e}_{II} \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -0,7630 \\ 0 \\ +0,6464 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} = (-0,7630) + (0) + (0) = -0,7630$$

1. Kolloquium WS2020/2021

5. Beispiel: Festigkeitskriterium nach MOHR-COULOMB

Angabe:

Gegeben ist ein biaxialer Spannungszustand σ mit Bezug auf ein globales x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystem, wobei eine Normalspannungskomponente dreimal so groß ist wie die Zweite.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_{cb} & 0 \\ 0 & 0 & -3f_{cb} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Gesucht: Ermittlung der biaxialen Druckfestigkeit f_{cb} in $[\text{kN}/\text{cm}^2]$ auf Basis des Festigkeitskriteriums nach MOHR-COULOMB mit einem Winkel der inneren Reibung von $\varphi = 12,5^\circ$ und einer Kohäsion von $c = 1,5 \text{ kN}/\text{cm}^2$.

Lösung:

Da der biaxiale Spannungszustand σ frei von Schubspannungen ist ($\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$), können die Hauptnormalspannungen direkt identifiziert werden.

$$\sigma_I = 0 \text{ kN}/\text{cm}^2, \quad \sigma_{II} = -f_{cb} \text{ kN}/\text{cm}^2, \quad \sigma_{III} = -3f_{cb} \text{ kN}/\text{cm}^2$$

Berücksichtigung der Hauptnormalspannungen σ_I und σ_{III} , sowie des Winkels der inneren Reibung $\varphi = 12,5^\circ$ und der Kohäsion $c = 1,5 \text{ kN}/\text{cm}^2$ im Versagenskriterium nach MOHR-COULOMB [in Anlehnung an die Berührbedingung nach Gl.(7.3) des UE-Skriptums], sodass es gerade zum Versagen kommt [$f_{MC}(\sigma) = 0$] liefert

$$f_{MC}(\sigma) = (0) \cdot \frac{1 + \sin(12,5)}{2 \cdot 1,5 \cdot \cos(12,5)} - (-3f_{cb}) \cdot \frac{1 - \sin(12,5)}{2 \cdot 1,5 \cdot \cos(12,5)} - 1 = 0$$

Auflösen des Versagenskriteriums nach MOHR-COULOMB nach f_{cb} ergibt

$$f_{cb} = \frac{2 \cdot 1,5 \cdot \cos(12,5)}{3 \cdot [1 - \sin(12,5)]}$$

sodass die biaxiale Druckfestigkeit f_{cb} schließlich mit $1,25 \text{ kN}/\text{cm}^2$ folgt.

1. Kolloquium WS2020/2021

6. Beispiel: Festigkeitskriterium nach DRUCKER-PRAGER

Angabe:

Gegeben sind die Komponenten eines räumlichen Spannungszustands σ in $[\text{kN}/\text{cm}^2]$ mit Bezug auf ein globales x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystems.

$$\sigma = \begin{bmatrix} +0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & -2,0 & 0 \\ -0,5 & 0 & -2,5 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Gesucht: Ermitteln Sie den Laststeigerungsfaktor λ_{DP} , mit dem der gegebene Spannungszustand σ proportional gesteigert werden kann, damit es nach dem DRUCKER-PRAGER-Kriterium (mit den Festigkeitsparametern $k = 0,5612 \text{ kN}/\text{cm}^2$ und $\alpha = 1,171 [-]$) gerade zum Materialversagen kommt.

Lösung:

Für das Festigkeitskriterium nach DRUCKER-PRAGER benötigen wir die 2.Invariante des Spannungsdeviators J_2^σ und die mittlere Normalspannung σ_m , welche wir wie folgt berechnen können.

$$J_2^\sigma = \frac{1}{6} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + (\sigma_{12})^2 + (\sigma_{23})^2 + (\sigma_{31})^2$$

$$J_2^\sigma = \frac{1}{6} \left[(0,5 - (-2,0))^2 + ((-2,0) - (-2,5))^2 + ((-2,5) - 0,5)^2 \right] + (0)^2 + (0)^2 + (-0,5)^2$$

$$J_2^\sigma = 2,8\dot{3} \text{ kN}^2/\text{cm}^4$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} [\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}] = \frac{1}{3} [0,5 - 2,0 - 2,5] = -1,\dot{3} \text{ kN}/\text{cm}^2$$

Berücksichtigung der beiden Werte, sowie der Festigkeitsparameter $k = 0,5612 \text{ kN}/\text{cm}^2$ und $\alpha = 1,171 [-]$ in der Versagensfunktion nach DRUCKER-PRAGER ergibt:

$$f_{DP}(\sigma) = \sqrt{J_2^\sigma} + \alpha \sigma_m - k = \underbrace{\sqrt{2,8\dot{3}} + 1,171 \cdot (-1,3)}_{0,1219 \text{ kN}/\text{cm}^2} - 0,5612 = -0,4393 \leq 0 \rightarrow \text{Fall 1}$$

Der untersuchte Spannungszustand führt somit nicht zum Materialversagen. Der Laststeigerungsfaktor λ_{DP} , damit es nach dem DRUCKER-PRAGER-Kriterium gerade zum Materialversagen kommt, folgt mit:

$$f_{DP}(\sigma) = \lambda_{DP} (0,1219) - 0,5612 = 0$$

$$\lambda_{DP} = \frac{0,5612}{0,1219} = 4,60$$

1. Kolloquium WS2020/2021

7. Beispiel: Lokales Gleichgewicht – Volumenkraftdichtevektor

Angabe:

Gegeben ist ein inhomogenes Spannungsfeld $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ in [kN/cm²] als Funktion der Ortskoordinate $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ in Bezug auf ein globales x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystem.

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 5 + 3x_1 & 0 & 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 \\ 0 & -1 + 8x_2 & 0 \\ 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 & 0 & -2x_1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Gesucht: Ermitteln Sie mit Hilfe der lokalen Gleichgewichtsbedingung die Länge des Volumenkraftdichtevektors $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$ in [kN/cm³], sodass infolge f_1 , f_2 und f_3 das Spannungsfeld im gesamten Körper im Gleichgewicht steht.

Lösung:

Die lokale Gleichgewichtsbedingung, $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, kann in Komponentenschreibweise wie folgt angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der partiellen Ableitung der einzelnen Spannungskomponenten folgenden entsprechende Bestimmungsgleichungen für die Volumenkraftdichtevektor-Komponenten, welche sich schlussendlich wie folgt ergeben:

$$\begin{aligned} 3 + 0 + 4 + f_1 &= 0 \rightarrow f_1 = -7 \text{ kN/cm}^3 \\ 0 + 8 + 0 + f_2 &= 0 \rightarrow f_2 = -8 \text{ kN/cm}^3 \\ 5 + 0 + 0 + f_3 &= 0 \rightarrow f_3 = -5 \text{ kN/cm}^3 \end{aligned}$$

Die gesuchte Länge des Volumenkraftdichtevektors folgt mit:

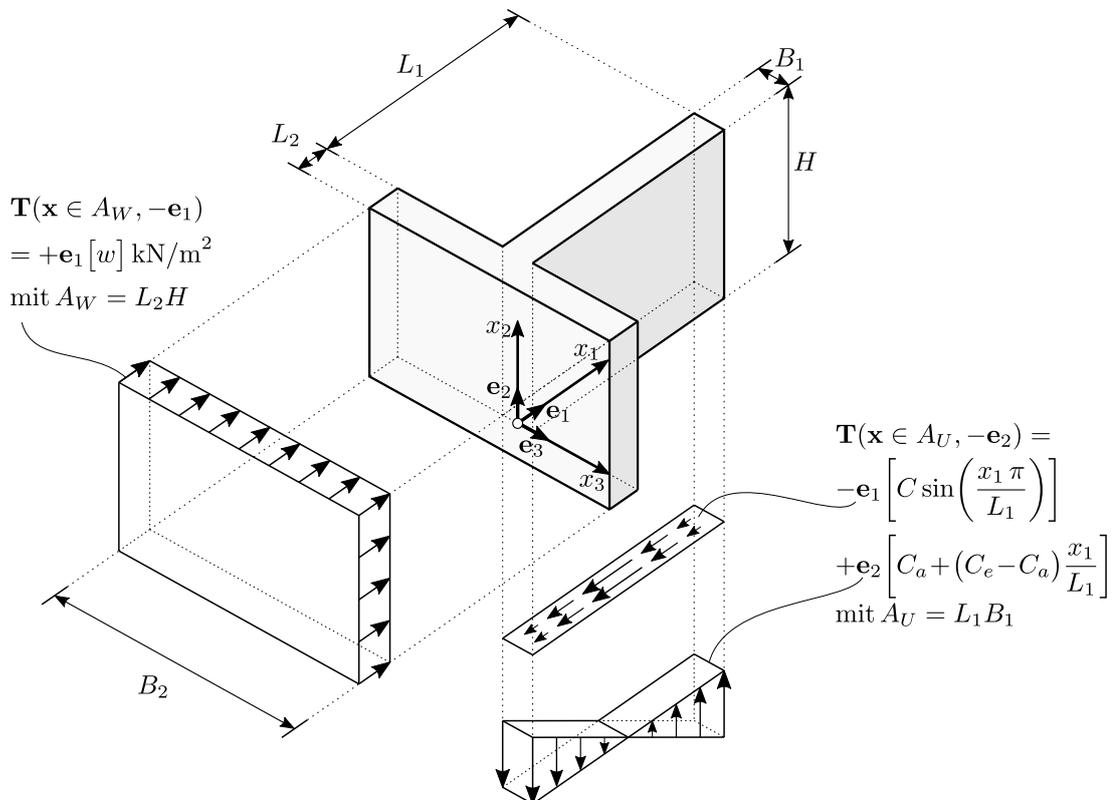
$$|\mathbf{f}(\mathbf{x})| = \sqrt{(f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-8)^2 + (-5)^2} = 11,75 \text{ kN/cm}^3$$

Ersatzkolloquium WS2020/2021

4. Beispiel: Gleichgewicht eines 3D-Kontinuums

Angabe: Gegeben ist ein horizontal beanspruchter dreidimensionaler Körper. Alle am Körper angreifenden Traktionskräfte sind bezüglich einer orthonormalen Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ gegeben. Das Eigengewicht ist zu vernachlässigen. Die Abmessungen des Körpers sind: $B_1 = 0,25 \text{ m}$, $L_1 = 3,00 \text{ m}$, $B_2 = 2,00 \text{ m}$, $L_2 = 0,25 \text{ m}$, $H = 2,50 \text{ m}$, $w = 10 \text{ kN/m}^2$. Die Momentengleichgewichtsbedingung um die \mathbf{e}_3 lautet:

$$+\left[\frac{1}{6}C_a + \frac{1}{3}C_e\right]B_1L_1^2 - \left[\frac{1}{2}w\right]B_2H^2 = 0$$



Gesucht: Ermitteln Sie mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen die Konstante C_a in $[\text{kN/m}^2]$.

Lösung: Die Kräftegleichgewichtsbedingung in \mathbf{e}_2 -Richtung ergibt sich unter der Berücksichtigung von $f_2 = 0$ und für die Spezifizierung von $T_{A,2}$ mit $C_a + (C_e - C_a)\frac{x_1}{L_1}$ zu:

$$+(C_a) \int_{-B_1/2}^{+B_1/2} \int_0^{L_1} [] dx_1 dx_3 + \left[(C_e - C_a) \frac{1}{L_1} \right] \int_{-B_1/2}^{+B_1/2} \int_0^{L_1} [x_1] dx_1 dx_3 = 0$$

Auswertung der Integrale und Umformen liefert:

$$+(C_a)L_1B_1 + \left[(C_e - C_a) \frac{1}{L_1} \right] \frac{L_1^2}{2} B_1 = 0 \rightarrow +\left[\frac{1}{2}C_a + \frac{1}{2}C_e \right] B_1 L_1 = 0$$

Die gesuchte Konstante C_a folgt schließlich durch das Auflösen der zuvor ermittelten Kräfte- und der gegebenen Momentengleichgewichtsbedingung:

$$C_a = -\frac{3wB_2H^2}{B_1L_1^2}, C_e = +\frac{3wB_2H^2}{B_1L_1^2} \rightarrow C_a = -\frac{3 \cdot 10 \cdot 2,00 \cdot (2,50)^2}{0,25 \cdot (3,00)^2} = -166,67 \text{ kN/m}^2$$

Ersatzkolloquium WS2020/2021

5. Beispiel: Räumlicher Spannungszustand – Fehlende Komponenten und Traktionsvektorkomponente

Angabe:

Gegeben sind die Komponenten eines Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ (mit Ausnahme der Normalspannungskomponenten σ_{11}, σ_{33}) mit Bezug auf ein $\mathbf{e}_1\text{-}\mathbf{e}_2\text{-}\mathbf{e}_3$ Basissystem sowie mit Bezug auf ein $\mathbf{e}_I\text{-}\mathbf{e}_{II}\text{-}\mathbf{e}_{III}$ Basissystem (mit Ausnahme der Hauptnormalspannungskomponente σ_{III}), jeweils in $[\text{kN}/\text{cm}^2]$,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & -3,6 \\ 0 & -3,5 & 0 \\ -3,6 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 7,7706 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3706 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$

sowie die Richtung der Hauptnormalspannung \mathbf{e}_I und \mathbf{e}_{II} :

$$\mathbf{e}_I = \begin{bmatrix} +0,8564 \\ 0 \\ -0,5164 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad \mathbf{e}_{II} = \begin{bmatrix} -0,5164 \\ 0 \\ -0,8564 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Gesucht: Ermittlung der Normalspannungskomponente σ in $[\text{kN}/\text{cm}^2]$, welche auf ein Flächenelement mit dem Normalenvektor $\mathbf{n} = +[0,3714]\mathbf{e}_1 + [0]\mathbf{e}_2 + [0,9285]\mathbf{e}_3$ wirkt.

Lösung:

Da die Ebene mit Flächennormaler \mathbf{e}_2 frei von Schubspannungen ist, entspricht die Normalspannungskomponente σ_{22} einer Hauptnormalspannung. Im vorliegenden Fall der Hauptnormalspannung σ_{III} und die zugehörige Richtung \mathbf{e}_{III} entspricht dem Basisvektor \mathbf{e}_2 .

Somit sind alle Hauptnormalspannungen und die zugehörigen Richtungsvektoren bekannt. Letztere erlauben das Aufstellen einer Transformationsmatrix \mathbf{Q} , sodass die Komponenten des Normalenvektors \mathbf{n} mit Bezug auf das $\mathbf{e}_I\text{-}\mathbf{e}_{II}\text{-}\mathbf{e}_{III}$ Basissystem ermittelt werden können.

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_I \\ n_{II} \\ n_{III} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} = \begin{bmatrix} e_{I,1} & e_{I,2} & e_{I,3} \\ e_{II,1} & e_{II,2} & e_{II,3} \\ e_{III,1} & e_{III,2} & e_{III,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} = \begin{bmatrix} -0,1614 \\ -0,9870 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}$$

Mit Hilfe der Cauchy'schen Formel $\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ kann der Traktionsvektors $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ bestimmt werden und durch die Projektion des Traktionsvektors $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ auf den Normalenvektor \mathbf{n} erhält man die gesuchte Normalspannung σ .

$$\sigma = \begin{bmatrix} n_I \\ n_{II} \\ n_{III} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_I \\ n_{II} \\ n_{III} \end{bmatrix} = -0,1586 \text{ kN}/\text{cm}^2$$

Ersatzkolloquium WS2020/2021

6. Beispiel: Festigkeitskriterium nach MOHR-COULOMB – Laststeigerungsfaktor

Angabe:

Gegeben sind die Komponenten (in $[\text{kN}/\text{m}^2]$) bezüglich einer orthonormalen Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, eines Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -25 & 0 & -40 \\ 0 & +20 & 0 \\ -40 & 0 & -250 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Gesucht: Ermitteln Sie den Laststeigerungsfaktor λ_{MC} , mit dem der gegebene Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}$ proportional gesteigert werden kann, damit es nach dem MOHR-COULOMB-Kriterium (mit dem inneren Reibungswinkel $\varphi = 22,5^\circ$ und der Kohäsion $c = 125 \text{ kN}/\text{m}^2$) gerade zum Materialversagen kommt.

Lösung:

Eine der drei Hauptnormalspannungen kann mit $\sigma_{\text{I}} = \sigma_{22}$ direkt identifiziert werden und die verbleibenden Hauptnormalspannungen können mit Hilfe der Formeln eines ebenen Spannungszustandes in der x_3 - x_1 -Ebene bestimmt werden.

$$\sigma_{\text{II}(\text{III})} = \frac{\sigma_{33} + \sigma_{11}}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{\sigma_{33} - \sigma_{11}}{2}\right]^2 + [\sigma_{31}]^2} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{\text{II}} = -18,1005 \text{ kN}/\text{m}^2 \\ \sigma_{\text{III}} = -256,8995 \text{ kN}/\text{m}^2 \end{cases}$$

Die (sortierten) Hauptnormalspannungen für den gegebenen Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}$ folgen mit:

$$\sigma_I = \sigma_{\text{I}} + 20 \text{ kN}/\text{m}^2 \quad \sigma_{II} = \sigma_{\text{II}} = -18,1005 \text{ kN}/\text{m}^2 \quad \sigma_{III} = \sigma_{\text{III}} = -256,8995 \text{ kN}/\text{m}^2$$

Berücksichtigung der Hauptnormalspannungen σ_I und σ_{III} , sowie der Parameter $\varphi = 22,5^\circ$ und $c = 125 \text{ kN}/\text{m}^2$ in der Versagensfunktion nach MOHR-COULOMB ergibt:

$$f_{MC}(\boldsymbol{\sigma}) = \underbrace{+20 \frac{1 + \sin(22,5)}{2 \cdot 125 \cdot \cos(22,5)} + 256,8995 \frac{1 - \sin(22,5)}{2 \cdot 125 \cdot \cos(22,5)}}_{0,8063} - 1 \leq 0 \rightarrow \text{Fall 1}$$

Der Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}$ führt somit nicht zum Materialversagen. Der proportionale Laststeigerungsfaktor λ_{MC} , damit es nach dem MOHR-COULOMB-Kriterium gerade zum Materialversagen kommt, folgt mit:

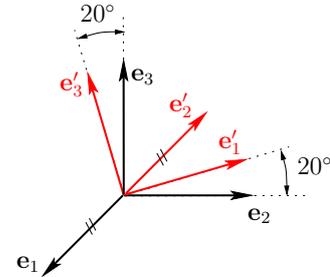
$$f_{MC}(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda_{MC}(0,8063) - 1 = 0 \rightarrow \lambda_{MC} = 1,2402 [-]$$

1. Kolloquium WS2019/2020

3. Beispiel: Spannungsanalyse

Angabe:

Gegeben ist ein homogener Spannungszustand σ_A in einem Probekörper mit den Komponenten bezüglich der kartesischen Basis e_1, e_2, e_3 , sowie ein Richtungsvektor \mathbf{r} mit den Komponenten bezüglich der kartesischen Basis e'_1, e'_2, e'_3 . Der Basisvektor e'_2 weist in negative e_1 -Richtung, die Basisvektoren e'_1 und e'_3 liegen in der e_2 - e_3 -Ebene, sind aber um einen Winkel von 20° gedreht, siehe Abbildung.



$$\sigma_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{e_1, e_2, e_3} \text{ MPa} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{e'_1, e'_2, e'_3}$$

Gesucht

1. Ermitteln Sie die Transformationsmatrix \mathbf{Q} , die zur Transformation von Tensorkomponenten aus dem e_1, e_2, e_3 in das e'_1, e'_2, e'_3 Basissystem dient und berechnen Sie anschließend die Komponenten des Spannungstensors σ_A bezüglich des e'_1, e'_2, e'_3 Basissystems.
2. Berechnen Sie den Winkel zwischen \mathbf{r} und e_3 .
3. Berechnen Sie die Normal- und Schubspannungskomponenten (σ, τ) , die auf ein Flächenelement mit Normalenvektor \mathbf{r} wirken.
4. Zusätzlich zum Spannungszustand σ_A laut Angabe wirkt noch ein einaxialer Spannungszustand $\sigma_B = p e_1 \otimes e_1$, sodass gilt $\sigma_C = \sigma_A + \sigma_B$. Ermitteln Sie das Intervall für p , $p_{\min} \leq p \leq p_{\max}$, sodass die maximalen Schubspannungen im Probekörper zufolge σ_C einen Wert von 5 MPa nicht überschreiten. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg mithilfe der MOHRschen Spannungskreise.

Lösung:

1. Transformationsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \cos 20^\circ & \sin 20^\circ \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{pmatrix}$$

Transformationsregel für Tensorkomponenten von Tensoren 2. Stufe

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \text{sym} & & \sigma'_{33} \end{pmatrix}_{e'_1, e'_2, e'_3} = \mathbf{Q} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{sym} & & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{e_1, e_2, e_3} \cdot \mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} 3.21 & 0 & 3.83 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & -3.21 \end{pmatrix}_{e'_1, e'_2, e'_3} \text{ MPa}$$

2. Transformation der Komponenten des Basisvektors \mathbf{e}_3 in die neue Basis:

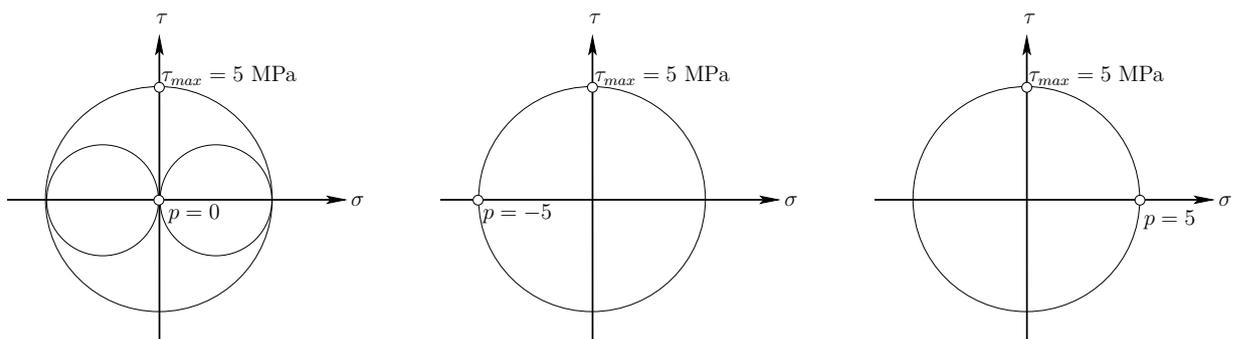
$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{Q} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{e_1, e_2, e_3} = \begin{pmatrix} \sin 20^\circ \\ 0 \\ \cos 20^\circ \end{pmatrix}_{e'_1, e'_2, e'_3}$$

Winkel zwischen \mathbf{e}_3 und \mathbf{r} (Auswertung bezüglich neuer Basis):

$$\angle \mathbf{e}_3, \mathbf{r} = \arccos \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{e}_3| |\mathbf{r}|} = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sin 20^\circ \\ 0 \\ \cos 20^\circ \end{pmatrix}_{e'_1, e'_2, e'_3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{e'_1, e'_2, e'_3} \right] = 42.27^\circ$$

$$3. \mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \begin{pmatrix} 4.07 \\ 0 \\ 0.36 \end{pmatrix}_{e'_1, e'_2, e'_3} \text{ MPa} \quad \Rightarrow \sigma = 2.55 \text{ MPa}, \tau = 3.18 \text{ MPa}$$

4. Die Hauptnormalspannungen für den gegebenen reinen Schubspannungszustand $\boldsymbol{\sigma}_A$ betragen $\sigma_I^A = 5 \text{ MPa}$, $\sigma_{II}^A = 0 \text{ MPa}$, und $\sigma_{III}^A = -5 \text{ MPa}$, die maximale Schubspannung daher 5 MPa , siehe Mohrsche Kreise links ($p = 0$). Die maximale Schubspannung des Spannungszustandes $\boldsymbol{\sigma}_C$ würde steigen, wenn der größte Mohrsche Spannungskreis wachsen würde. Möchte man das nicht, dann *muss* gewährleistet sein, dass die mittlere Hauptnormalspannung σ_{II}^C zwischen den Grenzen $-5 \leq \sigma_{II}^C \leq +5 \text{ MPa}$ bleibt. Da in diesem Fall $\sigma_{II}^C = p$ gilt, ist das gesuchte Intervall $-5 \leq p \leq +5 \text{ MPa}$.



Ersatzkolloquium WS2018/2019

3. Beispiel: Versagenskriterien und Spannungszustände

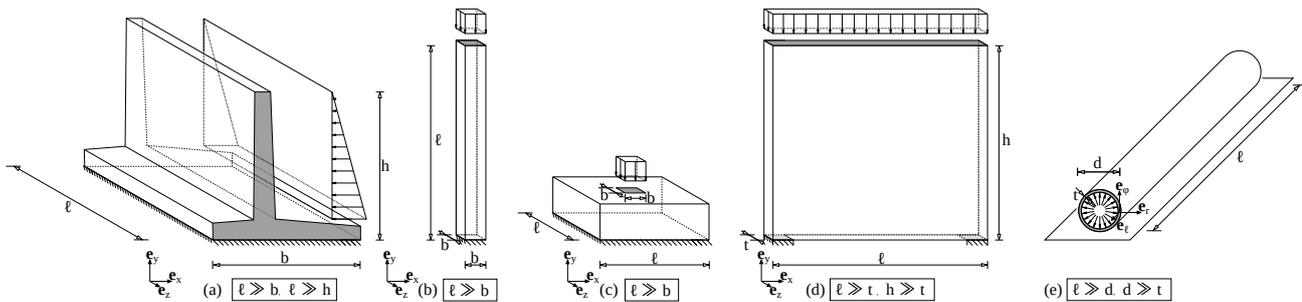
Angabe:

Gegeben sind zwei Spannungszustände, die zum Versagen des Betons geführt haben:

$$\sigma_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}_{e_1, e_2, e_3} \text{ MPa} \quad \sigma_B = \begin{bmatrix} -35 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}_{e_1, e_2, e_3} \text{ MPa}$$

Gesucht:

- Bestimmen Sie die einaxiale Druckfestigkeit f_c und die einaxiale Zugfestigkeit f_t bei Zugrundelegung eines Versagenkriteriums nach MOHR-COULOMB.
- Bestimmen Sie die einaxiale Druckfestigkeit f_c und die einaxiale Zugfestigkeit f_t bei Zugrundelegung eines Versagenkriteriums nach DRUCKER-PRAGER.
- Abschnitt III: Ordnen Sie jedem der unten mit (a) bis (e) bezeichneten Körper ein sinnvolles mechanisches Konzept (ESZ, EVZ, 3D) zur Bestimmung des Spannungs- und Verzerrungszustandes zu. Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie jene Spannungs- bzw. Verzerrungstensor-komponenten angeben, die gleich Null sind. Das Eigengewicht kann vernachlässigt werden.



Lösung:

a. $f_c = 50 \text{ MPa}$

$$50 (1 - \sin(\varphi)) = -35 (1 + \sin(\varphi)) + 100 (1 - \sin(\varphi))$$

$$\sin(\varphi) = \frac{100-50-35}{100-50+35} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{3}{17}\right) \approx 0,177400$$

$$50 \text{ MPa} (1 - \sin(\varphi)) = f_t (1 + \sin(\varphi)) \Rightarrow f_t = \frac{50 \text{ MPa} (1 - \sin(\varphi))}{1 + \sin(\varphi)} = 35 \text{ MPa}$$

b. $f_c = 50 \text{ MPa}$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} |-50| + \alpha \frac{-50}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}} |100 - 35| + \alpha \left(\frac{2-35}{3} + \frac{-100}{3}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{3}} |-50| \text{ MPa} + \alpha \frac{-50 \text{ MPa}}{3} = \frac{175\sqrt{3}}{12} \Rightarrow f_t = \frac{350 \text{ MPa}}{9} = 38,8 \text{ MPa}$$

c. (a) EVZ: Die Verzerrung in Längsrichtung ist gleich null: $\varepsilon_{zz} = 0$

(b) ESZ: Es herrsche ein einaxialer Spannungszustand in Stablängsrichtung ($\sigma_{yy} \neq 0$):

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 0$$

(c) 3D: Aufgrund der lokalen rechteckigen Lasteinleitung treten dort allgemeine Spannungszustände, bzw allgemeine Verzerrungszustände auf.

(d) ESZ: Die Spannungen in Dickenrichtung sind gleich null (Scheibe): $\sigma_{zz} = 0$

(e) EVZ&ESZ:

(e-i) EVZ weil: Die Verzerrung in Längsrichtung ist gleich null: $\varepsilon_{\ell\ell} = 0$

(e-ii) ESZ weil: Die Spannungen in Radialrichtung sind vernachlässigbar gegenüber denen in Tangentialrichtung ($\sigma_{\varphi\varphi} \gg \sigma_{rr} \approx 0$). Vergleiche auch Kapitel "SZylindrischer Stahltank".

1. Kolloquium WS2018/2019

3. Beispiel: MOHRsche Spannungskreise

Angabe:

Gegeben ist ein Spannungszustand

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad \text{kN/cm}^2.$$

Gesucht:

- Bestimmen Sie die Hauptnormalspannungen sowohl rechnerisch als auch grafisch. Lösen Sie diese Fragestellung *ohne* die Formulierung eines Eigenwert/Eigenvektor-Problems und *ohne* Verwendung der Formeln von CARDANO.
Hinweis: Achten Sie bei der grafischen Bestimmung auf die Nachvollziehbarkeit der Konstruktionsschritte (z.B. durch Nummerierung).
- Bestimmen Sie rechnerisch die Richtungen *aller* Hauptnormalspannungen. Geben Sie die Richtungen aller Hauptnormalspannungen sowohl in der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Basis, als auch in der $\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}$ -Basis an. Die Richtungen der Hauptnormalspannungen sollen jeweils ein Rechtskoordinatensystem bilden. Lösen Sie diese Fragestellung *ohne* die Formulierung eines Eigenwert/Eigenvektor-Problems.
- Stellen Sie die Versagensgeraden des MOHR-COULOMB-Kriteriums $|\tau| \leq c - \sigma \cdot \tan(\varphi)$ mit $c = 5 \text{ kN/cm}^2$ und $\tan(\varphi) = 0,5$ in den Spannungskreisen von Punkt a dar. Schraffieren Sie in den Spannungskreisen von Punkt a außerdem die *unzulässigen* Bereiche.
- Bestimmen Sie einen Faktor λ , sodass der aus $\boldsymbol{\sigma}_d = \lambda \cdot \boldsymbol{\sigma}$ resultierende größte Spannungskreis die Versagensgeraden aus Punkt c gerade berührt und somit (anders als in Punkt c) keine unzulässigen Bereiche existieren.
- Bestimmen Sie (unabhängig vom gegebenen Spannungszustand) die maximale Normalspannung σ_{max} , die bei Annahme des Versagenskriteriums aus Punkt c auftreten kann (ohne dass es zu Versagen kommt). Geben Sie auch den Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}_e$ bei Erreichen von σ_{max} an. Welcher ausgezeichnete Spannungszustand tritt hier auf?

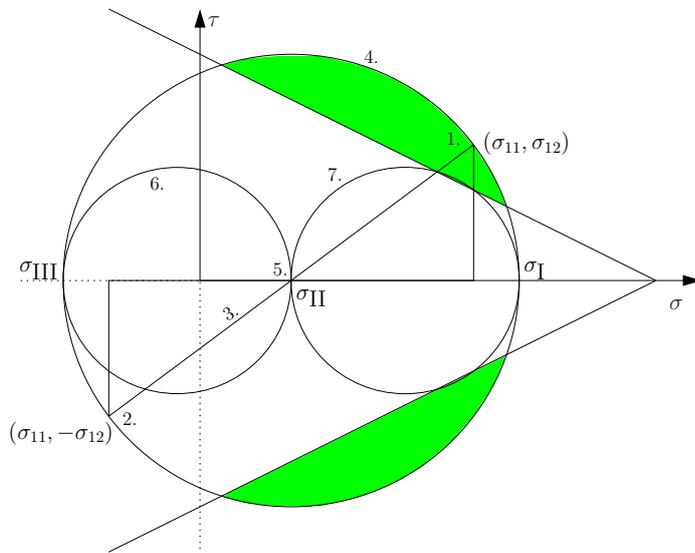
Lösung:

a. Rechnerische Lösung mittels vereinfachter Formeln für einen ESZ (Drehung in der Ebene) ergibt

$$\sigma_{\text{I}(\text{II})} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = -3 \quad \text{bzw.} \quad + 7 \text{ kN/cm}^2.$$

Die dritte Hauptnormalspannung kann direkt abgelesen werden mit $\sigma_{\text{III}} = 2 \text{ kN/cm}^2$. Somit $\sigma_{\text{I}} = 7 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_{\text{II}} = 2 \text{ kN/cm}^2$ und $\sigma_{\text{III}} = -3 \text{ kN/cm}^2$.

Grafische Lösung siehe Grafik.



b. Aus der Angabe folgt unmittelbar $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{\text{II}} = (0; 0; 1)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T$. Weiters ist der Drehwinkel der $\mathbf{e}_1/\mathbf{e}_2$ -Ebene in die Hauptspannungsrichtung bestimmbar zu $\tan(2\alpha) = 2\sigma_{12}/(\sigma_{11} - \sigma_{22}) = 3/4$ und somit $\alpha = 18,43^\circ$. Daraus ergibt sich

$$\mathbf{e}_{\text{I}} = (\cos(\alpha); \sin(\alpha); 0)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T = (0,9487; 0,3162; 0)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T \quad \text{und}$$

$$\mathbf{e}_{\text{III}} = (\sin(\alpha); -\cos(\alpha); 0)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T = (0,3162; -0,9487; 0)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T. \quad \text{Au-$$

$$\text{ßerdem gilt } \mathbf{e}_{\text{I}} = (1; 0; 0)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{\text{II}}, \mathbf{e}_{\text{III}}}^T, \quad \mathbf{e}_{\text{II}} = (0; 1; 0)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{\text{II}}, \mathbf{e}_{\text{III}}}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{\text{III}} = (0; 0; 1)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{\text{II}}, \mathbf{e}_{\text{III}}}^T.$$

c. Grafische Lösung siehe Grafik.

d. Anwendung des MOHR-COULOMB-Kriteriums.

$$f_{MC}(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda \left(\sigma_{\text{I}} \frac{1 + \sin(\varphi)}{2c \cos(\varphi)} - \sigma_{\text{III}} \frac{1 - \sin(\varphi)}{2c \cos(\varphi)} \right) - 1 = 0$$

ergibt umgeformt $\lambda = 0,7587$.

e. Bestimme den Schnittpunkt der Versagensgeraden mit der σ -Achse zu $\sigma_{\text{max}} = 10 \text{ kN/cm}^2$.

Für zu einem Punkt degenerierende Spannungskreise muss $\sigma_{\text{I}} = \sigma_{\text{II}} = \sigma_{\text{III}} = \sigma_{\text{max}}$, folglich

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \text{ kN/cm}^2.$$

Es handelt sich somit um einen hydrostatischen Spannungszustand.

1. Kolloquium WS2017/2018

1. Beispiel: Leimfuge

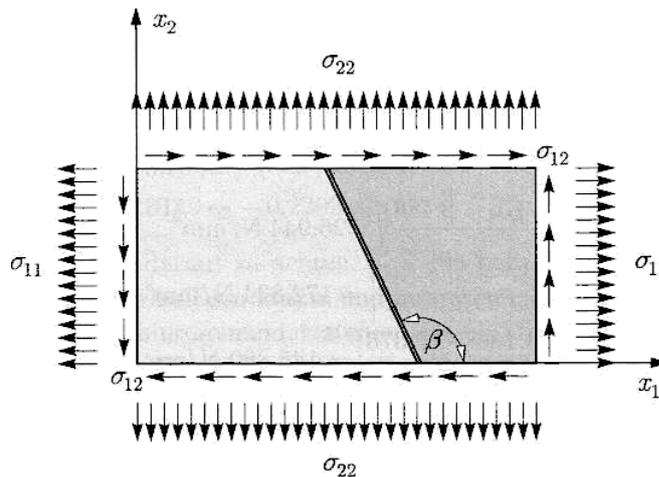
Angabe:

Gegeben ist ein Holzpaneel mit einer Leimfuge, welche mit der Horizontalen den Winkel β einschließt (siehe Skizze). Das Holzpaneel besteht aus einer homogenen und isotropen Spanplatte. Die Belastung führt zu einem homogenen, ebenen Spannungszustand:

$$\sigma_{11} = 300,00 \text{ N/cm}^2; \quad \sigma_{12} = 346,41 \text{ N/cm}^2; \quad \sigma_{22} = -100,00 \text{ N/cm}^2.$$

Das RANKINESche Festigkeitskriterium lautet:

$$\sigma \leq 100 \text{ N/cm}^2$$



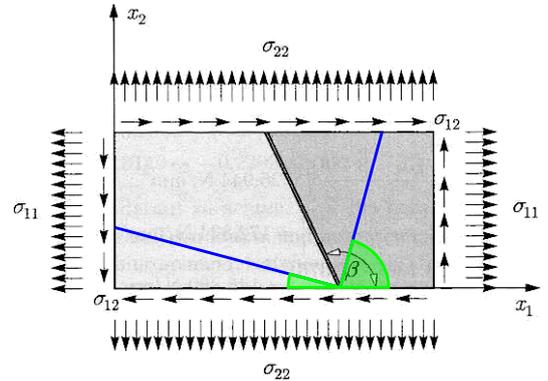
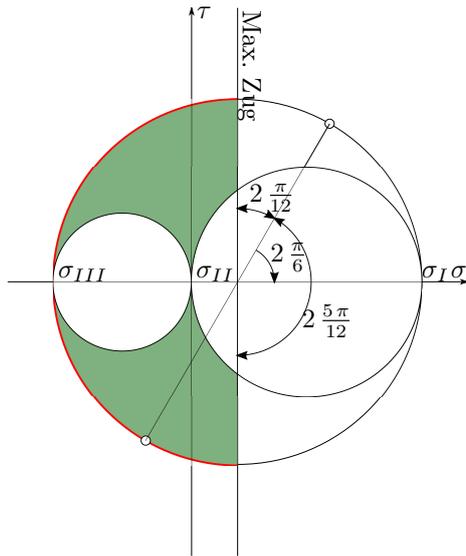
Gesucht:

1. Stellen Sie die MOHRschen Spannungskreise dar und markieren Sie, unter Beachtung des gegebenen Festigkeitskriteriums, die zulässigen Flächen für den Traktionsvektor \mathbf{T} .
2. Bestimmen Sie (rechnerisch und grafisch) die Hauptspannungen, sowie (rechnerisch und grafisch) den Winkel α zwischen \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_1 zeigt in die Richtung von x_1) und \mathbf{e}_I .
3. Bestimmen Sie jene Bereiche von β , innerhalb derer die zulässigen Spannungen in der Leimfuge nicht überschritten werden. Zeichnen Sie die zulässigen Bereiche von β am Angabeblatt ein.

HINWEIS: Die Berechnung der zulässigen Werte von β vereinfacht sich, wenn Sie von den Hauptspannungen und deren Basis ausgehen.

Zur Erinnerung: $[\sin(x)]^2 = 1 - [\cos(x)]^2$

Lösung:



1.

2. $\sigma_I = 500 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$; $\sigma_{II} = 0$; $\sigma_{III} = -300 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$;
 $\alpha = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_I) = +\frac{\pi}{6} = 30^\circ$

3. Die Normalspannung in der Leimfuge σ'_{11} muss das Festigkeitskriterium erfüllen:

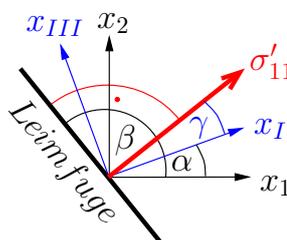
$$\sigma'_{11} \leq 100 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

σ'_{11} kann als Transformation der Hauptspannungen in der x_1 - x_2 Ebene ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma_I \cos(\gamma)^2 + \sigma_{III} \sin(\gamma)^2 = \sigma_I \cos(\gamma)^2 + \sigma_{III} (1 - \cos(\gamma)^2) \\ &= \cos(\gamma)^2 \cdot (\sigma_I - \sigma_{III}) + \sigma_{III} \leq 100 \\ \Rightarrow |\cos(\gamma)| &\leq \sqrt{(100 - \sigma_{III}) / (\sigma_I - \sigma_{III})} = \sqrt{2}/2 \\ \Rightarrow 45^\circ &\leq \gamma \leq 135^\circ \end{aligned}$$

Um diesen Winkel im Hauptachsensystem (γ) in einen Winkel des x_1 - x_2 -Koordinatensystem zu bringen, muss man den Winkel α zwischen \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_I dazuzählen, des weiteren schließt β einen rechten Winkel mit der Normalspannung in der Leimfuge ein, daher folgt: $\beta = \gamma + \alpha \pm 90^\circ$

$$-15^\circ \leq \beta \leq 75^\circ \quad 165^\circ \leq \beta \leq 255^\circ$$



1. Kolloquium WS2017/2018

2. Beispiel: Räumlicher Spannungszustand

Angabe:

Gegeben sind die Schubkomponenten eines Spannungstensors σ mit Bezug auf ein globales x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystem, die drei entsprechenden Hauptnormalspannungen σ_I , σ_{II} und σ_{III} , sowie zwei Richtungen der Hauptnormalspannungen, \mathbf{e}_I und \mathbf{e}_{III} .

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 100 & 0 \\ 100 & \sigma_{22} & 200 \\ 0 & 200 & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \text{ N/cm}^2, \quad \mathbf{e}_I = \begin{bmatrix} +0,997479 \\ +0,068601 \\ +0,018127 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}, \quad \mathbf{e}_{III} = \begin{bmatrix} -0,062253 \\ +0,968687 \\ -0,240354 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$
$$\sigma_I = 1006,87744 \text{ N/cm}^2, \quad \sigma_{II} = 299,17372 \text{ N/cm}^2, \quad \sigma_{III} = -556,05117 \text{ N/cm}^2,$$

Gesucht:

1. Berechnen Sie die drei Invarianten des Spannungstensors σ .
2. Berechnen Sie die Komponenten σ_{11} , σ_{22} und σ_{33} des gegebenen Spannungstensors σ unter der Voraussetzung, dass diese im Verhältnis $\sigma_{11} : \sigma_{22} : \sigma_{33} = 2 : (-1) : 0,5$ stehen.
3. Berechnen Sie die Richtung der 2. Hauptnormalspannung in der Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ und in der Basis $\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}$ - es ist jeweils ein Rechtskoordinatensystem gesucht.
4. Ermitteln Sie den Betrag der Normalspannungskomponente des Spannungsvektors \mathbf{T} , der auf ein Flächenelement mit Normalenvektor $\bar{\mathbf{n}} = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3$ wirkt.

Lösung:

Berechnung der Invarianten I_1^σ , I_2^σ und I_3^σ mit Hilfe von σ_I , σ_{II} und σ_{III} führt auf:

$$I_1^\sigma = 750 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$I_2^\sigma = -425\,000 \left(\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}\right)^2$$

$$I_3^\sigma = -167\,500\,000 \left(\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}\right)^3$$

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = I_1^\sigma \quad \rightarrow \quad -2\sigma_{22} + \sigma_{22} - \frac{\sigma_{22}}{2} = I_1^\sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma_{22} = \frac{I_1^\sigma}{-1,5} = -500 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{11} = 1\,000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}, \quad \sigma_{33} = 250 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$\mathbf{e}_{II} = [0; 1; 0]_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}}^T = \mathbf{e}_{III} \times \mathbf{e}_I \approx [0,034\,048; -0,238\,619; -0,970\,516]_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T$$

$$\text{Spannungstransformation: } \mathbf{n} = \left[\frac{3}{5}; 0; \frac{4}{5}\right]^T$$

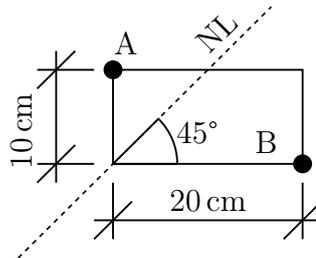
$$\sigma = \mathbf{n}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{n} = 520 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

Ersatzkolloquium WS2016/2017

1. Beispiel: Spannungen, Festigkeitskriterien, Stabtheorie

Angabe:

- a. Bei dem in der Abbildung dargestellten, auf Biegung und Normalkraft beanspruchten, Querschnitt ist die Nulllinie (NL) und die Spannung im Punkt A, $\sigma_A = 1 \text{ kN/cm}^2$, bekannt. Wie groß ist die Spannung σ_B im Punkt B gemäß linearer Stabtheorie?



- b. Beweisen oder widerlegen Sie die Existenz eines Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & q \\ 0 & q & q \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3},$$

wobei $q < 0$ ist, mithilfe der Mohr'schen Spannungskreise. Erläutern Sie die Widerlegung (falls $\boldsymbol{\sigma}$ nicht existiert) in Stichworten oder (falls $\boldsymbol{\sigma}$ existiert) bestimmen Sie grafisch σ_I , σ_{II} und σ_{III} .

- c. Berechnen Sie die hydrostatische Koordinate ξ und die radiale Koordinate $r = \sqrt{2 \cdot J_2}$ des Haigh-Westergaard'schen-Spannungsraumes, in Abhängigkeit von der Hauptspannung σ_{III} , für den Spannungszustand

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{III} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}},$$

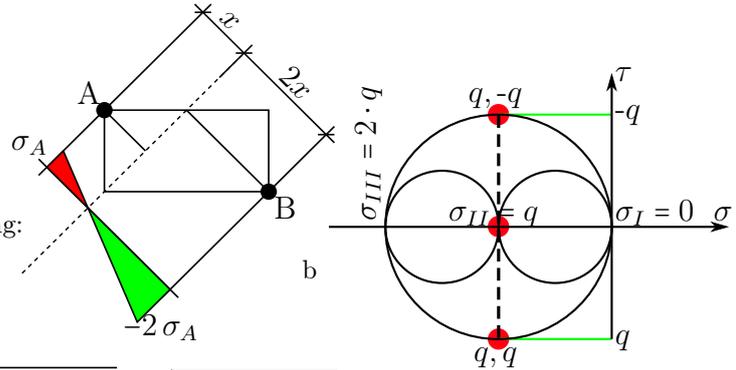
wobei $\sigma_{III} < 0$.

- d. Berechnen Sie die Hauptspannung σ_{III} , in Abhängigkeit von den Mohr-Coulomb-Parametern c und φ , für

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{III} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}},$$

wobei $\sigma_{III} < 0$.

Lösung:



a Doppleter Abstand \Rightarrow Doppelte Spannung:

$$\sigma_B = -2 \cdot \sigma_A = -2 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

c $\xi = \sigma_{III} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_{III}$

$$r = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \sigma_{III}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6}} \cdot |\sigma_{III}|$$

d (Annahme $f(\sigma) = 0$): $\frac{\sigma_{III}}{2} \cdot (1 + \sin(\varphi)) - \sigma_{III} \cdot (1 - \sin(\varphi)) \leq 2 \cdot c \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow \sigma_{III} \leq \frac{4 \cdot c \cdot \cos(\varphi)}{3 \sin(\varphi) - 1}$

1. Kolloquium WS2016/2017

2. Beispiel: Eichen von Versagenskriterien

Angabe:

Gegeben sind zwei Spannungszustände, σ_a und σ_b , die jeweils zum Versagen von Probekörpern des selben Materials geführt haben:

$$\sigma_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -598 & 0 \\ 0 & 0 & -598 \end{bmatrix} \text{ kN/m}^2 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_b = \begin{bmatrix} -788 & 0 & 0 \\ 0 & -2362 & 0 \\ 0 & 0 & -2362 \end{bmatrix} \text{ kN/m}^2.$$

Gesucht:

1. Bestimmen Sie, basierend auf den Spannungszuständen σ_a und σ_b , folgende Parameterpaare:

- (a) c und φ bei Zugrundelegung des MOHR-COULOMB-Versagenskriteriums;
- (b) k und α bei Zugrundelegung des DRUCKER-PRAGER-Versagenskriteriums.

HINWEIS: Eine direkte Umrechnung zwischen den Parameterpaaren c und φ bzw. k und α mit den entsprechenden Formeln im Skriptum ist in diesem Beispiel nicht zulässig.

2. Berechnen Sie für einen Spannungstensor σ_d ,

$$\sigma_d = \begin{bmatrix} -19,8 & 0 & -6,8 \\ 0 & -26,6 & 0 \\ -6,8 & 0 & -67,1 \end{bmatrix} \text{ kN/m}^2,$$

jene Spannungstensoren $\sigma_{krit}^{MC} = \lambda_{MC} \cdot \sigma_d$ und $\sigma_{krit}^{DP} = \lambda_{DP} \cdot \sigma_d$, welche Versagen nach MOHR-COULOMB bzw. DRUCKER-PRAGER hervorrufen, bei Berücksichtigung der unter Punkt 1 bestimmten Materialparameter, sowie mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$.

Lösung:

1. (a) Gemäß Gl. (7.21) $c = 2 \cdot \frac{299 \cdot \sqrt{197}}{42} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = \frac{299 \cdot \sqrt{197}}{21} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \approx 199,841 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

Gemäß Gl. (7.20) $\varphi = \arcsin\left(\frac{122}{319}\right) \approx 22,5^\circ \approx 0.392441$

(b) $\sqrt{J_2^a} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{598^2} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = \frac{598}{\sqrt{3}} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \approx 345,255 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

Gemäß Gl. (7.23) $\sigma_m^a = 4 \cdot \sigma_m^{a,Skript} = 4 \cdot -99,6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = \frac{-1196}{3} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -398,6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

$\sqrt{J_2^b} = \sqrt{\frac{2477476}{3}} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \approx 908,749 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

$\sigma_m^b = -\frac{5512}{3} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -1837,3 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

$\sqrt{J_2} \leq k - \alpha \cdot \sigma_m \Rightarrow$

$k = \frac{9062 \cdot \sqrt{3}}{83} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \approx 189,107 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

$\alpha = \frac{244 \cdot \sqrt{3}}{1079} \approx 0,391678$

2. (a) Gemäß Gl. (7.27) gilt $\sigma_{I,III}^{\sigma_{krit}} = (-43,45 \pm 0,25 \cdot \sqrt{9689}) \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot \lambda$

Gemäß Gl. (7.30) gilt $\lambda_{MC} = 20 \cdot \lambda_{MC}^{Skript} = \frac{1178060}{11 \cdot (145 \sqrt{9689} - 9638)} \approx 23,1073$

$$\sigma_{krit}^{MC} = \lambda_{MC} \cdot \sigma_d \approx \begin{bmatrix} -457,524 & 0 & -157,13 \\ 0 & -614,654 & 0 \\ -157,13 & 0 & -1550,499 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

(b) Gemäß Gl. (7.31) folgt $J_2^{\sigma_{krit}} = \lambda^2 \cdot 700,203 \left(\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}\right)^2$

Gemäß Gl. (7.31) folgt $\sigma_m^{\sigma_{krit}} = \lambda \cdot \left(-\frac{113,5}{3}\right) \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -\lambda \cdot 37,8\bar{3} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

$\lambda_{DP} = \frac{1178060 \cdot (1079 \cdot \sqrt{210061} + 276940)}{55955288367} \approx 16,2423$

$$\sigma_{krit}^{DP} = \lambda_{DP} \cdot \sigma_d \approx \begin{bmatrix} -321,597 & 0 & -110,447 \\ 0 & -432,044 & 0 \\ -110,447 & 0 & -1089,855 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

1. Kolloquium WS2016/2017

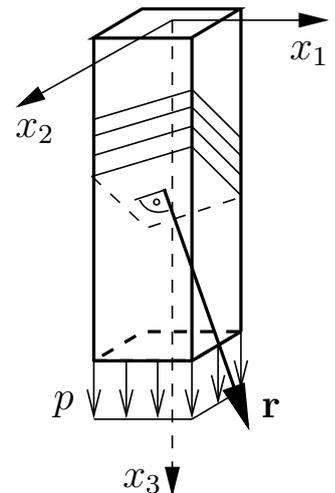
3. Beispiel: Zugversuch

Angabe:

Gegeben ist ein Zugstab aus schichtweise aufgebautem Material mit einer rechteckigen Querschnittsfläche $20\text{ cm} \times 25\text{ cm}$. Die Richtung normal zur Schichtung ist durch den Vektor $\mathbf{r} = [2, 2, 5]^T$ definiert. Der Spannungszustand im Probekörper ist homogen. Der Stab ist durch die Oberflächenkräfte $\mathbf{T}(\mathbf{e}_3) = p \cdot \mathbf{e}_3$ mit $p = 350\text{ N/cm}^2$ belastet.

Gesucht:

1. Berechnen Sie den Spannungstensor in einer beliebigen Basis, der im Probekörper zufolge der wirkenden Oberflächenkräfte herrscht.
2. Berechnen Sie den Traktionsvektor, der auf die durch den Normalenvektor \mathbf{r} definierten Ebene wirkt, in der Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.
3. Berechnen Sie die Normalspannungskomponente und die Schubspannungskomponente des im Punkt 2 ermittelten Traktionsvektors.
4. Führt die Belastung zum Versagen des Probekörpers unter der Annahme, dass das Probenmaterial in einer auf den Vektor \mathbf{r} normal stehenden Ebene eine maximale Normalspannung von 250 N/cm^2 aufnehmen kann?
5. Führt die Belastung zum Versagen des Probekörpers unter der Annahme, dass das Probenmaterial in einer auf den Vektor \mathbf{r} normal stehenden Ebene eine maximale Schubspannung von 175 N/cm^2 aufnehmen kann?



HINWEIS: Für die Punkte 4 und 5 ist ein rechnerischer Nachweis zu erbringen.

Lösung:

$$1. \boldsymbol{\sigma} = p \cdot \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = 350 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \cdot \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

$$2. \mathbf{n}_r = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = (2, 2, 5)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T / \sqrt{33}$$
$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_r = 5 \cdot p / \sqrt{33} \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{1750 \text{ N}}{\sqrt{33} \text{ cm}^2} \cdot \mathbf{e}_3$$

$$3. \sigma = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_r = 25p/33 = \frac{8750 \text{ N}}{33 \text{ cm}^2}$$
$$|\tau| = \sqrt{\|\mathbf{T}\|^2 - \sigma^2} = \sqrt{\frac{25}{33} - \left(\frac{25}{33}\right)^2} \cdot p = \frac{3500 \cdot \sqrt{2}}{33} \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$4. \sigma = 265,15 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} > 250 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = \sigma_{zul}$$

Ja, die Belastung zu einem Versagen, wenn die auf \mathbf{r} normale Fläche eine maximale Normalspannung von 250 N/cm^2 aufnehmen kann.

$$5. |\tau| = 3500\sqrt{2}/33 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \approx 149,992 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \leq 175 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = \tau_{zul} \Rightarrow \text{Nein, die Belastung führt zu keinem Versagen, wenn die auf } \mathbf{r} \text{ normale Fläche eine maximale Schubspannung von } 175 \text{ N/cm}^2 \text{ aufnehmen kann.}$$

Ersatzkolloquium WS2015/2016

2. Beispiel: Versagenskriterium nach Mohr-Coulomb

Angabe:

Gegeben: Ein Baustoff sei charakterisiert durch den Winkel der inneren Reibung $\varphi = 13,34^\circ$ und die zunächst unbekannte Kohäsion c gemäß des MOHR-COULOMBSchen Versagenskriteriums.

Gesucht:

1. Eichen Sie die unbekannte Konstante c anhand des Ergebnisses eines reinen Schubversuchs. Der gemessene Spannungszustand zum Versagenszeitpunkt lautet $\boldsymbol{\sigma}_{krit} = \tau_{krit}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$ mit $\tau_{krit} = 46$ MPa.
2. Der untersuchte Baustoff wird einem homogenen Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}$ mit den Komponenten $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -5$ MPa, $\sigma_{33} = 5$ MPa, $\sigma_{12} = 3$ MPa, und $\sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ unterworfen. Berechnen Sie den Laststeigerungsfaktor λ bei dem Materialversagen eintritt.
3. Ermitteln Sie die Schubspannung, die zum Zeitpunkt des Versagens (Spannungszustand $\lambda \boldsymbol{\sigma}$) in einer Ebene mit Flächennormale $\mathbf{r} = [2 \ 2 \ 1]^T$ wirken würde.
4. Stellen Sie den in Punkt 2 gegebenen Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}$, sowie den Grenzspannungszustand $\lambda \boldsymbol{\sigma}$ in der MOHRschen Ebene maßstäblich dar. Zeichnen Sie auch die durch die Formel $\tau = c - \sigma \cdot \tan \varphi$ gegebene Versagensgrenze ein.

Lösung:

2.1 Eichen

reiner Schubspannungszustand: $\sigma_I = -\sigma_{III} = \tau_{krit} = 46 \text{ MPa}$

einsetzen in das MOHR-COLOUMBSche Festigkeitskriterium $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ liefert: $c = 47,28 \text{ MPa}$

2.2 Laststeigerungsfaktor

Hauptspannungen für den gegebenen $\boldsymbol{\sigma}$ lauten: $\sigma_I = 5, \sigma_{II} = -2, \sigma_{III} = -8 \text{ MPa}$, daraus folgt $\lambda = 7,47$

2.3 Schubspannungen in der Ebene normal zu \mathbf{r}

Der Normalvektor muss normiert werden: $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}| = [2/3 \ 2/3 \ 1/3]^T$.

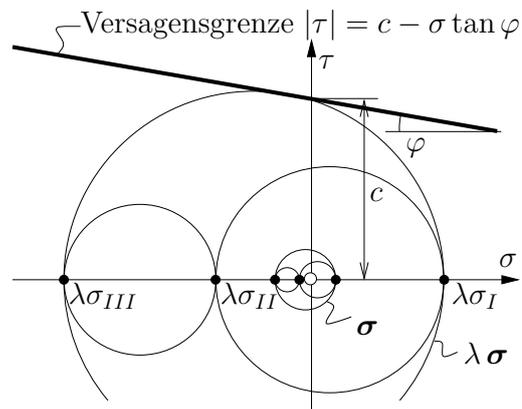
Der Traktionsvektor auf der Ebene folgt aus der Cauchy-Formel:

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = [-9,97 \ -9,97 \ 12,46]^T$$

Es folgen die Normalspannung $\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{n}) = -9,13 \text{ MPa}$ und

die Schubspannung $\tau = \pm \sqrt{\mathbf{T}^2 - \sigma^2} = \pm 16,44 \text{ MPa}$.

2.4 Darstellung von $\boldsymbol{\sigma}, \lambda \boldsymbol{\sigma}$ in der MOHRSCHEN EBENE



1. Kolloquium WS2015/2016

1. Beispiel: Hängender Stab unter Eigengewicht

Angabe:

Gegeben:

Ein Stab mit Länge l ist nur durch sein Eigengewicht (wirkt in \mathbf{e}_z -Richtung, ρ = Dichte, g = Erdbeschleunigung) belastet und wird an seiner Oberseite gehalten. Der einaxiale, inhomogene Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}(z)$ beschreibt das Spannungsfeld in diesem hängenden Stab.

Der Stab besteht aus geschichtetem Material, wobei die Schichtung mit der $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ -Ebene einen Winkel von 55° einschließt, siehe Skizze. Folgende Normal- und Schubspannungen sind in der Schichtfläche zulässig:

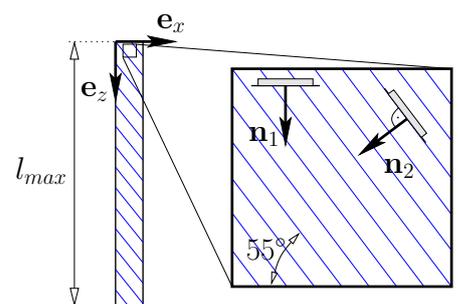
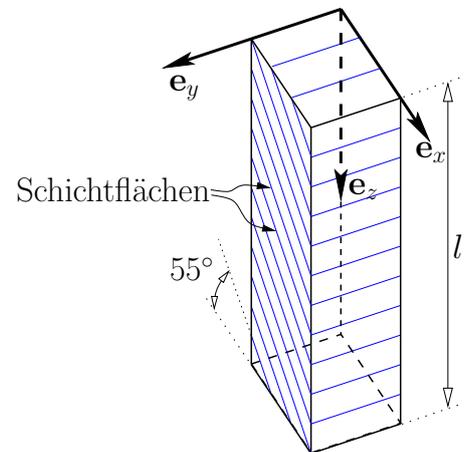
- zulässige Schubspannung in der Schichtfläche:
 $\tau_{zul} = 1,5 \text{ MPa}$
- zulässige Druckspannung normal zur Schichtfläche: $\sigma_{zul}^{Druck} = 5,0 \text{ MPa}$
- zulässige Zugspannung normal zur Schichtfläche: $\sigma_{zul}^{Zug} = 1,0 \text{ MPa}$

Gesucht:

1. Kontrollieren Sie, ob die lokale Gleichgewichtsbedingung in jedem Punkt des Stabes erfüllt ist ($\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0$).
2. Ermitteln Sie die maximal mögliche Länge l_{max} des Stabes, ohne dass die zulässigen Spannungen überschritten werden.
3. Stellen Sie den Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}(z = 0)$ für $l = l_{max}$ in der MOHRschen Ebene maßstäblich dar.
4. Berechnen Sie, wiederum für $z = 0$ und $l = l_{max}$, die Normal- und Schubspannungskomponenten der Traktionsvektoren $\mathbf{T}(\mathbf{n}_1)$ und $\mathbf{T}(\mathbf{n}_2)$, die auf die Flächenelemente mit den Normalvektoren \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 wirken (siehe Skizze). Zeichnen Sie diese Traktionsvektoren – sowohl in der MOHRschen Ebene als auch in den nebenstehenden Skizzen – ein.

$$\boldsymbol{\sigma}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g (l - z) \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z}$$

$\rho = 8000 \text{ kg/m}^3, g = 9,81 \text{ m/s}^2$



\mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 liegen in der x, z -Ebene

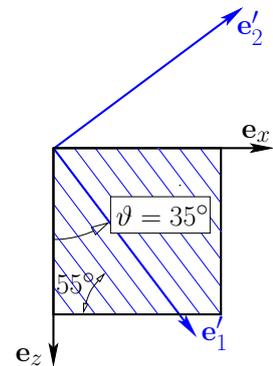
Lösung:

Spannungsfeld erfüllt die **Gleichgewichtsbedingung** $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f}$, mit $\mathbf{f} = \rho g \mathbf{e}_z$ da $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho g$ ist und damit die Gleichung der dritten Zeile erfüllt ist (die ersten beiden Gleichungen sind trivial erfüllt).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \quad \checkmark \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \quad \checkmark \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= -\rho g \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die zulässigen Spannungen beziehen sich auf ein Koordinatensystem in Faserrichtung. Es müssen also zuerst die $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ -Komponenten des gegebenen einaxialen Spannungszustandes in diese Faserrichtung transformiert werden (Achtung: Transformationsformeln in die z, x -Ebene permutieren und den Winkel von der z -Achse betrachten). Da nur $\sigma_{zz} \neq 0$ (alle anderen Komponenten sind Null), vereinfachen sich die ebenen Transformationsformeln zu:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma_{zz} (\cos 35^\circ)^2 = \rho g l (\cos 35^\circ)^2 \\ \sigma'_{22} &= \sigma_{zz} (\sin 35^\circ)^2 = \rho g l (\sin 35^\circ)^2 \\ \sigma'_{21} &= -\sigma_{zz} \cos 35^\circ \sin 35^\circ = -\rho g l \cos 35^\circ \sin 35^\circ \end{aligned}$$



Die Zugnormalspannung σ'_{22} kann dann mit σ_{zul}^{Zug} und die Schubspannung σ'_{12} mit τ_{zul} verglichen werden, um die maximale Stablänge zu ermitteln:

$$\begin{aligned} \sigma'_{22} = \sigma_{zul}^{Zug} &\Rightarrow l_{max}^\sigma = \frac{\sigma_{zul}^{Zug}}{\rho g (\cos 55^\circ)^2} = 38,7 \text{ m} \\ |\sigma'_{12}| = \tau_{zul} &\Rightarrow l_{max}^\tau = \frac{\tau_{zul}}{\rho g \cos 35^\circ \sin 35^\circ} = 40,7 \text{ m} \end{aligned}$$

Die **maximale Länge** ergibt sich also aus den Zugnormalspannungen und beträgt $l_{max} = 38,7 \text{ m}$.

Der Normalvektor \mathbf{n}_1 zeigt in \mathbf{e}_z -Richtung, daher gilt $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_z$. Die $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Komponenten des Normalvektor \mathbf{n}_2 folgen aus der Faserrichtung $\mathbf{n}_2 = [-\sin 55^\circ, 0, \cos 55^\circ]^T$. Damit kann die CHAUCHY-Formel für den Spannungszustand bei $z = 0$ ausgewertet werden:

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}_1) = \boldsymbol{\sigma}(z=0, l=l_{max}) \cdot \mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g l_{max} \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

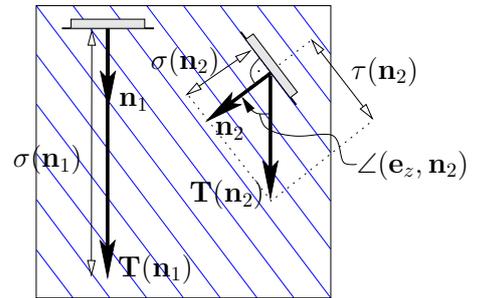
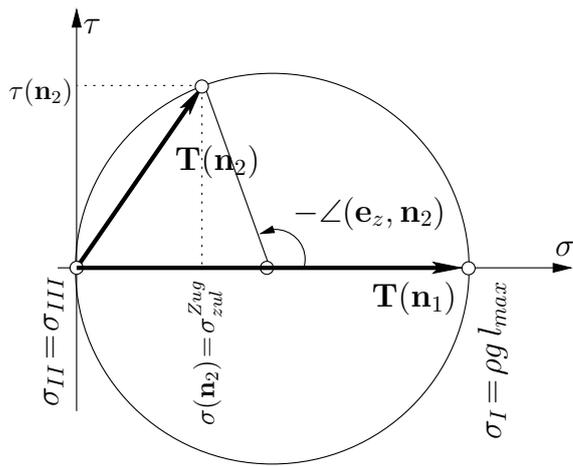
$$\mathbf{T}(\mathbf{n}_2) = \boldsymbol{\sigma}(z=0, l=l_{max}) \cdot \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g l_{max} \cos 55^\circ \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Das Flächenelement \mathbf{n}_1 hat nur eine Normalspannung $\sigma(\mathbf{n}_1) = \rho g l_{max} = 3,04 \text{ MPa}$, $\tau(\mathbf{n}_1) = 0$ (siehe MOHRschen Kreis). Für das Flächenelement \mathbf{n}_2 folgen Normal- und Schubspannungskomponente aus:

$$\sigma(\mathbf{n}_2) = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}(\mathbf{n}_2) = \rho g l_{max} (\cos 55^\circ)^2 = 1,0 \text{ MPa.}$$

$$\tau(\mathbf{n}_2) = \sqrt{|\mathbf{T}(\mathbf{n}_2)|^2 - \sigma(\mathbf{n}_2)^2} = 1,43 \text{ MPa.}$$

Natürlich *muss* gelten, dass für $l=l_{max}$ an der Staboberseite normal zur Faserrichtung genau die Zugfestigkeit auftritt, also $\sigma(\mathbf{n}_2) \stackrel{!}{=} \sigma_{zul}^{Zug}$.



1. Kolloquium WS2015/2016

2. Beispiel: Festigkeitskriterien für Metall-Komposit-Werkstoff

Angabe:

Gegeben: Für einen metallischen Komposit-Werkstoff kann laut einer Bemessungsvorschrift sowohl das VON MISES Kriterium (mit Festigkeitsparameter $k = 173,2 \text{ MPa}$) als auch das DRUCKER-PRAGER Kriterium (mit den Parametern $k = 173,2 \text{ MPa}$ und $\alpha = 0,2$) verwendet werden. In einem aus diesem Werkstoff gefertigten Bauteil tritt ein ebener Spannungszustand σ mit den Komponenten $\sigma_{11} = 150 \text{ MPa}$, $\sigma_{22} = -50 \text{ MPa}$ und $\sigma_{12} = 80 \text{ MPa}$ auf.

Gesucht:

1. Ermitteln Sie die Laststeigerungsfaktoren λ_{vM} und λ_{DP} , mit denen der gegebene Spannungszustand σ proportional gesteigert werden kann, damit gerade Materialversagen nach VON MISES (Index vM) bzw. DRUCKER-PRAGER (Index DP) eintritt.
2. Stellen Sie den gegebenen Spannungszustand σ , sowie $\lambda_{vM} \sigma$ und $\lambda_{DP} \sigma$ und die Versagensmeridiane nach VON MISES und DRUCKER-PRAGER im ξ - r Diagramm maßstäblich dar.
3. Erklären Sie, anhand Ihrer Skizze, *warum* eines der beiden Kriterien einen größeren Laststeigerungsfaktor liefert. Für welche Spannungszustände würden beide Kriterien den gleichen Laststeigerungsfaktor liefern? Geben Sie ein Beispiel an.
4. Berechnen Sie die hydrostatische Zugfestigkeit (Hinweis: $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$) des Materials unter Anwendung des DRUCKER-PRAGER Kriteriums.

Lösung:

Für den gegebenen ebenen Spannungszustand gilt:

$$J_2^\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2) = 17233 \text{ MPa}^2$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 33,33 \text{ MPa}$$

$$\text{VON MISES: } \sqrt{J_2^\sigma} - k = -41,92 < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{vM} = 1,32$$

$$\text{DRUCKER-PRAGER: } \sqrt{J_2^\sigma} - k + \alpha \sigma_m = -35,26 < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{DP} = 1,26$$

Das DP-Kriterium liefert also einen kleineren Laststeigerungsfaktor, da im Gegensatz zum vM-Kriterium auch der hydrostatische Spannungsanteil (charakterisiert durch σ_m) mit ins Kriterium eingeht. In diesem Fall gibt es einen hydrostatischen Druckanteil, man kommt also näher zur Kegelspitze, und der aufnehmbare deviatorische Spannungsanteil wird kleiner. Dementsprechend würden nur rein deviatorische Spannungszustände $\lambda_{vM} = \lambda_{DP}$ liefern, beispielsweise ein reiner Schub: $\boldsymbol{\sigma} = p (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)$.

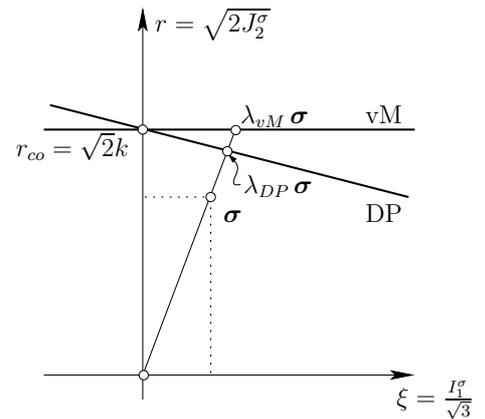
$$r\text{-}\xi\text{-Koordinaten des Spannungszustandes: } r = \sqrt{2J_2^\sigma} = 185,65 \text{ MPa}, \quad \xi = \frac{I_1^\sigma}{\sqrt{3}} = 57,74 \text{ MPa}$$

$$\text{Für beide Versagensmeridiane gilt: } r_0 = \sqrt{2}k = 244,94 \text{ MPa}$$

Die hydrostatische Zugfestigkeit f_{hyd} ergibt sich aus dem Spannungszustand:

$$\boldsymbol{\sigma}_{hyd} = f_{hyd} (\mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_I + \mathbf{e}_{II} \otimes \mathbf{e}_{II} + \mathbf{e}_{III} \otimes \mathbf{e}_{III}).$$

$$\text{Einsetzen in das DP-Kriterium ergibt } f_{hyd} = \frac{k}{\alpha} = 866 \text{ MPa}$$



1. Kolloquium WS2014/2015

1. Beispiel: Spannungszustand

Angabe:

Gegeben sind die folgenden Komponenten eines Spannungstensors σ bezüglich einer orthonormalen Basis mit den Basisvektoren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 , zwei von den drei entsprechenden Hauptnormalspannungen σ_I und σ_{III} , sowie zwei Richtungen der Hauptnormalspannungen, \mathbf{e}_I und \mathbf{e}_{III} .

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 30 \\ 0 & 80 & 0 \\ 30 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad [\text{kN/cm}^2], \quad \mathbf{e}_I = \begin{pmatrix} 0,9944 \\ 0 \\ 0,1054 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}, \quad \mathbf{e}_{III} = \begin{pmatrix} 0,1054 \\ 0 \\ -0,9944 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

$$\sigma_I = 243,18 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma_{III} = -43,18 \text{ kN/cm}^2.$$

Gesucht:

1. Schreiben Sie die charakteristische Gleichung des Eigenwertproblems und die Definition der zugrunde liegenden Variablen an.
2. Berechnen Sie die Komponenten σ_{11} und σ_{33} des Spannungstensors unter der Voraussetzung, dass diese im Verhältnis (-6):1 stehen.
3. Ermitteln Sie die dritte Hauptnormalspannungsrichtung. Schreiben Sie die Transformationsmatrix zur Transformation des Spannungstensors aus der \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 -Basis in die \mathbf{e}_I , \mathbf{e}_{II} , \mathbf{e}_{III} -Basis an und geben Sie die Transformationsregel an.
4. Berechnen Sie die Normalspannungskomponente σ , die auf eine Ebene wirkt, deren Flächennormale in die Richtung $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T$ weist.

Lösung:

$-\sigma^3 + I_1^\sigma \sigma^2 - I_2^\sigma \sigma + I_3^\sigma = 0$, wobei $I_1^\sigma = \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$, I_2^σ = die Summe der Unterdeterminanten, $I_3^\sigma = \det \boldsymbol{\sigma}$.

$$I_1^\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

aus gegebenen Spannungszustand erkennt man, dass $\sigma_{22} = \sigma_{II} = 80 \text{ kN/cm}^2$ (da $\sigma_{i2} = \sigma_{2i} = 0$)

$$\Rightarrow \sigma_{11} = 240 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma_{33} = -\sigma_{11}/6 = -40 \text{ kN/cm}^2$$

Der dritte Basisvektor: $\mathbf{e}_{II} = \mathbf{e}_{III} \times \mathbf{e}_I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T$

In der Transformationsmatrix erscheinen die neuen Basisvektoren zeilenweise:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0,9944 & 0 & 0,1054 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0,1054 & 0 & -0,9944 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Die Transformationsbeziehung:

$$\begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} = \mathbf{Q} \cdot \begin{bmatrix} 240 & 0 & 30 \\ 0 & 80 & 0 \\ 30 & 0 & -40 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \cdot \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 243,18 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & -43,18 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}} \text{ kN/cm}^2$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T$$

Die Normalspannungskomponente: $\sigma = \mathbf{n}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 89,6 \text{ kN/cm}^2$

1. Kolloquium WS2014/2015

2. Beispiel: Festigkeitskriterien

Angabe:

Gegeben ist ein Spannungstensor σ , der den Beanspruchungszustand eines Probekörpers beschreibt:

$$\sigma = \begin{bmatrix} -25 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -17 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad \text{MPa}$$

Gesucht:

1. Bestimmen Sie anhand der Versagenshypothese nach MOHR-COULOMB mit den Parametern $\varphi = 10^\circ$ und $c = 15$ MPa, ob der gegebene Spannungszustand zum Versagen des Materials führt.
2. Bestimmen Sie auf Basis der Hypothese nach MOHR-COULOMB jenen Spannungszustand, bei dem der Baustoff in einem biaxialen Druckversuch gerade versagen würde, wobei eine Normalspannungskomponente doppelt so groß wie die zweite ist: $\sigma = -f_{cb}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 2(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2))$.
3. Berechnen Sie den Parameter k für das Versagenskriterium nach DRUCKER-PRAGER mit $\alpha = 0,5$, damit der Spannungszustand aus Punkt 2 gerade zum Versagen führt.
4. Stellen Sie den biaxialen Spannungszustand, sowie die Versagensfläche nach DRUCKER-PRAGER im r - ξ Diagramm maßstäblich dar.

Lösung:

Hauptnormalspannungen: $\sigma_I = 0$; $\sigma_{II} = -12,056$; $\sigma_{III} = -29,944$ MPa

Mohr-Coulomb-Versagen: $\sigma_I \frac{1+\sin \varphi}{2c \cos \varphi} - \sigma_{III} \frac{1-\sin \varphi}{2c \cos \varphi} - 1 = -0,163$

Hauptnormalspannungen in einem biaxialen Versuch: $\sigma_I = 0$; $\sigma_{II} = -f_{cb}$; $\sigma_{III} = -2f_{cb}$ MPa

Die biaxiale Druckfestigkeit: $-(-2f_{cb}) \frac{1-\sin \varphi}{2c \cos \varphi} - 1 = 0 \Rightarrow |f_{cb}| = 17,876$ MPa

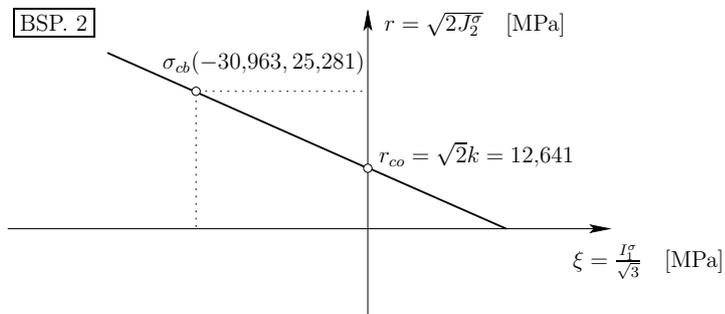
Drucker-Prager-Versagen:

$$J_2^\sigma = \frac{1}{6} ((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2) = 319,562 \text{ MPa}^2$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = -17,876 \text{ MPa}$$

$$\sqrt{J_2^\sigma} + \alpha \sigma_m - k = 0 \Rightarrow k = 8,938 \text{ MPa}$$

r - ξ -Koordinaten des Spannungszustandes: $r = \sqrt{2J_2^\sigma} = 25,281$ MPa, $\xi = \frac{I_1^\sigma}{\sqrt{3}} = -30,963$ MPa



1. Kolloquium WS2013/2014

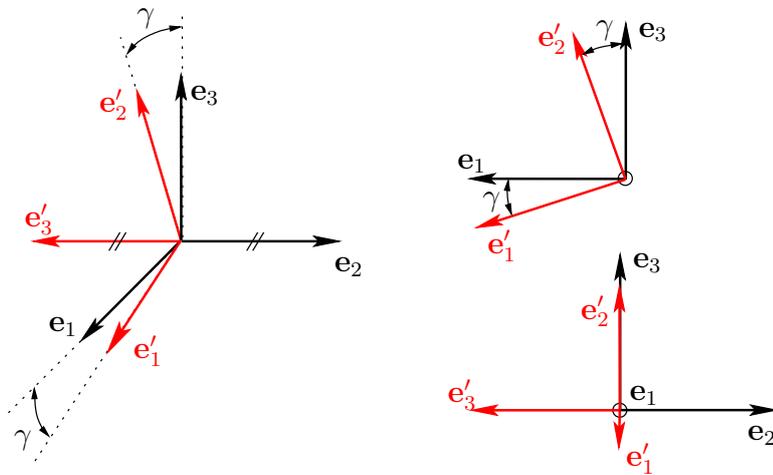
1. Beispiel: Spannungsanalyse und Basiswechsel

Angabe:

Gegeben ist ein homogener Spannungszustand (Spannungstensor σ) in einem Holzbauteil und der Einheitsvektor \mathbf{n} , der normal auf die Ebene einer im Holzbauteil befindlichen Leimfuge steht, jeweils mit den Komponenten bezüglich einer kartesischen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Basis. Weiters ist ein $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ -Basissystem gegeben. Die Basisvektoren \mathbf{e}'_1 und \mathbf{e}'_2 liegen dabei in der \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 -Ebene und sind gegenüber \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_3 um einen Winkel γ gedreht (siehe Abbildung). Der Basisvektor \mathbf{e}'_3 ist parallel zu \mathbf{e}_2 , zeigt aber in die Gegenrichtung.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \text{ MPa}$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0,1826 \\ -0,3651 \\ -0,9129 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$



Gesucht:

1. Berechnen Sie den Traktionsvektor $\mathbf{T}(\mathbf{n})$, der in der Ebene der Leimfuge wirkt, und geben Sie seine Komponenten bezüglich der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Basis an.
2. Ermitteln Sie rechnerisch, ob die Schubspannungskomponente des Traktionsvektors $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ die zulässige Schubspannung $\tau_{ult} = 6,0 \text{ MPa}$ in der Leimfugenebene überschreitet.
3. Berechnen Sie die Transformationsmatrix \mathbf{Q} , die zur Transformation von Tensorcomponenten aus dem $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Basissystem in das $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ -Basissystem dient. Geben Sie analytische Formeln für die Elemente dieser Transformationsmatrix \mathbf{Q} in Abhängigkeit des Winkels γ an.
4. Berechnen Sie die Komponenten des Spannungstensors σ bezüglich der $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ -Basis. Verwenden Sie dazu die in Punkt 3 bestimmte Transformationsmatrix und $\gamma = 20^\circ$.

Lösung:

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8,216 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad \text{MPa}$$

Normalspannungskomponente $\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = -7,5 \text{ MPa}$

Schubspannungskomponente $\tau = \sqrt{|\mathbf{T}|^2 - \sigma^2} = 3,3541 \text{ MPa} < 6,0 \text{ MPa} = \tau_{ult}$

$$\text{Transformationsmatrix } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3} = \mathbf{Q} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \cdot \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} -1,053 & 2,893 & 0 \\ 2,893 & -7,9472 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3} \quad \text{MPa}$$

1. Kolloquium WS2013/2014

2. Beispiel: MOHR-COULOMBSches Festigkeitskriterium

Angabe:

Gegeben ist ein Spannungstensor σ , der den Beanspruchungszustand in einem bestimmten Punkt eines Körpers aus Beton beschreibt:

$$\sigma = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & -12 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \text{ MPa}$$

Gesucht:

1. Bestimmen Sie anhand des Festigkeitskriteriums nach MOHR-COULOMB (Winkel der inneren Reibung $\varphi = 10^\circ$, Kohäsion $c = 15 \text{ MPa}$), mit welchem Faktor λ der Spannungszustand proportional gesteigert werden kann, damit gerade Materialversagen eintritt.
2. Geben Sie die $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Komponenten des Basisvektors \mathbf{e}_I an, der in Richtung der größten Hauptnormalspannung zeigt.
3. Stellen Sie den gegebenen Spannungszustand σ mittels der MOHRschen Kreise und die durch $|\tau| = c - \sigma \tan \varphi$ gegebene Versagensgrenze im σ - τ -Diagramm maßstäblich dar.
4. Tragen Sie den größten MOHRschen Spannungskreis des Spannungszustands $\lambda \sigma$ in Ihre Zeichnung ein. Ermitteln Sie (in der MOHRschen Ebene) die Orientierung des Traktionsvektors $\mathbf{T}(\mathbf{n}_{MC})$, der zu Materialversagen führt. Geben Sie außerdem die Komponenten des zugehörigen Normalvektors \mathbf{n}_{MC} bezüglich des Basissystems $\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}$ an, wobei die Basisvektoren in die Richtung der Hauptnormalspannungen zeigen.

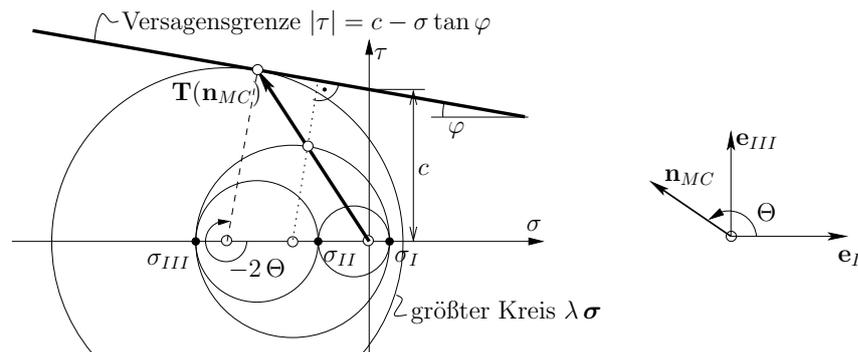
Lösung:

Hauptnormalspannungen: $\sigma_I = 2,000$; $\sigma_{II} = -4,917$; $\sigma_{III} = -17,083$ MPa

Mohr-Coulomb-Versagen: $\sigma_I \frac{1+\sin \varphi}{2c \cos \varphi} - \sigma_{III} \frac{1-\sin \varphi}{2c \cos \varphi} = 0,5573 \leq 1 \Rightarrow \lambda = 1,7945$

Aus $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$ und $\sigma_{22} = \sigma_I$ folgt die Richtung der größten Hauptnormalspannung

$$\mathbf{e}_I = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$



Der Traktionsvektor fällt auf den größten Mohrschen Spannungskreis, daher gilt $n_{II} = 0$. Die beiden anderen Komponenten erhält man aus dem Winkel Θ : $n_I = \cos \Theta$ und $n_{III} = \sin \Theta$.

Ersatzkolloquium WS2012/2013

2. Beispiel: Elastizitätstheorie / Versagenskriterium

Angabe:

Gegeben ist ein Probekörper aus Beton (Schubmodul = 12,5 GPa, Querdehnungszahl = 0,2, Winkel der inneren Reibung = 10° und Kohäsion = 15 N/mm²). Er wird einem homogenen Beanspruchungs-zustand unterworfen, beschrieben durch folgende Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ bezüglich einer orthonormalen Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -0,0005 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0001 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Anmerkung: Den Berechnungen ist die linearisierte Elastizitätstheorie zugrunde zu legen.

Gesucht:

1. Bestimmen Sie die physikalische Dehnung des Körpers in der durch den Vektor \mathbf{n} gegebenen Richtung:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

2. Berechnen Sie die relative (prozentuelle) Volumsänderung des Probekörpers, die durch die Beanspruchung hervorgerufen wird.
3. Berechnen Sie die Komponenten des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ bezüglich der orthonormalen Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.
4. Ermitteln Sie den Laststeigerungsfaktor, mit dem die Belastung multipliziert werden muss, damit Versagen nach dem Kriterium von MOHR-COULOMB gerade eintritt.

Lösung:

Dehnung in der \mathbf{n} Richtung $\epsilon_n \approx \varepsilon_n = \mathbf{n}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} = -2 \cdot 10^{-4}$

Relative Volumsänderung: $\Delta V = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = -3 \cdot 10^{-4}$

Spannungstensor: $E = 30000 \text{ N/mm}^2$ (MPa), $\sigma_{11} = -15 \text{ N/mm}^2$ (MPa), $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ Laststeigerungsfaktor: $\sigma_I = 0$, $\sigma_{III} = -15 \text{ MPa}$, $\lambda = 2,3834$

1. Beispiel: Räumlicher Spannungszustand

Angabe:

Gegeben sind die Komponenten eines Spannungstensors σ bezüglich einer orthonormalen Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 100 & -58 & 0 \\ -58 & -500 & 256 \\ 0 & 256 & 350 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad [\text{N/cm}^2]$$

Dieser Tensor beschreibt den homogenen Spannungszustand in einem Probekörper.

Gesucht:

1. Schreiben Sie die charakteristische Gleichung des Eigenwertproblems zur Bestimmung der Hauptnormalspannungen an. Geben Sie dabei die Invarianten des Spannungstensors zahlenmäßig an.
2. Geben Sie die Hauptnormalspannungen sowie die zugehörigen Spannungshauptrichtungen $\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}$ (als Einheitsvektoren) an. Wie groß ist die maximale Schubspannung, die auf den gegebenen Probekörper wirkt?
3. Bestimmen Sie den hydrostatischen Anteil ($\mathbf{1}\sigma_m$) und den deviatorischen Anteil (Spannungsdeviator \mathbf{s}) des Spannungstensors σ , in der Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Berechnen Sie die zweite Invariante des Spannungsdeviators \mathbf{s} .
4. Ermitteln Sie betragsmäßig die Normalspannungskomponente und die Schubspannungskomponente des Spannungsvektors \mathbf{T} , der auf ein Flächenelement mit Normalenvektor \mathbf{n} wirkt. Die Komponenten des Vektors \mathbf{n} sind bezüglich der Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ definiert zu

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} +0,9129 \\ -0,1826 \\ +0,3651 \end{Bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Lösung:

Charakteristische Gleichung: $-\sigma^3 - 50\sigma^2 + 258\,900\sigma - 25\,231\,000 = 0$

Hauptnormalspannungen und Spannungshauptrichtungen:

$$\sigma_I = 421,9028 \text{ N/cm}^2 \quad \sigma_{II} = 103,8661 \text{ N/cm}^2 \quad \sigma_{III} = -575,7689 \text{ N/cm}^2$$

$$\mathbf{e}_I = [-0,0487 \ 0,2701 \ 0,9616] \quad \mathbf{e}_{II} = [0,9954 \ -0,0664 \ 0,0690] \quad \mathbf{e}_{III} = [0,0824 \ 0,9605 \ -0,2656]$$

Größte Schubspannung: $\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = 498,8359 \text{ N/cm}^2$

Hydrostatischer und deviatorischer Anteil:

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \begin{bmatrix} -16,6667 & 0 & 0 \\ & -16,6667 & 0 \\ 0 & 0 & -16,6667 \end{bmatrix} \text{ N/cm}^2 \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 116,6667 & -58,0000 & 0 \\ & -483,3333 & 256,0000 \\ & & 366,6667 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \text{ N/cm}^2$$

2. Invariante des Spannungsdeviators: $J_2^\sigma = \frac{(I_1^\sigma)^2}{3} - I_2^\sigma = 2,5973 \cdot 10^5 \text{ N}^2/\text{cm}^4$

Spannungstranformation: $\sigma_n = \mathbf{n}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 98,5219 \text{ N/cm}^2 \quad \tau_n = \sqrt{|T|^2 - \sigma_n^2} = 156,8930 \text{ N/cm}^2$

1. Kolloquium WS2012/2013

2. Beispiel: Versagenskriterium nach Mohr-Coulomb

Angabe:

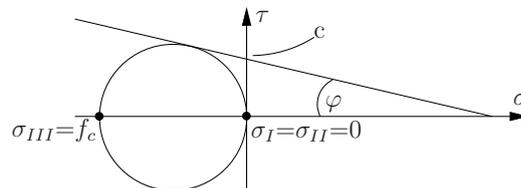
Gegeben: Ein Baustoff sei charakterisiert durch den Winkel der inneren Reibung $\varphi = 13,3424^\circ$ und die Kohäsion $c = 18,9738 \text{ N/mm}^2$, gemäß des MOHR-COULOMBSchen Versagenskriteriums.

Gesucht:

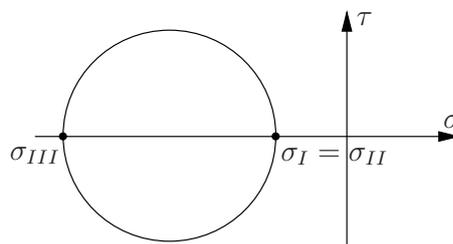
1. Bestimmen Sie die einaxiale Druckfestigkeit dieses Baustoffs.
2. Stellen Sie die MOHRschen Spannungskreise bei Erreichen der uniaxialen Druckfestigkeit dar. Zeichnen Sie auch die durch die Formel $\tau = c - \sigma \cdot \tan\varphi$ gegebene Versagensgrenze ein.
3. Bestimmen Sie den Spannungszustand, bei dem der Baustoff in einem triaxialen Druckversuch gerade versagen würde, wobei der axialsymmetrische Seitendruck viermal kleiner ist als der dazu orthogonal wirkende Druck ($\sigma_I = \sigma_{II} = \frac{\sigma_{III}}{4}$).
4. Stellen Sie die MOHRschen Spannungskreise, die dem in Punkt 3 bestimmten triaxialen Spannungszustand entsprechen, graphisch dar.

Lösung:

Einaxiale Druckfestigkeit: $f_c = 48 \text{ N/mm}^2$ $\sigma_{III} = -f_c = -48 \text{ N/mm}^2$



Triaxialer Spannungszustand: $\sigma_{triaxial}$: $\sigma_I = \sigma_{II} = -20 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{III} = -80 \text{ N/mm}^2$



1. Kolloquium WS2011/2012

1. Beispiel: Räumlicher Spannungszustand

Angabe:

Gegeben sind die Schubkomponenten eines Spannungstensors σ mit Bezug auf ein globales x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystem, die drei entsprechenden Hauptnormalspannungen σ_I , σ_{II} und σ_{III} , sowie zwei Richtungen der Hauptnormalspannungen, \mathbf{e}_I und \mathbf{e}_{II} .

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 225 & 0 \\ 225 & \sigma_{22} & 123 \\ 0 & 123 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad [\text{N/cm}^2], \quad \mathbf{e}_I = \begin{bmatrix} -0,9950 \\ -0,0998 \\ -0,0078 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{II} = \begin{bmatrix} +0,0245 \\ -0,1677 \\ -0,9855 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_I = 1806,6 \text{ N/cm}^2, \quad \sigma_{II} = 243,9 \text{ N/cm}^2, \quad \sigma_{III} = -489,5 \text{ N/cm}^2,$$

Gesucht:

1. Schreiben Sie die charakteristische Gleichung des Eigenwertproblems an.
2. Berechnen Sie die Komponenten σ_{11} , σ_{22} und σ_{33} des gegebenen Spannungstensors unter der Voraussetzung, dass diese im Verhältnis 8:(-2):1 stehen.
3. Berechnen Sie die Richtung der 3. Hauptnormalspannung.
4. Bestimmen Sie den hydrostatischen Anteil (mittlere Normalspannung) und den deviatorischen Anteil (deviatorischer Spannungstensor \mathbf{s}) des Spannungstensors σ . Berechnen Sie die zweite Invariante des Spannungsdeviators \mathbf{s} .
5. Ermitteln Sie den Betrag der Normalspannungskomponente des Spannungsvektors \mathbf{T} , der auf ein Flächenelement mit Normalvektor $\bar{\mathbf{n}}$ wirkt. Die Komponenten von $\bar{\mathbf{n}}$ beziehen sich auf das x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystem.

$$\bar{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Lösung:

Berechnung der Invarianten I_1^σ , I_2^σ und I_3^σ mit Hilfe von σ_I , σ_{II} und σ_{III} .

Charakteristische Gleichung: $-\sigma^3 + 1561 \sigma^2 + 563\,090 \sigma - 215\,688\,258 = 0$

$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = I_1^\sigma \rightarrow \sigma_{11} = 1784 \text{ N/cm}^2, \sigma_{22} = -446 \text{ N/cm}^2, \sigma_{33} = 223 \text{ N/cm}^2.$

$\mathbf{e}_{III} = \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_{II} = [0,0970 \quad -0,9804 \quad 0,1644]^T$

Hydrostatischer und deviatorischer Anteil: $\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + s_{ij}$ mit $\sigma_m = \frac{1}{3} I_1^\sigma = 520,33 \text{ N/cm}^2,$

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1263,7 & 225 & 0 \\ 225 & -966,3 & 123 \\ 0 & 123 & -297,3 \end{bmatrix} \text{ N/cm}^2$$

2. Invariante des Spannungsdeviators: $J_2^\sigma = \frac{(I_1^\sigma)^2}{3} - I_2^\sigma = 1\,375\,330 \text{ N}^2/\text{cm}^4$

Spannungstranformation: $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{21}} [2 \ 1 \ 4]^T$

$\sigma = \mathbf{n}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 578,2 \text{ N/cm}^2$

1. Kolloquium WS2011/2012

2. Beispiel: Versagenskriterium nach Drucker-Prager

Angabe:

Gegeben: Experimente an spröden Versuchskörpern wurden durchgeführt und ergaben eine einaxiale Druckfestigkeit von $f_{cu} = 30,3 \text{ N/mm}^2$ (Hinweis: $\sigma_I = \sigma_{II} = 0 > \sigma_{III}$) und eine biaxiale Druckfestigkeit f_{cb} (Hinweis: $\sigma_I = 0 > \sigma_{II} = \sigma_{III}$). Weiters ist der Festigkeitsparameter $k = 12,3 \text{ N/mm}^2$ (des DRUCKER-PRAGERSchen Versagenskriteriums) gegeben.

Gesucht:

1. Bestimmen Sie den 2. Festigkeitsparameter α des Versagenskriteriums nach DRUCKER-PRAGER sowie die biaxiale Druckfestigkeit f_{cb} .
2. Ermitteln Sie auf Grundlage des Versagenskriteriums nach DRUCKER-PRAGER die Laststeigerungsfaktoren λ_{DP} , um welche die folgenden Spannungszustände σ proportional gesteigert werden können, bis Versagen eintritt.

$$\sigma_a = \begin{bmatrix} -24 & 0 & -8 \\ 0 & -10 & 0 \\ -8 & 0 & -20 \end{bmatrix}, \quad \sigma_b = \begin{bmatrix} -53 & 8,5 & -9 \\ 8,5 & -11 & 12 \\ -9 & 12 & -23 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

3. Stellen Sie die Versagensfläche nach DRUCKER-PRAGER, die Spannungspfade des einaxialen und biaxialen Druckversuches sowie den Spannungszustand σ_a in einem r - ξ -Diagramm des Hauptnormalspannungsraums dar; Maßstab: $1 \text{ mm} \hat{=} 1 \text{ N/mm}^2$.
4. Wo würde der Schnittpunkt eines (im Ursprung beginnenden) Spannungspfades mit der Versagensfläche liegen, wenn die Steigung dieses Spannungspfades im r - ξ -Koordinatensystem $-1,2$ beträgt (rechnerische Lösung)?

Lösung:

einaxial: σ_{cu} : $\sigma_I = \sigma_{II} = 0$, $\sigma_{III} = -30,30 \text{ N/mm}^2$, $J_2^\sigma = 306,03 \text{ N}^2/\text{mm}^4$, $\sigma_m = -10,1 \text{ N/mm}^2$

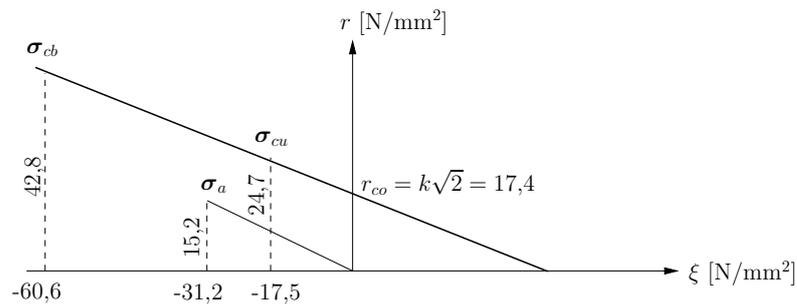
biaxial: σ_{cb} : $\sigma_I = 0$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = -f_{cb}$, $J_2^\sigma = f_{cb}^2/3$, $\sigma_m = -2/3 f_{cb}$

Einsetzen in das Drucker-Prager-Kriterium $\rightarrow \alpha = 0,514$, $f_{cb} = 52,45 \text{ N/mm}^2$

Laststeigerungsfaktoren:

σ_a : $J_2^\sigma = 116 \text{ N}^2/\text{mm}^4$, $\sigma_m = -18 \text{ N/mm}^2$, $f(\sigma_a) = -10,78 < 0 \rightarrow \text{Fall 1} \rightarrow \lambda = 8,12$

σ_b : $J_2^\sigma = 765,25 \text{ N}^2/\text{mm}^4$, $\sigma_m = -29 \text{ N/mm}^2$, $f(\sigma_b) = 0,45 > 0 \rightarrow \text{Fall 3}$, Spannungszustand nicht zulässig



Schnittpunkt:

Spannungspfad $r = -1,2 \xi$

Versagensfläche $r = -\mu \xi + r_{co}$, mit $\mu = \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha = 0,420$ und $r_{co} = k\sqrt{2} = 17,4 \text{ N/mm}^2$

Schnittpunkt: $\xi = -22,3 \text{ N/mm}^2$, $r = 26,8 \text{ N/mm}^2$

1. Kolloquium WS2010/2011

3. Beispiel: Spannungstransformation

Angabe:

Gegeben ist ein Spannungstensor σ mit Bezug auf ein globales x-y-z Koordinatensystem.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 5420 & 0 & 0 \\ 0 & -1335 & 2470 \\ 0 & 2470 & 1680 \end{bmatrix} \quad [\text{N/cm}^2]$$

Hinweis: $\sigma_{xx} = \sigma_1 = 5420 \text{ N/cm}^2$ bezeichnet eine Hauptnormalspannung.

Gesucht:

1. Berechnen Sie die Hauptnormalspannungen und die zugehörigen Richtungsvektoren. Kontrollieren Sie das Ergebnis mit Hilfe der ersten und dritten Invariante des Spannungstensors σ .
2. Ermitteln Sie die Hauptschubspannungen.
3. Bestimmen Sie den hydrostatischen Anteil (mittlere Normalspannung) und den deviatorischen Anteil (deviatorischer Spannungstensor \mathbf{s}) des Spannungstensors σ . Berechnen Sie die zweite Invariante des Spannungsdeviators \mathbf{s} .

Lösung:

Hauptnormalspannungen: Ebener Spannungszustand $\sigma_1 = \sigma_{xx} = 5420 \text{ N/cm}^2$

$$\sigma_{2,3} = \frac{-1335+1680}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1335-1680}{2}\right)^2 + 2470^2} \Rightarrow \sigma_2 = 3066 \text{ N/cm}^2, \sigma_3 = -2721 \text{ N/cm}^2$$

$$I_1^\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 5765 \text{ N/cm}^2$$

$$I_3^\sigma = \sigma_{xx} \cdot \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = -4,52 \cdot 10^{10} \text{ N}^3/\text{cm}^6$$

Winkel zwischen den Hauptspannungsachsen und dem ursprünglichen Koordinatensystem (y-z-Ebene): $\alpha_1 = 60,7^\circ$

$$\text{Richtungsvektoren: } \underline{n}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{n}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,49 \\ 0,87 \end{pmatrix}, \underline{n}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,87 \\ 0,49 \end{pmatrix}$$

Hauptschubspannungen: $\tau_1 = 2894 \text{ N/cm}^2, \tau_2 = 4071 \text{ N/cm}^2, \tau_3 = 1177 \text{ N/cm}^2$

Hydrostatischer und deviatorischer Anteil: $\sigma_{ij} = \sigma^m \delta_{ij} + s_{ij}$ mit $\sigma^m = \frac{1}{3} I_1^\sigma = 1922 \text{ N/cm}^2$,

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma^m & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} - \sigma^m & \sigma_{yy} - \sigma^m & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} - \sigma^m & \sigma_{yz} - \sigma^m & \sigma_{zz} - \sigma^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3498 & 0 & 0 \\ 0 & -3257 & 2470 \\ 0 & 2470 & -242 \end{bmatrix} \text{ N/cm}^2$$

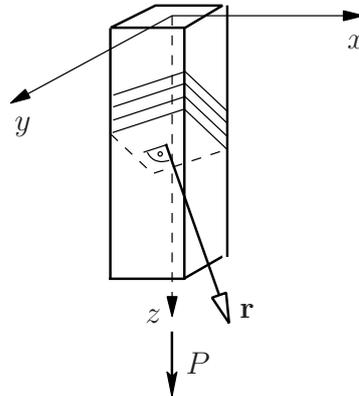
2. Invariante des Spannungsdeviators: $J_2^\sigma = \frac{(I_1^\sigma)^2}{3} - I_2^\sigma = 1,7552 \cdot 10^7 \text{ N}^2/\text{cm}^4$, mit $I_2^\sigma = -6,47 \cdot 10^6 \text{ N}^2/\text{cm}^4$

1. Kolloquium WS2009/2010

2. Beispiel: Zugversuch

Angabe:

Gegeben ist ein Zugstab aus schichtweise aufgebautem Material mit einer quadratischen Querschnittsfläche 5cm x 5cm. Die Richtung normal zur Schichtung ist durch den Vektor $\mathbf{r} = (1|2|4)$ definiert. Der Spannungszustand im Probekörper sei homogen.



Gesucht: Welche Last P kann aufgebracht werden, ohne daß die zulässige Spannung normal zur Schichtung von 200 N/cm^2 bzw. die zulässige Schubspannung in Schichtflächenrichtung von 100 N/cm^2 überschritten wird?

Lösung:

- Der homogene Spannungszustand im Zugstab lautet:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe der Cauchy'schen Formeln läßt sich der auf die Schichtung wirkende Spannungsvektor berechnen:

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij} \cdot n_j = \left\{ 0 \quad 0 \quad 4\sigma_z/\sqrt{21} \right\}^T,$$

wobei n_j den normalisierten Richtungsvektor r_j bezeichnet.

- Vergleich von $\sigma_{nn} = t_i^{(n)} \cdot n_i$ mit der zulässigen Spannung normal zur Schichtung und $\tau_n^2 = \|t_i^{(n)}\|^2 - \sigma_n^2$ mit der zulässigen Schubspannung in Schichtflächenrichtung führt auf die entsprechenden zulässigen Spannungen. Aus der kleineren von Beiden ergibt sich weiters die maximal zulässige Kraft P von 5870 N.

Abschnitt II

DEFORMATION UND VERZERRUNG

1. Kolloquium WS2020/2021

8. Beispiel: Linearisierte Elastizitätstheorie

Angabe:

Gegeben ist der inhomogene Verschiebungszustand $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ des nachfolgend dargestellten Bodens mit Bezug auf ein globales x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystems.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1) = \left\{ \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \left[\frac{\rho g}{2} (h^2 - x_1^2) + q(h - x_1) \right] \right\} \mathbf{e}_1$$

Das Bodenmaterial ist als homogen und isotrop anzunehmen, die Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ wirkt in \mathbf{e}_1 -Richtung, und die Kontaktfläche zwischen dem Bodenmaterial und dem starren Felsuntergrund ($\mathbf{x} = h \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$) ist reibungsfrei.

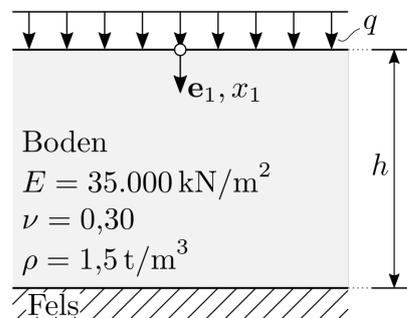


Abbildung 1.3: Horizontal unendlich ausgedehnte Bodenschicht auf starrem Felsuntergrund

Gesucht: Bestimmen Sie (mit $q = 50 \text{ kN/m}^2$) jene Tiefe x_1 , an welcher die Normalspannungskomponente $\sigma_{11}(x_1) = -125 \text{ kN/m}^2$ beträgt.

Lösung:

Mit dem inhomogenen Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1)$ kann die Komponente des linearisierten Verzerrungstensors ε_{11} wie folgt bestimmt werden:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} [\rho g x_1 + q]$$

Die verbleibenden Komponenten folgen mit: $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$. Für einen homogenen und isotropen Werkstoff folgt die Normalspannung σ_{11} (in Anlehnung an das verallgemeinerte HOOKEsche Gesetz mit $\Delta T = 0$) mit:

$$\sigma_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{11} = -[\rho g x_1 + q] \rightarrow x_1 = \frac{q + \sigma_{11}}{-\rho g}$$

Durch berücksichtigen der Eingangsparameter kann die entsprechende Tiefe x_1 ermittelt werden:

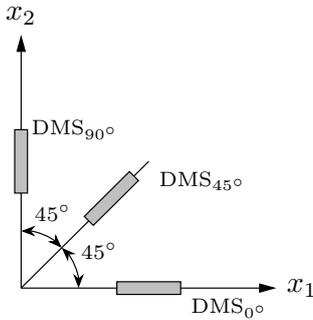
$$\sigma_{11}(x_1) = -125 \text{ kN/m}^2 = -[1.500 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3} \cdot x_1 + 50] \rightarrow x_1 = \frac{50 + (-125)}{-1.500 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3}} = 5,097 \text{ m}$$

1. Kolloquium WS2020/2021

9. Beispiel: Auswertung von Dehnungsmessstreifen

Angabe:

Gegeben sind drei Dehnungsmessstreifen (DMS) in der dargestellten Anordnung.



Gemessene Dehnungen :

$$\epsilon_{0^\circ} = 6 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{45^\circ} = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{90^\circ} = 6 \cdot 10^{-4}$$

Materialeigenschaften :

$$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

Gesucht ist die Schubspannung σ_{12} [kN/cm²] unter Annahme eines ebenen Spannungszustands ($\sigma_{33} = 0$) unter Zugrundelegung der linearisierten Elastizitätstheorie.

Lösung:

Unter Berücksichtigung von

$$\sin 0^\circ = 0, \cos 0^\circ = 1, \sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0 \text{ und } \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

ergibt sich für die Umrechnung der Komponenten des Verzerrungstensors unter Zugrundelegung eines ebenen Spannungszustands:

$$\epsilon'_{11}(\vartheta) = \epsilon_{11} \cdot \cos^2(\vartheta) + \epsilon_{22} \cdot \sin^2(\vartheta) + 2\epsilon_{12} \cdot \sin(\vartheta) \cos(\vartheta)$$

$$\epsilon_{0^\circ} = \epsilon_{11} = 6 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{90^\circ} = \epsilon_{22} = 6 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{45^\circ} = \epsilon_{11}/2 + \epsilon_{22}/2 + \epsilon_{12} = 3 \cdot 10^{-4}$$

Einsetzen der Ergebnisse in die Gleichungen des Hookschen Gesetzes, spezialisiert für den ebenen Spannungszustand, ergibt:

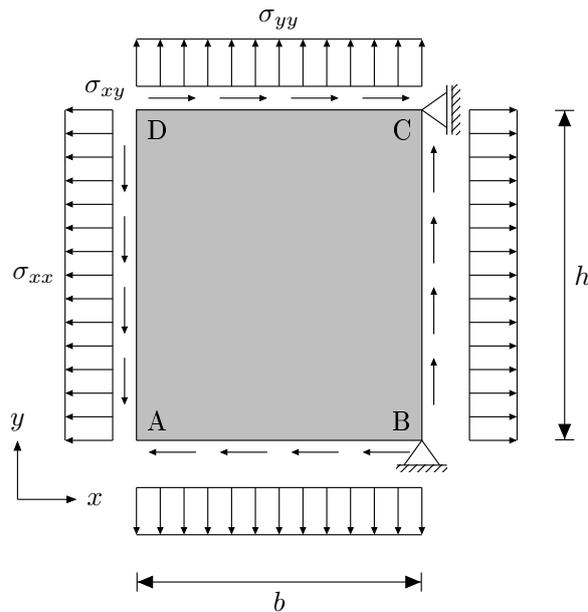
$$\begin{aligned} \sqrt{2}\sigma_{12} &= \frac{E}{1-\nu^2} (1-\nu) \sqrt{2}\epsilon_{12} \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu} \frac{2\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_{0^\circ} - \epsilon_{90^\circ}}{2} \\ &= \frac{21000 \text{ kN/cm}^2}{1+0,3} \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-4} - 6 \cdot 10^{-4} - 6 \cdot 10^{-4}}{2} = -4,8462 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

1. Kolloquium WS2020/2021

10. Beispiel: Punktverschiebungen in der linearisierten Elastizitätstheorie

Angabe:

Gegeben: ist eine ebene Scheibe unter Zug- und Scherbelastung, sowie deren E-Modul und die Querdehnungszahl.



$$\sigma = \begin{bmatrix} 10.0 & -6.0 & 0 \\ -6.0 & 4.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}^2$$

$$E = 3500 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0,2$$

$$h = 12 \text{ cm}$$

$$b = 16 \text{ cm}$$

Gesucht ist die vertikale Verschiebung v_D [cm] des linken, oberen Eckpunktes (Punkt D), unter Zugrundelegung der linearisierten Elastizitätstheorie.

Lösung:

Einsetzen in die Gleichungen des Hookschen Gesetzes, spezialisiert für den ebenen Spannungszustand, ergibt:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{1}{3500 \text{ kN/cm}^2} (-0,2 \cdot 10 \text{ kN/cm}^2 + 4 \text{ kN/cm}^2) = 5,7143 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12} = \frac{1 + 0,2}{3500 \text{ kN/cm}^2} (-6 \text{ kN/cm}^2) = -20,5714 \cdot 10^{-4}$$

Für die Verschiebung des Punktes D ergibt sich aus den Randbedingungen:

$$v_D = \varepsilon_{yy} h - 2\varepsilon_{xy} b = 5,7143 \cdot 10^{-4} \cdot 12 \text{ cm} - 2 \cdot (-20,5714 \cdot 10^{-4}) \cdot 16 \text{ cm} = 7,2686 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

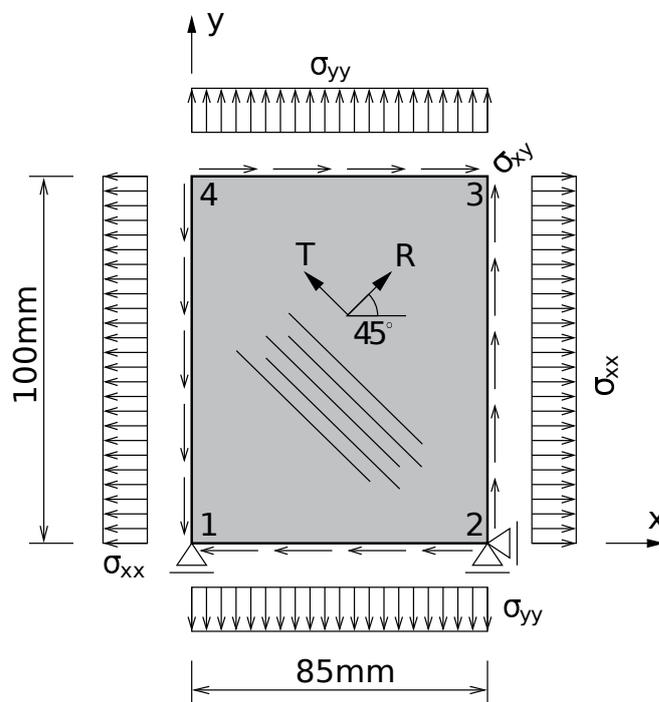
Ersatzkolloquium WS2020/2021

10. Beispiel: Punktverschiebung in der linearisierten Elastizitätstheorie

Angabe:

Gegeben ist eine Scheibe aus Fichtenholz, siehe Abbildung. Der linearisierte Verzerrungstensor dieser Scheibe lautet in der $\mathbf{e}_x\text{-}\mathbf{e}_y\text{-}\mathbf{e}_z$ - Basis:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 5 & 2,5 & 0 \\ 2,5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7,5 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z} \cdot 10^{-2}$$



Gesucht: ist die x -Koordinate von Eckpunkt 4 in der verformten Lage in [mm]. Verwenden Sie dabei die Annahme der linearisierten Elastizitätstheorie.

Lösung:

$$x = -5 \cdot 10^{-2} \cdot 85 \text{ mm} + 2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 100 \text{ mm} = 0,75 \text{ mm}$$

1. Kolloquium WS2019/2020

2. Beispiel: Linearisierte Elastizitätstheorie

Angabe:

Gegeben: Auf einem starren Felsuntergrund wird Bodenmaterial bis zu einer Höhe von $t = 10$ m (vor der Verformung) aufgeschüttet und mit einer vertikalen Gleichlast $q = 5 \cdot 10^4$ Pa belastet. In allen horizontalen Richtungen sind Fels, Bodenaushub und Belastung unendlich ausgedehnt, siehe Skizze.

Das Bodenmaterial ist homogen und isotrop, siehe Abbildung.

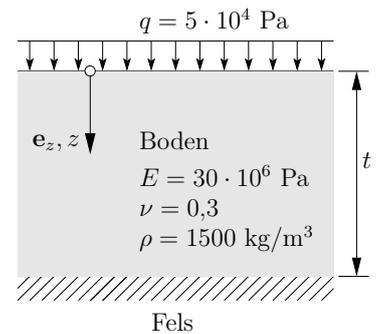
Die Erdbeschleunigung $g = 9,81$ m/s² wirkt in e_z -Richtung.

Die Kontaktfläche zwischen Boden und Fels ist reibungsfrei.

Der inhomogene Verschiebungszustand im Boden lautet

$$\mathbf{u}(z) = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} \left[\frac{\rho g}{2} (t^2 - z^2) + q(t - z) \right] \mathbf{e}_z$$

mit z als vertikaler Koordinate. An der Oberfläche gilt: $z = 0$.



Gesucht

1. Berechnen Sie die Dicke der Bodenschicht nach der Verformung.
2. Berechnen Sie aus dem gegebenen Verschiebungszustand \mathbf{u} , unter Zugrundelegung der linearisierten Elastizitätstheorie, den Verzerrungszustand $\boldsymbol{\varepsilon}$ und den Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}$ als analytische Funktion der gegebenen Variablen.
3. Kontrollieren Sie rechnerisch, dass
 - \mathbf{u} bzw. $\boldsymbol{\sigma}$ die jeweilige Randbedingung bei $z = t$ bzw. $z = 0$ erfüllt,
 - $\boldsymbol{\sigma}$ die lokale Gleichgewichtsbedingung in jedem Punkt des Bodenmaterials erfüllt,
 - die Verwendung des linearisierten Verzerrungstensors in jedem Punkt des Bodens zulässig ist.

Lösung:

1. Die Verschiebung an der Oberfläche erhält man durch spezialisieren von \mathbf{u} an der Stelle $z = 0$: $\mathbf{u}(z = 0) = 0.0306 \text{ m}$. $\Rightarrow t_{neu} = t - \mathbf{u}(z = 0) = 9.969 \text{ m}$.
2. Die Verschiebungsableitung $\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} (-\rho g z - q)$ ist als einzige ungleich Null.
 \Rightarrow Es entsteht ein einaxialer Verzerrungszustand in z -Richtung mit $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$.
Mithilfe des Hookeschen Gesetzes folgt der Spannungszustand:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \text{sym} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{1-\nu} (-\rho g z - q) \\ \frac{\nu}{1-\nu} (-\rho g z - q) \\ -\rho g z - q \end{pmatrix}$$

3. - An der Oberfläche $z = 0$ muss die Spannungsrandbedingung eingehalten werden:
 $\sigma_{zz}(z = 0) \stackrel{!}{=} -q$. Auswerten von $\sigma_{zz}(z = 0)$ ergibt $\sigma_{zz}(z = 0) = -\rho g 0 - q = -q \checkmark$
An der Unterseite $z = t$ muss die Verschiebungsrandbedingung eingehalten werden:
 $u_z(z = t) \stackrel{!}{=} 0$. Auswerten von $u_z(z = t)$ ergibt $u_z(z = t) = 0 \checkmark$
Die Schubspannungsrandbedingung muss sowohl an der Oberseite (aufgrund der ausschließlich vertikalen Belastung) als auch an der Unterseite (aufgrund der Reibungsfreiheit) eingehalten werden: $\sigma_{zx}(z = 0) = \sigma_{zy}(z = 0) = \sigma_{zx}(z = t) = \sigma_{zy}(z = t) \stackrel{!}{=} 0$.
Die Schubspannungskomponenten von $\boldsymbol{\sigma}$ sind unabhängig von z gleich Null \checkmark

- Die Gleichgewichtsbedingung $\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0$ wird folgendermaßen kontrolliert:
Auswerten des Divergenzoperators ergibt $\text{div} \boldsymbol{\sigma} = -\rho g \mathbf{e}_z$, der Volumenkraftvektor lautet $\mathbf{f} = \rho g \mathbf{e}_z$, es gilt also $\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = -\rho g \mathbf{e}_z + \rho g \mathbf{e}_z = 0 \checkmark$

- Zur Kontrolle der Zulässigkeit des linearisierten Verzerrungstensors wertet man $\left| \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|$ für die Stelle $z = 0$ und $z = t$ aus: $\left| \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{z=0} = 0.0012 \ll 1$; $\left| \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{z=t} = 0.0049 \ll 1$
Da $\left| \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|$ sowohl an der Oberseite als auch an der Unterseite wesentlich kleiner als 1 ist, und $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ eine lineare Funktion von z ist, gilt auch $\left| \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{0 \leq z \leq t}$, die Linearisierung ist daher im gesamten Bodenmaterial zulässig.

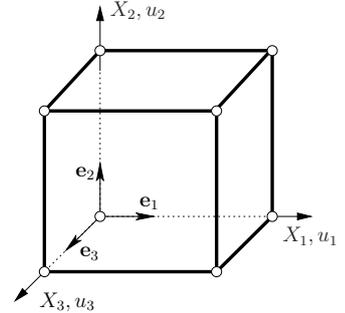
Ersatzkolloquium WS2018/2019

2. Beispiel: Verzerrungen

Angabe:

Gegeben sind die Komponenten zweier Verschiebungsfelder:

$$\mathbf{u}_A(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} -2 X_1 \\ -2 X_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} ; \quad \mathbf{u}_B(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} -2 X_2 \\ +2 X_1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$



Gesucht sind alle Unterpunkte für beide Verschiebungsfelder:

- Berechnen Sie alle Komponenten der linearisierten Verzerrungstensorfelder $\boldsymbol{\varepsilon}$.
- Berechnen Sie alle Komponenten der GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensorfelder \mathbf{E} .
- Ist es zulässig, anstatt des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors den linearisierten Verzerrungstensor zur Beschreibung des Verzerrungszustandes zu verwenden? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der relativen Fehler $|(E_{11} - \varepsilon_{11})/E_{11}|$.
- Skizzieren Sie die (ursprünglich) quadratischen Flächen der x_1 - x_2 -Ebene in der verformten Lage $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$.

Lösung:

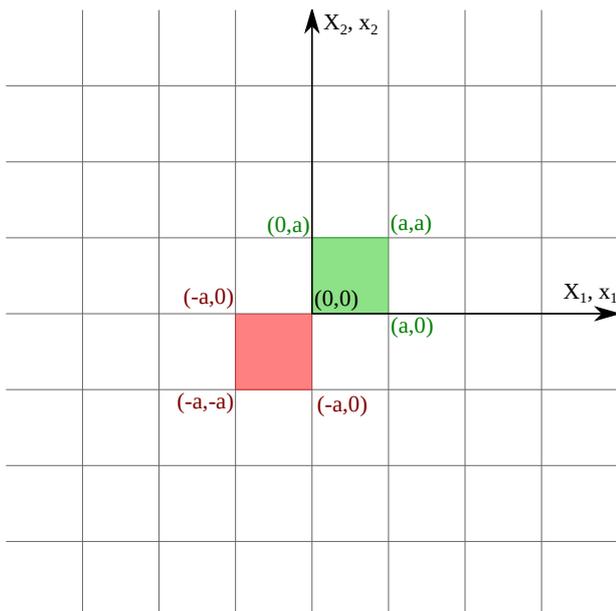
$$\text{a. } \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

$$\text{b. } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

c. relativer Fehler: $|(E_{11} - \varepsilon_{11})/E_{11}| \rightarrow \infty$

Es ist nicht zulässig, anstatt des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors den linearisierten Verzerrungstensor zur Beschreibung des Verzerrungszustandes zu verwenden.

d.



Eine Starrkörperrotation um π ($= 180^\circ$) um die z-Achse.

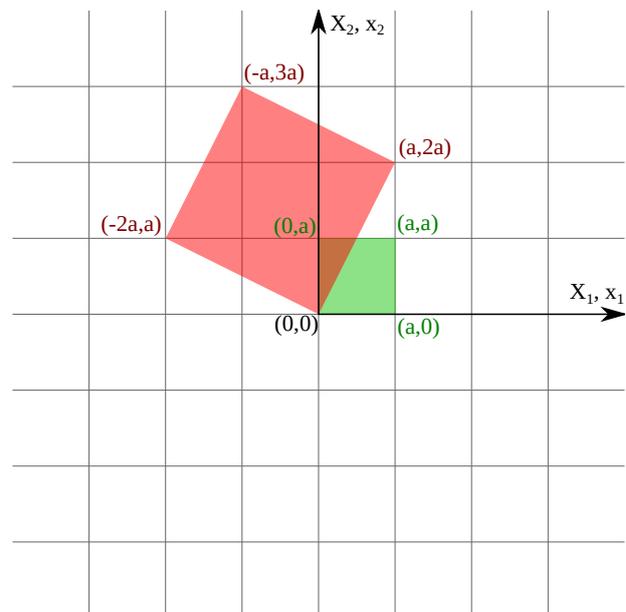
$$\text{a. } \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

$$\text{b. } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

c. relativer Fehler: $|(E_{11} - \varepsilon_{11})/E_{11}| = 1$

Es ist nicht zulässig, anstatt des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors den linearisierten Verzerrungstensor zur Beschreibung des Verzerrungszustandes zu verwenden.

d.



Eine Rotation um $\arctan(2)$ ($\approx 63,4350^\circ$) um die z-Achse als auch eine Streckung in alle Richtungen in der x_1 - x_2 -Ebene mit dem Faktor $\sqrt{5}$.

1. Kolloquium WS2018/2019

2. Beispiel: Räumlicher Verzerrungszustand

Angabe:

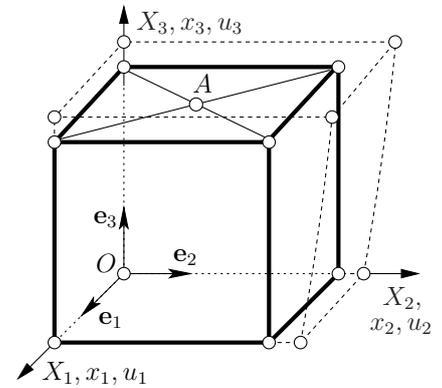
Gegeben ist der Verschiebungszustand \mathbf{u} eines würfelförmigen Körpers mit Seitenlänge $L = 100$ mm,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{10L} (X_2^2 + X_2 X_3) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{10L} X_3^2 \mathbf{e}_3,$$

und zwei Punkte O und A mit Lagevektoren $\mathbf{X}_O = (0; 0; 0)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T$ und $\mathbf{X}_A = (50; 50; 100)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T$.

Gesucht:

- Ermitteln Sie alle Komponenten des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors \mathbf{E} und des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ bezüglich des $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Koordinatensystems in Abhängigkeit der Lagekoordinaten X_1, X_2, X_3 .
- Berechnen Sie die numerischen Werte der Komponenten des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors \mathbf{E} und des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ im Punkt A .
- Ist es zulässig, anstatt des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors den linearisierten Verzerrungstensor im Punkt A zu verwenden? Begründen Sie Ihre Antwort anhand des relativen Fehlers $|(E_{33} - \varepsilon_{33})/E_{33}|$.
- Berechnen Sie den Abstand zwischen O und A in der verformten Lage (Lagevektoren \mathbf{x}_O und \mathbf{x}_A).



Lösung:

a. $\frac{\partial u_1}{\partial X_i} = \frac{\partial u_2}{\partial X_1} = \frac{\partial u_3}{\partial X_1} = \frac{\partial u_3}{\partial X_2} = 0$, mit $i = 1, 2, 3$, somit $E_{11} = E_{12} = E_{21} = E_{13} = E_{31} = 0$ und $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 0$ und

$$\begin{aligned} E_{22} &= \frac{2X_2 + X_3}{10L} \left[1 + \frac{1}{20L} (2X_2 + X_3) \right] \\ E_{23} &= \frac{X_2}{20L} \left[1 + \frac{1}{10L} (2X_2 + X_3) \right] \\ E_{33} &= \frac{2X_3}{10L} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{X_2}{10L} \right)^2 + \left(\frac{2X_3}{10L} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \frac{1}{10L} (2X_2 + X_3) \\ \varepsilon_{23} &= \frac{X_2}{20L} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{2X_3}{10L} \end{aligned}$$

b. Einsetzen der Koordinaten von A (Lagevektor \mathbf{X}_A)

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,22 & 0,03 \\ 0 & 0,03 & 0,22125 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad \text{sowie} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,025 \\ 0 & 0,025 & 0,2 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} .$$

c. $\left| \frac{E_{33} - \varepsilon_{33}}{E_{33}} \right| = 0,0960 \approx 10\%$, dieser Fehler ist jedenfalls nicht deutlich kleiner als 1 und kann somit nicht vernachlässigt werden. Die Verwendung des linearisierten Verzerrungstensors ist *nicht* zulässig.

d. Wegen inhomogenem Verzerrungszustand, Berechnung mittels der Verschiebung von A : $\mathbf{u}_A = (0; 7,5; 10)$, somit die Lage von A im verformten Zustand $\mathbf{x}_A = (50; 57,5; 110)$. Die Länge von \mathbf{x}_A entspricht dem Betrag, also $\|\mathbf{x}_A\| = 133,81 \text{ mm}$, entspricht dem Abstand $\overline{O\bar{A}}$ in der verformten Lage $\overline{o\bar{a}}$.

Erstzkolloquium WS2017/2018

3. Beispiel: Räumlicher Verzerrungszustand

Angabe:

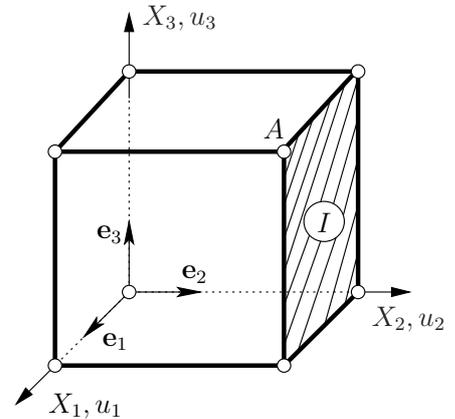
Gegeben ist der Verschiebungszustand \mathbf{u} eines würfelförmigen Körpers mit Seitenlänge $L = 100$ mm,

$$\mathbf{u} = \left(\frac{a}{L}X_1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{b}{L}X_3 + \frac{c}{L^2}X_1X_3\right)\mathbf{e}_3$$

mit den Konstanten $a = 20$ mm, $b = 10$ mm, und $c = 25$ mm.

Gesucht:

- Ermitteln Sie alle Komponenten des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors \mathbf{E} bezüglich des $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Koordinatensystems in Abhängigkeit von den Lagekoordinaten.
- Berechnen Sie die numerischen Werte der Komponenten des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors \mathbf{E} im Punkt A .
- Ist es zulässig, anstatt des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors den linearisierten Verzerrungstensor im Punkt A zu verwenden? Begründen Sie Ihre Antwort anhand des relativen Fehlers $|(E_{11} - \varepsilon_{11})/E_{11}|$, wobei gilt: $\varepsilon_{11} = 0,20$.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt der Seitenfläche I in der unverformten und verformten Lage und stellen Sie die unverformte und verformte Seitenfläche in der \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 -Ebene grafisch dar.



Lösung:

a.

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \frac{a}{L}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial X_1} = \frac{c}{L^2} X_3, \quad \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \frac{b}{L} + \frac{c}{L^2} X_1,$$

alle anderen $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = 0$.

Weiters $E_{12} = E_{21} = E_{22} = E_{23} = E_{32} = 0$ und

$$E_{11} = 0,22 + \frac{1}{2}(0,0025X_3)^2$$

$$E_{13} = E_{31} = \frac{1}{2}[0,0025X_3 + 0,0025X_3(0,1 + 0,0025X_1)]$$

$$E_{33} = 0,1 + 0,0025X_1 + \frac{1}{2}(0,1 + 0,0025X_1)^2$$

b.

Punkt $A = (100/100/100)$ mm und somit

$$E_{11} = 0,25125, \quad E_{13} = E_{31} = 0,16875, \quad E_{33} = 0,41125$$

c.

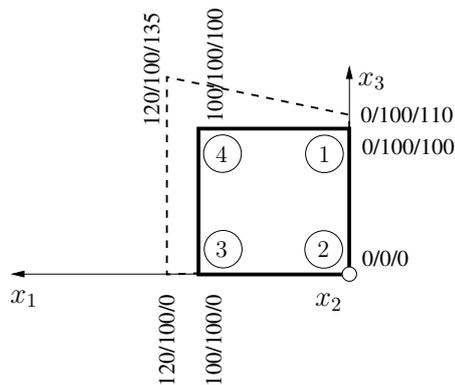
$|(E_{11} - \varepsilon_{11})/E_{11}| = 0,20 = 20\%$ und somit ein nicht vernachlässigbarer Fehler. Daher ist die linearisierte Elastizitätstheorie nicht anwendbar.

d.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \text{mm}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{mm}, \quad \text{und} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} \text{mm},$$

berechenbar durch direktes Einsetzen in die Angabe

Somit $A_0 = 100 \cdot 100 = 10000 \text{ mm}^2$ und $A = 110 \cdot 120 + \frac{25 \cdot 120}{2} = 14700 \text{ mm}^2$



1. Kolloquium WS2016/2017

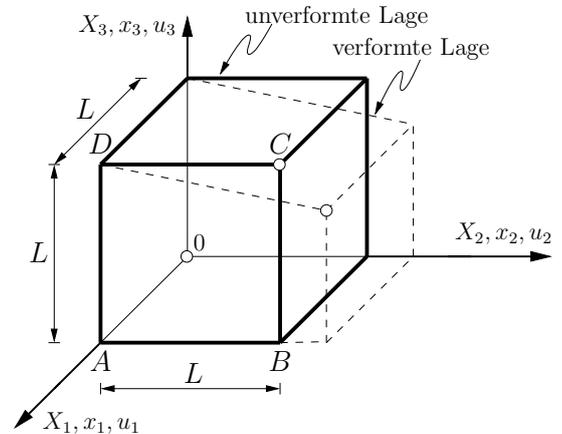
1. Beispiel: Würfel unter Verschiebungsbeanspruchung

Angabe:

Gegeben ist ein Würfel mit der Seitenlänge L , sowie das Verschiebungsfeld \mathbf{u} , welches die verformte Lage des Würfels beschreibt. Die Komponenten von \mathbf{u} in LAGRANGE'scher Schreibweise lauten:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -\frac{X_2}{L} s \quad \text{und} \quad u_3 = \frac{X_2 X_3}{L^2} r,$$

wobei r und s Konstanten sind.



Gesucht:

- Berechnen Sie alle Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ in Abhängigkeit der Lagekoordinaten, der Körperabmessungen und der Verschiebungskonstanten r und s .
- Es ist nun anzunehmen, dass $L = 5 \text{ cm}$ sowie $r = s = -1 \text{ cm}$ gilt. Dann lautet der dem gegebenen Verschiebungsfeld entsprechende GREEN-LAGRANGE'sche-Verzerrungstensor \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,22 + \frac{X_3^2}{1250 \text{ cm}^2} & \frac{(X_2 - 25 \text{ cm}) \cdot X_3}{1250 \text{ cm}^2} \\ 0 & \frac{(X_2 - 25 \text{ cm}) \cdot X_3}{1250 \text{ cm}^2} & \frac{X_2^2}{1250 \text{ cm}^2} - \frac{X_2}{25 \text{ cm}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Berechnen Sie die numerischen Werte der Komponenten des GREEN-LAGRANGE'schen, als auch des linearisierten Verzerrungstensor im Punkt C .

- Ist es zulässig, anstatt des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors den linearisierten Verzerrungstensor zur Beschreibung des Verzerrungszustandes im Punkt C zu verwenden? Begründen Sie Ihre Antwort anhand des relativen Fehlers $|(\mathbf{E}_{23} - \boldsymbol{\varepsilon}_{23})/\mathbf{E}_{23}|$.
- Berechnen Sie den Winkel zwischen den Seitenkanten \overline{BC} und \overline{CD} in der verformten Lage.

Lösung:

1. $0 = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13}$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{s}{L}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{X_3 \cdot r}{L^2} \right) = \frac{X_3 \cdot r}{2 \cdot L^2}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{X_2 \cdot r}{L^2}$$

2. $\varepsilon_{22} = 0,2$

$$\varepsilon_{23} = -0,1$$

$$\varepsilon_{33} = -0,2$$

$$0 = E_{11} = \varepsilon_{11} = E_{12} = \varepsilon_{12} = E_{13} = \varepsilon_{13}$$

$$E_{22} = 0,24$$

$$E_{23} = -0,08$$

$$E_{33} = -0,18$$

3. Es ist unzulässig, dass anstatt des GREEN'schen auch der linearisierte Verzerrungstensor zur Beschreibung des Verzerrungszustandes im Punkt C verwendet wird, da $\varepsilon \not\ll 1$ ist und der relative Fehler $|(E_{23} - \varepsilon_{23})/E_{23}|$ gleich 25% beträgt.

4. $\sin(\gamma_{23}) = \frac{2E_{23}}{\sqrt{(2E_{22}+1)(1+2E_{33})}} = -\frac{2 \cdot 8\%}{\sqrt{(1+2 \cdot 24\%)(1-2 \cdot 18\%)}} = -\frac{1}{\sqrt{37}} \approx -0,164399$

$$\alpha_{\overline{BC}, \overline{CD}} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{37}}\right) \approx 1,73595 \text{ rad } (\hat{=} 99,4623^\circ)$$

1. Kolloquium WS2015/2016

3. Beispiel: Deformationsanalyse

Angabe:

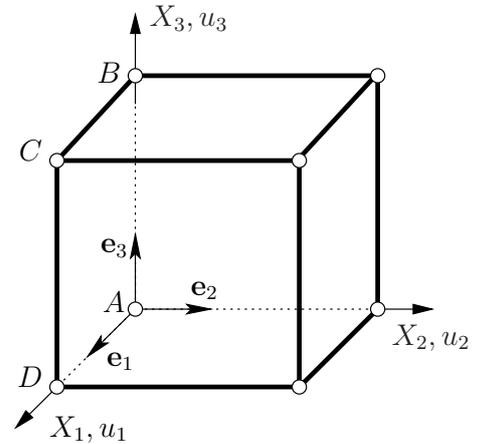
Gegeben ist der Verschiebungszustand \mathbf{u} eines würfelförmigen Körpers mit Seitenlänge $L = 100$ mm,

$$\mathbf{u} = \left(a + \frac{b}{L}X_1 + \frac{c}{L}X_3 \right) \mathbf{e}_1$$

mit den Konstanten $a = 30$ mm, $b = 10$ mm, und $c = 20$ mm.

Gesucht:

1. Ermitteln Sie die Komponenten des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors \mathbf{E} bezüglich des $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Koordinatensystems.
2. Ermitteln Sie die Hauptnormalverzerrungen und die Richtungen der Hauptnormalverzerrungen. Geben Sie die drei Winkel an, welche die Richtung der größten Hauptnormalverzerrung mit den Koordinatenachsen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ einschließt.
3. Berechnen Sie die maximal auftretende Schubverzerrung.
4. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Würfelseiten \overline{AB} und \overline{AD} in der verformten Lage und skizzieren Sie die verformte Lage der Seitenfläche $ABCD$.



Lösung:

Die Komponenten von \mathbf{E} ergeben sich aus den Verschiebungsableitungen:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0,105 & 0 & 0,11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,11 & 0 & 0,02 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Die Hauptnormalverzerrungen sind $E_I = 0,1804$, $E_{II} = 0$ und $E_{III} = -0,0554$.

Die zugehörigen Hauptrichtungen sind:

$$\mathbf{e}_I = \begin{pmatrix} 0,8247 \\ 0 \\ 0,5655 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad \mathbf{e}_{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad \mathbf{e}_{III} = \begin{pmatrix} -0,5655 \\ 0 \\ 0,8247 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Die Winkel zwischen \mathbf{e}_I und den Koordinatenachsen kann man durch das innere Produkt berechnen:

$\cos \angle(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_i) = \frac{\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_I| |\mathbf{e}_i|}$ mit $i = 1, 2, 3$ und es folgt:

$$\angle(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_1) = 34,44^\circ, \quad \angle(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_2) = 90^\circ \quad \text{und} \quad \angle(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_3) = 55,56^\circ$$

Anmerkung: da $\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}$ Eigenvektoren sind, ist auch $-\mathbf{e}_I, -\mathbf{e}_{II}, -\mathbf{e}_{III}$ eine gültige Lösung. Hier wurde auch kein Rechtssystem gefordert. Auch für die Winkel ergeben sich dann immer 2 mögliche gültige Lösungen.

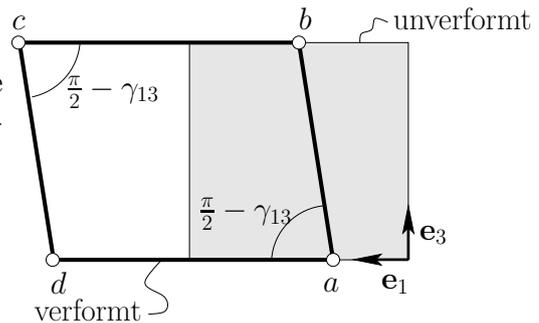
Die maximale Schubverzerrung (=Radius des größten MOHRschen Verzerrungskreises) lautet:

$$\max E_{nt} = \frac{E_I - E_{III}}{2} = 0,118$$

Der Winkel zwischen AB und AD in der verformten Lage ergibt sich aus der Tensorkomponente E_{13} (Interpretationsformel):

$$\sin \gamma_{13} = \frac{2E_{13}}{\sqrt{(1+2E_{11})(1+2E_{33})}} \Rightarrow \gamma_{13} = 11,31^\circ$$

und der neue Winkel beträgt $90 - 11,31 = 78,69^\circ$.

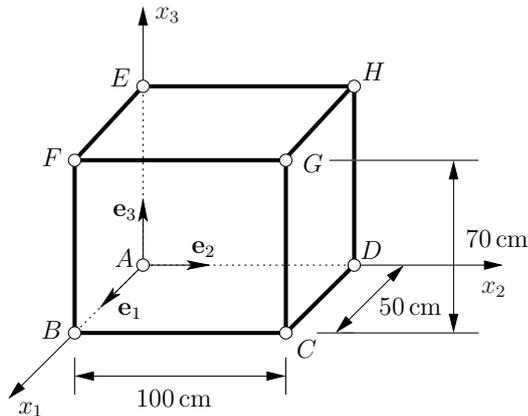


1. Kolloquium WS2014/2015

3. Beispiel: Deformationsanalyse

Angabe:

Gegeben ist ein prismatischer Probekörper in der unverformten Lage laut Abbildung. In der verformten Lage weist der Körper einen homogenen Verzerrungszustand \mathbf{E} auf.



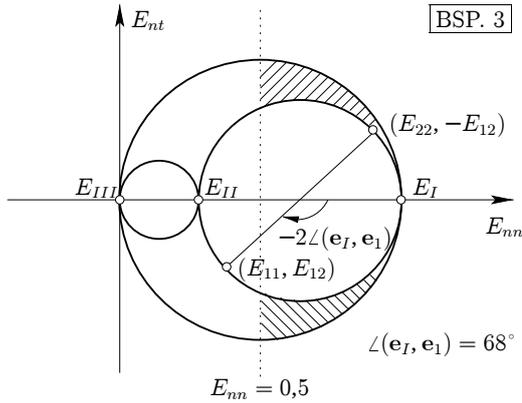
GREEN-LAGRANGEScher Verzerrungstensor mit Bezug auf das gewählte $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Basissystem:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0,375 & -0,250 & 0 \\ & 0,900 & 0 \\ \text{symm.} & & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Gesucht:

1. Stellen Sie den Verzerrungszustand in der MOHRschen Ebene maßstäblich dar. Bestimmen Sie mit Hilfe Ihrer Zeichnung grafisch jenen Winkel, den die Basisvektoren \mathbf{e}_I und \mathbf{e}_I einschließen. Markieren Sie außerdem all jene Bereiche in den MOHRschen Verzerrungskreisen, die Ebenen charakterisieren, in denen die zugehörige Normalverzerrungskomponente den Wert 0,5 überschreitet ($E_{nn} > 0,5$).
2. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Prismenkanten \overline{AB} und \overline{AD} in der verformten Lage.
3. Bestimmen Sie die Länge der Diagonalen \overline{BG} des Prismas in der verformten Lage.

Lösung:



$$\sin \gamma_{12} = \frac{2 E_{12}}{\sqrt{(2 E_{11} + 1) \cdot (2 E_{22} + 1)}} = -0,2278 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{12} = -13,0545^\circ$$

Der Winkel zwischen den Kanten in der verformten Lage beträgt daher $90^\circ - (-13,05445^\circ) = 103,0545^\circ$.

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0,8191 & 0,5735 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}^T \quad \text{mit } \alpha = \text{atan}\left(\frac{70}{100}\right) = 0,611$$

$$E_{BG} = \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0,6040$$

$$\text{physikalische Verzerrung: } \epsilon_{BG} = \sqrt{1 + 2E_{BG}} - 1 = 0,4860$$

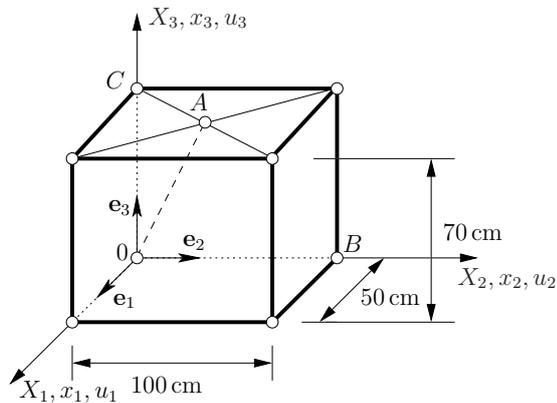
$$\text{Die Länge der Diagonalen in der verformten Lage: } \overline{bg} = (1 + \epsilon_{BG}) \overline{BG} = 181,3836 \text{ cm}$$

1. Kolloquium WS2013/2014

3. Beispiel: Deformationsanalyse

Angabe:

Gegeben ist ein prismatischer Probekörper in der unverformten Lage laut Abbildung.



Der Verschiebungszustand des Körpers ist durch ein Verschiebungsfeld \mathbf{u} charakterisiert, aus dem ein homogener Verzerrungszustand resultiert, der durch den GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensor \mathbf{E} beschrieben ist:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6250 & -0,1875 \\ 0 & -0,1875 & -0,3438 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

$$\text{mit } u_1 = 20 \text{ cm}, \quad u_2 = \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{4}X_3, \quad u_3 = -\frac{1}{2}X_3$$

Gesucht:

1. Kontrollieren Sie, ausgehend vom Verschiebungszustand \mathbf{u} , die E_{33} -Komponente des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors.
2. Könnte anstatt des GREEN-LAGRANGESchen auch der linearisierte Verzerrungstensor zur Beschreibung des Verzerrungszustandes verwendet werden? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Bestimmen Sie die (physikalische) Dehnung der Strecke $\overline{0A}$ mit Hilfe der Lagekoordinaten der Punkte 0 und A in der verformten und unverformten Lage.
4. Berechnen Sie auf Basis der Komponenten des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors den Winkel, den die Prismenkanten $\overline{0B}$ und $\overline{0C}$ in der verformten Lage einschließen.

Lösung:

$$E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \right) = -0,34375 \quad \checkmark$$

Der linearisierte Verzerrungstensor kann nicht verwendet werden, da z.B. $\left| \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right| = \frac{1}{2}$ und das nicht wesentlich kleiner als 1 ist.

$$\text{Punkte } 0 \text{ und } A \text{ in } \textit{unverformter} \text{ Lage [in cm]: } \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_A = \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 70 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{0A} = \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 70 \end{pmatrix}, |\overline{0A}| = 89,582$$

$$\text{Punkte } o \text{ und } a \text{ in } \textit{verformter} \text{ Lage } \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}: \mathbf{x}_o = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} 45 \\ 57,5 \\ 35 \end{pmatrix}, \Rightarrow \overline{oa} = \begin{pmatrix} 25 \\ 57,5 \\ 35 \end{pmatrix}, |\overline{oa}| = 71,807$$

$$\text{physikalische Verzerrung: } \epsilon_{\Delta} = \frac{|\overline{oa}| - |\overline{0A}|}{|\overline{0A}|} = -0,1984$$

$$\sin \gamma_{23} = \frac{2 E_{23}}{\sqrt{(2 E_{22} + 1) \cdot (2 E_{33} + 1)}} = -0,44721 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{23} = -26,565^\circ$$

Der Winkel zwischen den Kanten in der verformten Lage beträgt daher $90^\circ - (-26,565^\circ) = 116,565^\circ$.

1. Kolloquium WS2012/2013

3. Beispiel: Verzerrung schubbeanspruchte Wand

Angabe:

Gegeben: Auf einer unverformten Wand wurde ein Dehnungsmessstreifen (DMS) appliziert, der einen Winkel von $\alpha = 45^\circ$ mit dem Basisvektor \mathbf{e}_1 einschloss (siehe Abbildung 1). Nach der Deformation wird eine Dehnung von 2‰ gemessen ($\epsilon_{DMS} = 0,002$).

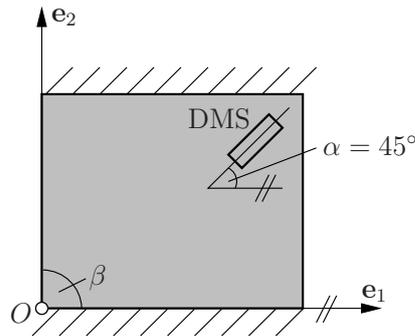


Abbildung 1.4: Schubbeanspruchte Wand in der unverformten Lage

Der homogene Verzerrungszustand der Wand ist durch folgenden linearisierten Verzerrungstensor ϵ charakterisiert:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

Gesucht:

1. Berechnen Sie die Komponenten ϵ_{12} und ϵ_{21} des Verzerrungstensors.
2. Geben Sie den Winkel β in der verformten Lage an.
3. Geben Sie die Hauptnormalverzerrungen sowie die zugehörigen Verzerrungshauptrichtungen \mathbf{e}_I , \mathbf{e}_{II} , \mathbf{e}_{III} (als Einheitsvektoren) an.
4. Zeichnen Sie in Abbildung 1 die Verzerrungshauptrichtungen \mathbf{e}_I und \mathbf{e}_{III} ein.

Lösung:

Komponenten des Verzerrungstensors:

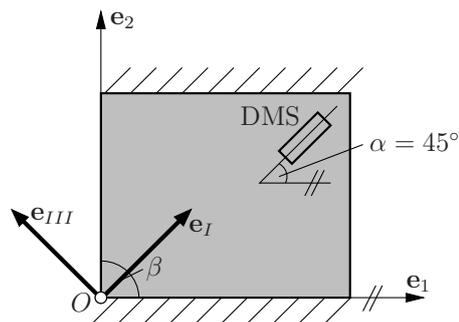
$$\epsilon_{DMS} \approx \epsilon_{DMS} = \mathbf{n}^T \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{n}; \quad \mathbf{n} = [0,7071 \ 0,7071 \ 0] \Rightarrow \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon_{DMS} = 0,002$$

$$\text{oder } \epsilon_{DMS} = \epsilon_{11} \cos^2 \alpha + \epsilon_{22} \sin^2 \alpha + 2\epsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon_{DMS} = 0,002$$

Winkel β in der verformten Lage: $\beta = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \epsilon_{12} = 89,7708^\circ$

Hauptnormalverzerrungen und Verzerrungshauptrichtungen:

$$\epsilon_I = 0,002 \quad \epsilon_{II} = 0,001 \quad \epsilon_{III} = -0,002 \quad \mathbf{e}_I = [0,7071 \ 0,7071 \ 0] \quad \mathbf{e}_{II} = [0 \ 0 \ -1] \quad \mathbf{e}_{III} = [-0,7071 \ 0,7071 \ 0]$$

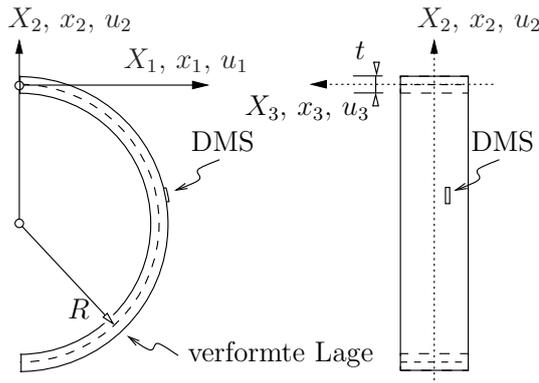


1. Kolloquium WS2011/2012

3. Beispiel: Blattfeder mit Dehnungsmessstreifen

Angabe:

Gegeben: Eine initial perfekt ebene Blattfeder der Länge L und der Dicke $t = 2\text{ mm}$ wird verschiebungsgesteuert zu einer Zylinderoberfläche verformt (siehe Abbildung der deformierten Lage). Die Zusammenhänge der Koordinaten mit Bezug auf die unverformte bzw. verformte Lage, $x_1(X_1, X_2)$ und $x_2(X_1, X_2)$, sind angegeben. Der dargestellte Dehnungsmessstreifen (DMS) wurde vor der Deformation parallel zur X_1 -Achse aufgebracht. In der verformten Lage wurde der Dehnungsmesswert $\epsilon = 1,5708\text{‰}$ ermittelt.



$$x_1(X_1, X_2) = (R + X_2) \sin\left(\frac{X_1}{R}\right)$$

$$x_2(X_1, X_2) = (R + X_2) \cos\left(\frac{X_1}{R}\right) - R$$

$$(x_3 = X_3 \quad \Leftrightarrow \quad u_3 \equiv 0)$$

Gesucht:

1. Geben Sie die Verschiebungskomponenten u_1 und u_2 in Abhängigkeit der LAGRANGESchen Koordinaten X_1 und X_2 an. Berechnen Sie die Komponente E_{11} des GREENSchen Verzerrungstensors. Vereinfachen Sie alle Ergebnisse soweit wie möglich.
2. Ermitteln Sie auf der Basis der gemessenen Dehnung ϵ die Länge L der Blattfeder.

Lösung:

$$u_1 = x_1 - X_1 = (R + X_2) \sin \frac{X_1}{R} - X_1$$

$$u_2 = x_2 - X_2 = (R + X_2) \cos \frac{X_1}{R} - R - X_2$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \frac{R+X_2}{R} \cos \frac{X_1}{R} - 1$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial X_1} = -\frac{R+X_2}{R} \sin \frac{X_1}{R}$$

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 \right] = \frac{X_2}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{X_2}{R} \right)^2$$

Länge der Blattfeder:

$$\text{Interpretationsformel: } E_{11} = 1/2[(1 + \epsilon_{11})^2 - 1] = 1,5720 \cdot 10^{-3} \text{ mit } \epsilon_{11} = \epsilon = 1,5708 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Oberkante der Blattfeder: } X_2 = h \rightarrow E_{11} = \frac{h}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{R} \right)^2 = 1,5720 \cdot 10^{-3}$$

Mit $h = t/2 = 1\text{ mm}$ und $R = L/\pi$ ergibt sich: $R = 636,62\text{ mm}$ und $L = 2000,00\text{ mm}$

Abschnitt III

ARBEIT, ENERGIE UND ELASTIZITÄT

1. Kolloquium WS2020/2021

12. Beispiel: Elastizitätstheorie orthotroper Werkstoffe

Angabe:

Gegeben ist die abgebildete Scheibe aus Fichtenholz, welche durch einen biaxialen Spannungszustand belastet wird (siehe Abbildung). Die bekannten Materialparameter sind gegeben zu:

$$E_R = 2000 \text{ N/mm}^2 \quad \nu_{TR} = 0,45$$

$$E_T = 2500 \text{ N/mm}^2 \quad \nu_{LR} = 0,50$$

$$E_L = 9000 \text{ N/mm}^2 \quad \nu_{LT} = 0,18$$

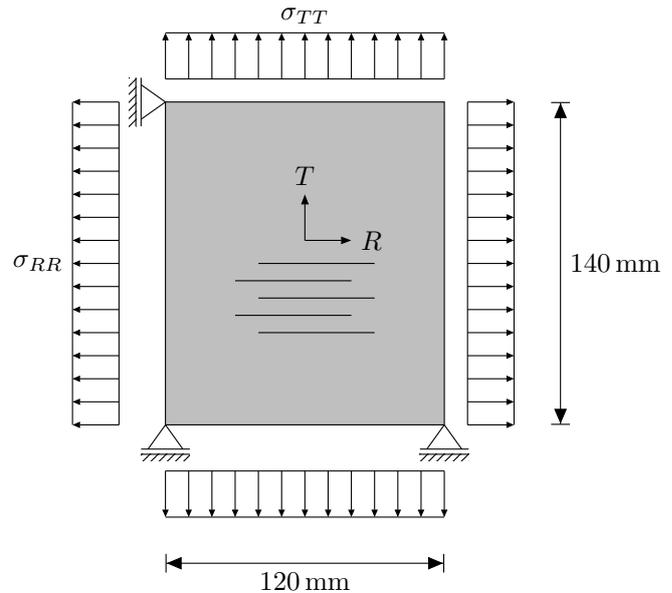
$$G_{TL} = 550 \text{ N/mm}^2$$

$$G_{RL} = 525 \text{ N/mm}^2$$

$$G_{RT} = 500 \text{ N/mm}^2$$

Die Belastung beträgt:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$



Gesucht ist die Verzerrung in Richtung e_T , ε_{TT} .

Lösung:

Aufgrund der Symmetrie des Nachgiebigkeitstensors gilt:

$$\frac{\nu_{TR}}{E_T} = \frac{\nu_{RT}}{E_R}$$

Damit kann die Verzerrungskomponente ε_{TT} berechnet werden zu:

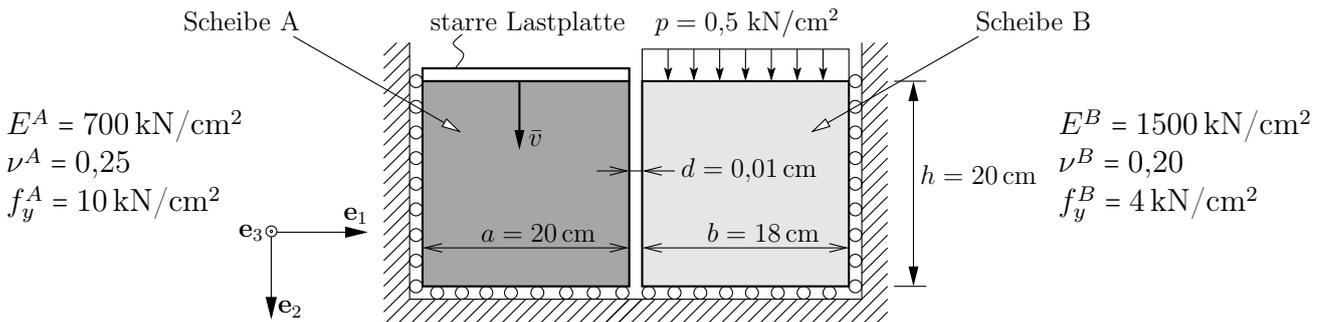
$$\varepsilon_{TT} = -\frac{\nu_{TR}}{E_T} \sigma_{RR} + \frac{1}{E_T} \sigma_{TT} = \frac{1}{2500} (-0.45 \cdot 7 + 12) = 3,54 \cdot 10^{-3}$$

1. Kolloquium WS2019/2020

1. Beispiel: Ebener Spannungszustand

Angabe:

Gegeben sind zwei Scheiben A und B gleicher Dicke, welche zueinander den Spalt d aufweisen, siehe Abbildung. Am oberen Rand von Scheibe A kann durch eine starre Lastplatte ein Stauchungsweg \bar{v} in \mathbf{e}_2 -Richtung aufgebracht werden. Auf Scheibe B wirkt eine Druckspannung $p = 0,5 \text{ kN/cm}^2$ in \mathbf{e}_2 -Richtung. Die Materialparameter, welche das isotrope Verhalten der beiden Scheiben beschreiben, sind der untenstehenden Auflistung zu entnehmen.



Hinweise: Solange sich die Scheiben nicht berühren, liegt in beiden Scheiben ein einaxialer Spannungszustand vor. Alle Berandungen und die Kontaktflächen sind reibungsfrei.

Gesucht:

1. Es gilt $\bar{v} = 0$: Bestimmen Sie den Laststeigerungsfaktor λ für die Druckspannung p , sodass es in Scheibe B zum Versagen nach TRESCA kommt. Nehmen Sie an, dass sich die Scheiben zum Zeitpunkt des Versagens nicht berühren.
2. Es gilt $\bar{v} = 0$: Zeigen Sie nun, dass sich die beiden Scheiben bei der Belastung $\lambda \cdot p$ tatsächlich nicht berühren und somit die Annahme in Punkt 1 zulässig war.
3. Bestimmen Sie den erforderlichen Stauchungsweg \bar{v} am oberen Rand von Scheibe A (bei gleichzeitiger Belastung $p = 0,5 \text{ kN/cm}^2$ auf Scheibe B), sodass sich beide Scheiben gerade berühren, und geben Sie die dabei auftretenden Komponenten des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ für Scheibe A und B vollständig an.

Lösung:

1. Annahme keine Berührung:

$$\boldsymbol{\sigma}^B = -p \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_I^B = \sigma_{II}^B = 0 \quad \sigma_{III}^B = -p$$
$$\text{TRESCA: } \lambda(\sigma_I - \sigma_{III}) - f_y^B = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = f_y^B / p = 8,0$$

2. Kontrolle der Annahme: $\varepsilon_{11}^B = \frac{-\nu^B}{E^B}(-\lambda \cdot p) = 0,000533 \quad \Rightarrow \quad u_1^B = \varepsilon_{11}^B \cdot 18 = 0,0096 < d$

3. Scheibe B:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^B \\ \varepsilon_{22}^B \\ \varepsilon_{33}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E^B} & \frac{-\nu^B}{E^B} \\ \frac{-\nu^B}{E^B} & \frac{1}{E^B} \\ \frac{-\nu^B}{E^B} & \frac{-\nu^B}{E^B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11}^B = 0 \\ \sigma_{22}^B = -0,5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^B = \begin{bmatrix} 0,67 & 0 & 0 \\ 0 & -3,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,67 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \quad \boldsymbol{\sigma}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}^2$$

Berührung wenn $u_1^A + u_1^B = d$

$$\Rightarrow u_1^A = d - u_1^B = 0,01 - \varepsilon_{11}^B \cdot b = 0,0088 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11}^A = 0,0088/a = 0,00044$$

Scheibe A:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^A = 0,00044 \\ \varepsilon_{22}^A = -v/h \\ \varepsilon_{33}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E^A} & \frac{-\nu^A}{E^A} \\ \frac{-\nu^A}{E^A} & \frac{1}{E^A} \\ \frac{-\nu^A}{E^A} & \frac{-\nu^A}{E^A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11}^A = 0 \\ \sigma_{22}^A \end{bmatrix}$$

$$\text{I: } \varepsilon_{11}^A = 0,00044 = \frac{-0,25}{700} \sigma_{22}^A \quad \Rightarrow \quad \sigma_{22}^A = -1,232 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{II: } \varepsilon_{22}^A = \frac{1}{700} \sigma_{22}^A = -0,00176 = -v/h \quad \Rightarrow \quad v = 0,0352 \text{ cm}$$

$$\text{III: } \varepsilon_{33}^A = \frac{-0,25}{700} \sigma_{22}^A = 0,00044$$

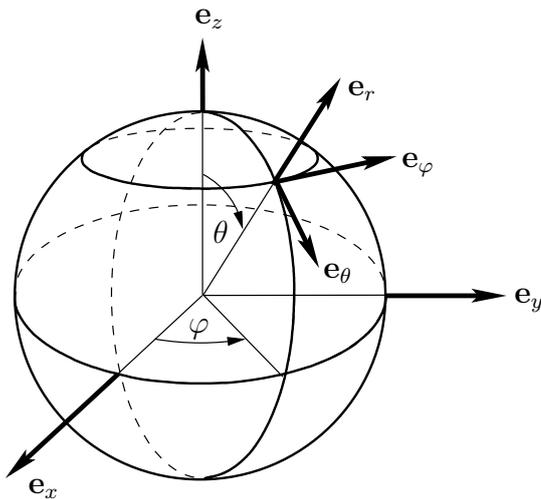
$$\boldsymbol{\sigma}^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,232 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}^2 \quad \boldsymbol{\varepsilon}^A = \begin{bmatrix} 0,44 & 0 & 0 \\ 0 & -1,76 & 0 \\ 0 & 0 & 0,44 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

1. Kolloquium WS2018/2019

1. Beispiel: Spannungen/Verzerrungen/Festigkeiten

Angabe:

Gegeben ist ein gasgefüllte Kugelschale laut Abbildung. Die Schale weist ein isotropes Materialverhalten auf. Ein Dehnungsmessstreifen (DMS) wurde vor dem Einfüllen des Gases an der Oberfläche der spannungsfreien Kugelschale angebracht.



unverformter Radius:	$R_0 = 60,0 \text{ cm}$
unverformte Blechdicke:	$t_0 = 1,0 \text{ cm}$
Querdehnungszahl	$\nu = 0,2$
Fließgrenze	$f_y = 30,0 \text{ kN/cm}^2$

Hinweise: Legen Sie Ihren Berechnungen einen ebenen Spannungszustand (ESZ) und die geometrisch lineare Elastizitätstheorie ($\epsilon_i \approx \epsilon_{ii}$, $R \approx R_0$, $t \approx t_0$) zugrunde. Die Kugelschale kann als dünnwandiger Querschnitt betrachtet werden ($t_0 \ll R_0 \Rightarrow R_0 \pm \frac{t_0}{2} \approx R_0$).

Gesucht:

- Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul E der Kugelschale bei einem Innendruck $p_i = 0,1 \text{ kN/cm}^2$ unter der Annahme, dass ein DMS am Äquator eine Dehnung von $\epsilon_\varphi = 2,4 \cdot 10^{-4}$ misst.
- Bei welchem Innendruck p_i beträgt die Blechdicke t in der verformten Lage $0,999 \text{ cm}$? Geben Sie auch den linearisierten Verzerrungstensor $\boldsymbol{\epsilon}$ und den Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ in der $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ -Basis bei Erreichen des soeben berechneten Innendrucks *vollständig* an.
- Bei welchem Innendruck $p_i \geq 0$ kommt es zu einem Materialversagen der Kugelschale, wenn Sie das Festigkeitskriterium nach TRESCA zugrunde legen?
- Bestimmen Sie das Volumen der Kugel zum Zeitpunkt des Versagens (wenn also der Innendruck p_i den Wert aus Punkt c angenommen hat). Um wie viel Prozent hat sich das Volumen zum Versagenszeitpunkt vergrößert (verglichen mit dem Volumen bei $p_i = 0 \text{ kN/cm}^2$)?

Hinweis: $V_{Kugel} = (4/3) \pi r^3$

- Wie groß muss das Verhältnis R_0/t_0 mindestens sein, damit die Annahme eines ESZ sinnvoll ist.

Hinweis: Der ESZ kann als technisch sinnvolle Näherung betrachtet werden, wenn die größte Spannung in Dickenrichtung zumindest eine Zehnerpotenz kleiner als die Normalspannung in Umfangsrichtung ist.

Lösung:

a. Ansatz nach dem Projektionsprinzip für die Kugel: $A_{\text{Ring}} = 2r\pi t$, $A_{\text{Fläche}} = r^2\pi$, ergibt $p_i A_{\text{Fläche}} = \sigma_{\varphi\varphi} A_{\text{Ring}}$ und somit $\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_i r}{2t}$, wobei $\sigma_{\varphi\varphi}$ in alle Richtungen entlang der Kugeloberfläche auftritt (insbesondere $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$).

Zur Bestimmung des E-Moduls: $\epsilon_{\varphi} = \epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{(1-\nu)\sigma_{\varphi\varphi}}{E}$ und somit $E = \frac{0,8 \cdot 0,1 \cdot 60}{2 \cdot 1 \cdot 0,00024} = 10000 \text{ kN/cm}^2$.

b. $\epsilon_{tt} = \frac{\Delta t}{t_0} = -\frac{\nu}{E} 2\sigma_{\varphi\varphi}$, mit $\Delta t = -0,01 \text{ mm}$. Somit $\sigma_{\varphi\varphi} = 0,001 \cdot \frac{10000}{2 \cdot 0,2} = 25 \text{ kN/cm}^2$, und $p_i = 0,83 \text{ kN/cm}^2$.

Weiters gilt

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi} \text{ kN/cm}^2 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} -0,001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,002 & 0 \\ 0 & 0 & 0,002 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi}.$$

c. $\sigma_{\text{I}} = \sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\text{II}} = \sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\text{III}} = 0$, letzteres aufgrund des ESZ. TRESCA: $\sigma_{\text{max}} = f_y$ im Falle $\sigma_{\text{min}} = 0$, somit $\sigma_{\varphi\varphi} = f_y$, und $p_i = 1,00 \text{ kN/cm}^2$.

d. Berechne ΔV über ΔU mit $\Delta U = U_0 \cdot \epsilon_{\varphi\varphi}$, wobei $\epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{0,8 \cdot 30}{10000} = 0,0024$, somit $\Delta U = 0,90478 \text{ cm}$, $U_{\text{neu}} = 2r_0\pi + \Delta U = 377,90 \text{ cm}$ und $r_{\text{neu}} = 60,144 \text{ cm}$. $V_{\text{alt}} = 904778,68 \text{ cm}^3$, $V_{\text{neu}} = 911308,74 \text{ cm}^3$, entspricht einer Steigerung um 0,72%.

e. Vereinfacht reicht es anzunehmen, dass (mit $p_i = \sigma_{tt}$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} &\geq \frac{p_i}{\sigma_{\varphi\varphi}} = \frac{A_{\text{Ring}}}{A_{\text{Fläche}}} \\ A_{\text{Fläche}} &\geq 10 A_{\text{Ring}} \\ R_0^2 \pi &\geq 10 \cdot 2 R_0 \pi t_0 \\ \frac{R_0}{t_0} &\geq 20. \end{aligned}$$

Will man noch exakter vorgehen, so muss man davon ausgehen, dass $R_0 \neq R_{\text{innen}} \neq R_{\text{außen}}$, damit präzisiert man die Formeln aus Punkt a. Es gilt $p_i \cdot A_{\text{Fläche}} = \sigma_{\varphi\varphi} \cdot A_{\text{Ring}}$, umgeformt

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} &\geq \frac{p_i}{\sigma_{\varphi\varphi}} = \frac{A_{\text{Ring}}}{A_{\text{Fläche}}} \\ A_{\text{Fläche}} &\geq 10 A_{\text{Ring}} \\ \left(R_0 - \frac{t_0}{2}\right)^2 \pi &\geq 10 \left[\left(R_0 + \frac{t_0}{2}\right)^2 - \left(R_0 - \frac{t_0}{2}\right)^2 \right] \pi \\ &\dots \\ \left(\frac{R_0}{t_0}\right)^2 - 21 \left(\frac{R_0}{t_0}\right) + \frac{1}{4} &\geq 0. \end{aligned}$$

Von zwei Lösungen für R_0/t_0 ist nur die größere ausschlaggebend und somit

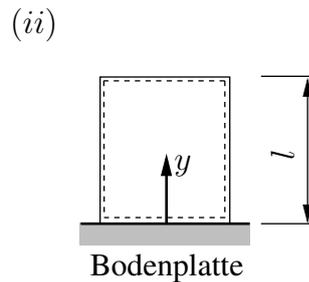
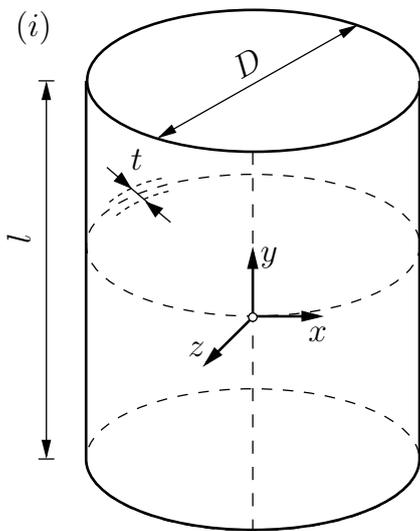
$$\left(\frac{R_0}{t_0}\right) \geq 20,99 \approx 21.$$

Ersatzkolloquium WS2017/2018

1. Beispiel: Stahlzylinder

Angabe:

Gegeben ist ein zylindrischer, dünnwandiger Stahlkörper mit *geschlossener* Grund- bzw. Deckfläche; die Abmessungen des Zylinders (Wanddicke t , Länge l und Durchmesser D) siehe Abbildung (i). Bekannte Materialkennwerte: Schubmodul G , Querdehnungszahl ν , Zug- bzw. Druckfestigkeit f_y . Der Stahlzylinder steht reibungsfrei auf einer fixierten, starren Bodenplatte, siehe Abbildung (ii). Verwenden Sie die linearisierte Elastizitätstheorie und gehen Sie von einem ebenen Spannungszustand (Kesselformeln) aus. Es ist das Festigkeitskriterium nach TRESCA anzuwenden.



Abmessungen
$t = 8 \text{ mm}$
$l = 2000 \text{ mm}$
$D = 100 \text{ mm}$

Materialkennwerte
$G = 84000 \text{ N/mm}^2$
$\nu = 0,25$
$\alpha_T = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
$f_y = 235 \text{ N/mm}^2$

Gesucht:

- Berechnen Sie jenen *Innendruck* p_i der erforderlich ist, sodass sich der Zylinder um $\Delta l = 0,2 \text{ mm}$ verlängert.
- Berechnen Sie den Umfang und die Blechdicke des Stahlzylinders, wenn dieser durch den *Innendruck* p_i aus Punkt a belastet wird.
- Berechnen Sie den erforderlichen *Innendruck* $p_{i,max}$, sodass Materialversagen eintritt.
- An einem anderen als dem hier betrachteten Versuchskörper wurden Versuche durchgeführt und dabei ein Zusammenhang zwischen Elastizitätsmodul und Schubmodul von $E = 4G$ ermittelt. Begründen Sie (auch rechnerisch), ob diese Parameterkombination *isotropes* Materialverhalten zulässig beschreibt.

Lösung:

a.

$$E = 2G(1 + \nu) = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\varepsilon_l = \varepsilon_{yy} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,2}{2000} = 0,0001$$

$$\varepsilon_l = \frac{1}{E} \left(-\frac{\nu r_0 p_i}{t} + \frac{r_0 p_i}{2t} \right) \text{ mit } \nu = 0,25, r_0 = D/2 = 50 \text{ mm und } t = 8 \text{ mm}$$

$$0,0001 \cdot 210000 \cdot 16 = (-2\nu r_0 + r_0) p_i \text{ folgt } p_i = 13,44 \text{ N/mm}^2$$

b.

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left(\frac{r_0 p_i}{t} - \frac{\nu r_0 p_i}{2t} \right) = 0,00035$$

$$u_0 = 2r_0 \pi = 314,15 \text{ mm}$$

$$\Delta u = \varepsilon_u \cdot u_0 = 0,10996 \text{ mm}$$

$$u = u_0 + \Delta u = 314,2692 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \left(\frac{r_0 p_i}{t} + \frac{r_0 p_i}{2t} \right) = -0,00015$$

$$t_0 = 8 \text{ mm}$$

$$\Delta t = \varepsilon_t \cdot t_0 = -0,0012 \text{ mm}$$

$$t = t_0 + \Delta t = 7,9988 \text{ mm}$$

c.

Kriterium nach TRESCA: $\sigma_{max} - \sigma_{min} = f_y$, wobei

$$\sigma_{max} = \frac{r_0 p_i}{t} \text{ und } \sigma_{min} = 0 \text{ (wegen ESZ)}$$

$$\text{somit } p_i = \frac{f_y t}{r_0} = 37,6 \text{ N/mm}^2$$

d.

$$E = 4G \Leftrightarrow E = 2G(1 + \nu) = 4G \Leftrightarrow \nu = 1 > 0,5,$$

und somit nicht vereinbar mit den isotropen Stabilitätskriterien

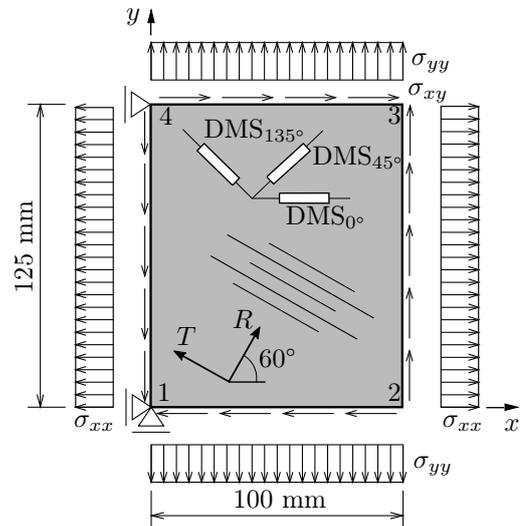
1. Kolloquium WS2017/2018

3. Beispiel: DMS und Punktverschiebungen

Angabe:

Gegeben ist die abgebildete Scheibe aus Fichtenholz. In der unverformten Lage wurden drei Dehnmessstreifen (DMS) auf der Scheibe appliziert. Die damit in der verformten Lage gemessenen Dehnungen betragen $\epsilon_{0^\circ} = 0,25\text{‰}$, $\epsilon_{45^\circ} = 0,30\text{‰}$ und $\epsilon_{135^\circ} = -0,40\text{‰}$. Weiters sind die Komponenten des Nachgiebigkeitstensors \mathbf{D} in der $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L$ -Basis gegeben. *HINWEIS: Es ist ein ebener Spannungszustand anzunehmen.*

$$\mathbf{D}_{ortho} = \begin{bmatrix} 0,45 & -0,30 & -0,05 & 0 & 0 & 0 \\ -0,30 & 0,40 & -0,01 & 0 & 0 & 0 \\ -0,05 & -0,01 & 0,11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,91 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{GPa}} \Big|_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L}$$



Gesucht:

1. Bestimmen Sie alle Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\epsilon}$ und des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ in der $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L$ -Basis.
2. Bestimmen Sie alle Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\epsilon}$ in der $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ -Basis.
3. Bestimmen Sie die Koordinaten von Eckpunkt 3 in der verformten Lage.

Lösung:

1. Berechnung des Spannungs- und Verzerrungszustandes aus den DMS Werten

$$\begin{aligned}\epsilon_{0^\circ} &= \epsilon'_{RR}(-60^\circ) = \epsilon_{RR} \cos^2(-60^\circ) + \epsilon_{TT} \sin^2(-60^\circ) + 2\epsilon_{RT} \cos(-60^\circ) \sin(-60^\circ) = 0,00025 \\ \epsilon_{45^\circ} &= \epsilon'_{RR}(-15^\circ) = \epsilon_{RR} \cos^2(-15^\circ) + \epsilon_{TT} \sin^2(-15^\circ) + 2\epsilon_{RT} \cos(-15^\circ) \sin(-15^\circ) = 0,00030 \\ \epsilon_{135^\circ} &= \epsilon'_{RR}(75^\circ) = \epsilon_{RR} \cos^2(75^\circ) + \epsilon_{TT} \sin^2(75^\circ) + 2\epsilon_{RT} \cos(75^\circ) \sin(75^\circ) = -0,00040 \\ \Rightarrow \epsilon_{RR} &= 0,000103, \epsilon_{TT} = -0,000203, \epsilon_{RT} = -0,000435\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0,000103 \\ -0,000203 \\ \epsilon_{LL} \\ 0 \\ 0 \\ -0,000615 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} = \begin{bmatrix} 0,45 & -0,30 & -0,05 & 0 & 0 & 0 \\ -0,30 & 0,40 & -0,01 & 0 & 0 & 0 \\ -0,05 & -0,01 & 0,11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,91 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{RR} \\ \sigma_{TT} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}\sigma_{RT} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L}$$

$$\text{I: } 0,000103 = 0,45\sigma_{RR} - 0,30\sigma_{TT}$$

$$\text{II: } -0,000203 = -0,30\sigma_{RR} + 0,40\sigma_{TT} \Rightarrow \sigma_{RR} = -0,000219, \sigma_{TT} = -0,000672$$

$$\text{III: } \epsilon_{LL} = -0,05\sigma_{RR} - 0,01\sigma_{TT} = 0,000018$$

$$\text{IV: } -0,000615 = \sqrt{2}\sigma_{RT} \Rightarrow \sigma_{RT} = -0,000435$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0,000103 & -0,000435 & 0 \\ -0,000435 & -0,000203 & 0 \\ 0 & 0 & 0,000018 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} \quad \sigma = \begin{bmatrix} -0,000219 & -0,000435 & 0 \\ -0,000435 & -0,000672 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} \text{ GPa}$$

2. Transformation von der $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L$ -Basis in die $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ -Basis

$$\mathbf{Q}_{RTL \rightarrow XYZ} = \begin{bmatrix} \cos(-60^\circ) & \cos(-150^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(30^\circ) & \cos(-60^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ) & \cos(0^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z} = \mathbf{Q} \cdot \epsilon_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} \cdot \mathbf{Q}^T$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0,00025 & 0,00035 & 0 \\ 0,00035 & -0,00035 & 0 \\ 0 & 0 & 0,000018 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z}$$

3. Punktverschiebung

$$u_{\overline{23}} = \epsilon_{xx} L_x = 0,00025 \cdot 100 = 0,025 \text{ mm}$$

$$v_{\overline{34}} = \epsilon_{yy} L_y = -0,00035 \cdot 125 = -0,044 \text{ mm}$$

$$v_3 = v_2 = 2\epsilon_{xy} L_x = 2 \cdot (0,00035) \cdot 100 = 0,070 \text{ mm}$$

$$\mathbf{x}_{P3} = \begin{pmatrix} 100 + u_{\overline{23}} \\ 125 + v_{\overline{34}} + v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100,025 \\ 125,026 \end{pmatrix}$$

2. Kolloquium WS2016/2017

1. Beispiel: Elastizitätstheorie orthotroper Werkstoffe

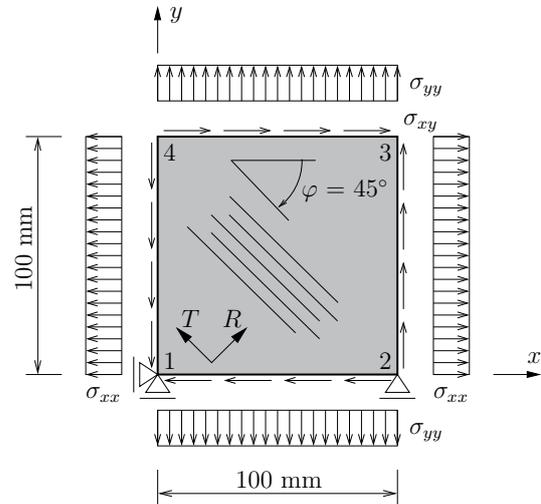
Angabe:

Gegeben ist die abgebildete Scheibe aus Fichtenholz. Von dieser seien folgende Materialparameter bekannt:

$$\begin{aligned} E_T &= 2500 \text{ N/mm}^2 & G_{TL} &= 550 \text{ N/mm}^2 \\ E_L &= 9000 \text{ N/mm}^2 & G_{LR} &= 525 \text{ N/mm}^2 \\ \nu_{TL} &= 0,0303 & G_{RT} &= 500 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Gesucht:

- In einem Druckversuch wird eine uniaxiale Belastung in \mathbf{e}_R -Richtung aufgebracht, welche eine Spannung von $\sigma_{RR} = -1 \text{ N/mm}^2$ bewirkt (alle anderen Spannungen seien hier $\equiv 0$). Die



gemessenen Verzerrungen betragen $\varepsilon_{RR} = -4,5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{TT} = 3,0 \cdot 10^{-4}$ und $\varepsilon_{LL} = 0,5 \cdot 10^{-4}$. Bestimmen Sie die numerischen Werte aller Komponenten des Nachgiebigkeitstensors \mathbf{D} ,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_R} & -\frac{\nu_{TR}}{E_T} & -\frac{\nu_{LR}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{RT}}{E_R} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{RL}}{E_R} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & \frac{1}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{TL}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{LR}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{RT}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L}$$

Für die weiteren Punkte (2 bis 4) ist anzunehmen, dass die Scheibe einem ebenen (und homogenen) Spannungszustand ausgesetzt ist, quantifiziert durch den folgenden Spannungstensor:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 6,0 & -3,0 & 0 \\ -3,0 & 6,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2_{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z}$$

- Bestimmen Sie alle Komponenten des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ in der $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L$ -Basis.
- Bestimmen Sie alle Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ in der $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L$ -Basis.
- Bestimmen Sie alle Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ in der $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ -Basis.

Lösung:

$$E_R = \frac{\sigma_{RR}}{\varepsilon_{RR}} = 2222 \text{ N/mm}^2$$

$$1. \quad \nu_{RT} = -\frac{\varepsilon_{TT}}{\varepsilon_{RR}} = 0,6667$$

$$\nu_{RL} = -\frac{\varepsilon_{LL}}{\varepsilon_{RR}} = 0,1111$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0,4500 & -0,3000 & -0,0500 & 0 & 0 & 0 \\ -0,3000 & 0,4000 & -0,0121 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0500 & -0,0121 & 0,1111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9091 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9524 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$2. \quad \varphi = 45^\circ \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 3,0 & 0 & 0 \\ 0 & 9,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

$$3. \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -1,3500 & 0 & 0 \\ 0 & 2,7000 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2591 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

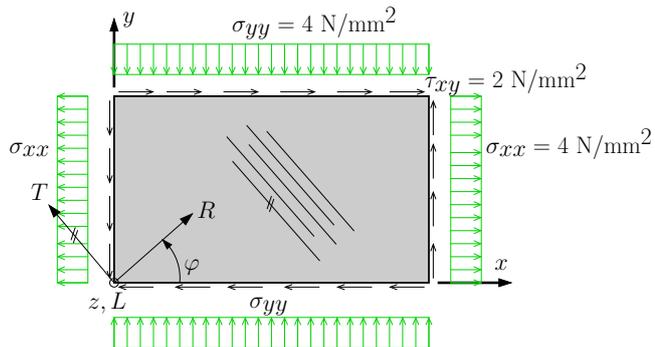
$$4. \quad \varphi = -45^\circ \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0,6750 & -2,0250 & 0 \\ -2,0250 & 0,6750 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2591 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

2. Kolloquium WS2015/2016

2. Beispiel: Elastizitätstheorie orthotroper Werkstoffe

Angabe:

Gegeben ist die abgebildete Scheibe aus Fichtenholz und ihre Beanspruchung. Das $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L$ -Basissystem entsteht durch eine Rotation des $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ -Basissystems um $\varphi = 40^\circ$ um die \mathbf{e}_z -Achse, siehe Abbildung. Die richtungsabhängigen Elastizitätsmoduln, Schubmoduln und Querdehnungszahlen von Holz lauten:



$$\begin{aligned}
 E_T &= 500 \text{ N/mm}^2 \\
 E_L &= 13700 \text{ N/mm}^2 \\
 G_{TL} &= 700 \text{ N/mm}^2 \\
 G_{LR} &= 600 \text{ N/mm}^2 \\
 G_{RT} &= 60 \text{ N/mm}^2 \\
 \nu_{TL} &= 0,02 \\
 \nu_{TR} &= 0,3
 \end{aligned}$$

Gesucht:

1. In einem Druckversuch wird eine uniaxiale Belastung in Richtung \mathbf{e}_R aufgebracht, welche eine Spannung von -1 MPa bewirkt. Die gemessenen Verzerrungen betragen $\varepsilon_{RR} = -1,25 \cdot 10^{-3}$ und $\varepsilon_{LL} = 2,5 \cdot 10^{-5}$. Berechnen Sie den Elastizitätsmodul E_R und die Querdehnungszahl ν_{RL} .
2. Bestimmen Sie die fehlenden Querdehnungszahlen ν_{LT} , ν_{LR} und ν_{RT} . Ermitteln Sie die Komponenten des Nachgiebigkeitstensors \mathbb{D} in der $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L$ -Basis.
3. Ermitteln Sie die Transformationsmatrix \mathbf{Q} , die zur Transformation von Tensoren 2. Stufe aus der $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ -Basis in die $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L$ -Basis dient.
4. Berechnen Sie die Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors in der $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ -Basis.

Lösung:

1. $E_R = \frac{\sigma_{RR}}{\varepsilon_{RR}} = 800 \text{MPa}$, $\nu_{RL} = -E_R \frac{\varepsilon_{LL}}{\sigma_{RR}} = 0,02$

2. Der Nachgiebigkeitstensor ist symmetrisch, d.h. es gilt: $-\frac{\nu_{LT}}{E_L} = -\frac{\nu_{TL}}{E_T} \rightarrow \nu_{LT} = E_L \frac{\nu_{TL}}{E_T} = 0,548$.

Analog, $\nu_{LR} = 0,3425$, $\nu_{RT} = 0,48$.

Der Nachgiebigkeitstensor:

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} 0,00125 & -0,0006 & -2,5 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0006 & 0,0020 & -4 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2,5 \cdot 10^{-5} & -4 \cdot 10^{-5} & 7,3 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0007 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0083 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L}$$

3. Transformationsmatrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos(40^\circ) & \cos(90^\circ - 40^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(90^\circ + 40^\circ) & \cos(40^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ) & \cos(0^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7660 & 0,6428 & 0 \\ -0,6428 & 0,7660 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Die Komponenten des Spannungstensors in der $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L$ -Basis:

$$(\sigma)_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} = \mathbf{Q} \cdot (\sigma)_{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z} \cdot \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 2,664 & -2,664 & 0 & 0 & 0 & -5,0798 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L}^T$$

$$(\varepsilon)_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} = (\mathbb{D})_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} : (\sigma)_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} = \begin{bmatrix} 0,0049 & -0,0069 & 4 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & -0,0423 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L}^T$$

Die Komponenten des Verzerrungstensors in der $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ -Basis:

$$(\varepsilon)_{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z} = \mathbf{Q}^T \cdot (\varepsilon)_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} \cdot \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0,0295 & -0,0315 & 4 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 9,0514 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z}^T$$

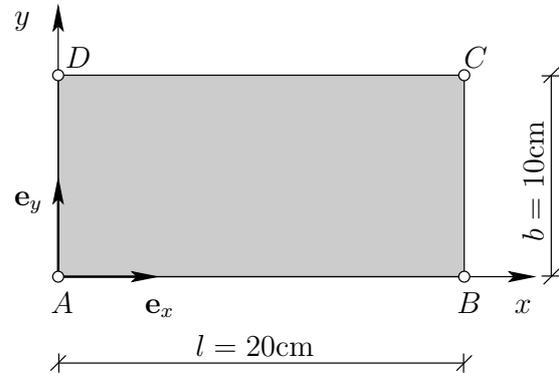
Ersatzkolloquium WS2014/2015

1. Beispiel: Lineare Elastizitätstheorie und Festigkeit

Angabe:

Gegeben ist ein Körper aus homogenem, isotropem Material mit Elastizitätsmodul $E = 20$ GPa und Querdehnungszahl $\nu = 0,25$, siehe nebenstehende Abbildung für einen Schnitt durch den Körper in der x - y -Ebene. Im Körper wirkt ein inhomogener ebener Verzerrungszustand. Die Komponenten dieses Verzerrungsfeldes, die ungleich Null sind, lauten:

$$\varepsilon_{xx} = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{1}{500}, \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{1}{1000}, \quad \varepsilon_{xy} = 0$$



Gesucht:

1. Berechnen Sie die Komponenten des Spannungsfeldes auf Grundlage der linearisierten Elastizitätstheorie bei Zugrundelegen des gegebenen Verzerrungszustandes.
2. Spezialisieren Sie das Spannungsfeld für die Punkte A und B und weisen Sie nach, dass in diesen beiden Punkten kein Materialversagen eintritt. Verwenden Sie dafür das Festigkeitskriterium nach MOHR-COULOMB mit den Parametern $\varphi = 20^\circ$ und $c = 35$ MPa.
3. Bestimmen Sie den Faktor λ , mit dem der maßgebende Beanspruchungszustand σ_{rel} (entweder jener in Punkt A oder jener in Punkt B) proportional gesteigert werden muss, damit gerade Versagen eintritt. Stellen Sie den entsprechenden Spannungszustand $\lambda\sigma_{rel}$ sowie den Versagensmeridian in der $\sigma - \tau$ -Ebene maßstäblich dar und ermitteln Sie grafisch die Normal- und Schubspannungskomponente des Traktionsvektors, der zu Versagen führt.
4. Wie lautet der Volumenkraftvektor, der dazu führt, dass das Spannungsfeld im gesamten Körper im Gleichgewicht steht?

Lösung:

Aus der Auswertung des Hooke'schen Gesetzes (nur Normalspannungen treten auf)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

folgt das Spannungsfeld als Funktion der Ortskoordinate x , $\boldsymbol{\sigma}(x)$:

$$\sigma_{xx} = 48 \left(1 - \frac{x}{L}\right) - 8; \quad \sigma_{yy} = 16 \left(1 - \frac{x}{L}\right) - 24; \quad \sigma_{zz} = 16 \left(1 - \frac{x}{L}\right) - 8; \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad \text{Einheit: MPa.}$$

Spezialisieren im Punkt A ($x = 0$ mm):

$$\sigma_I = 40 \text{ MPa}; \quad \sigma_{II} = 8 \text{ MPa}; \quad \sigma_{III} = -8 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow f(\sigma_A)_{MC} = -0.1039 \quad (\text{kein Versagen})$$

Spezialisieren in Punkt B ($x = 200$ mm):

$$\sigma_I = \sigma_{II} = -8 \text{ MPa}; \quad \sigma_{III} = -24 \text{ MPa}$$

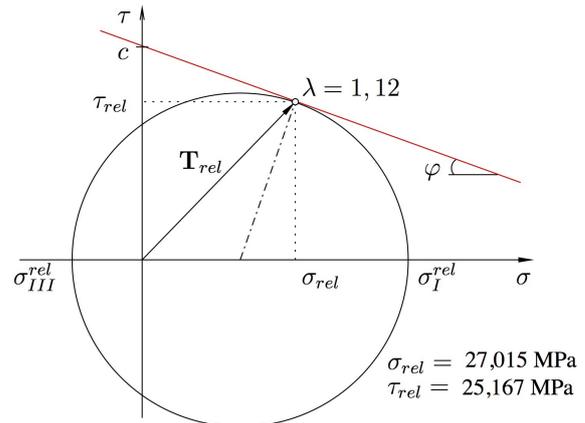
$$\rightarrow f(\sigma_B)_{MC} = -0.9231 \quad (\text{kein Versagen})$$

Maßgebend ist der Spannungszustand in Punkt A, da dieser den kleineren Laststeigungsfaktor aufweist

$$(\lambda = 1,12, \quad \boldsymbol{\sigma}^{rel} = \lambda \boldsymbol{\sigma}_A).$$

Der Volumekraftvektor folgt aus der Gleichgewichtsbedingung zu: $\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \rightarrow \mathbf{f} =$

$$\left(\frac{48 \text{ MPa}}{L} \quad 0 \quad 0 \right)^T$$



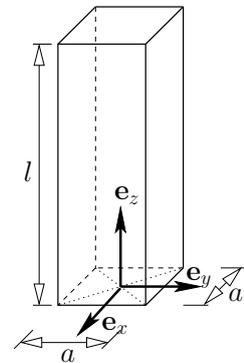
2. Kolloquium WS2014/2015

1. Beispiel: Linearisierte Elastizitätstheorie

Angabe:

Gegeben ist ein stabförmiger Probekörper ($l = 1 \text{ m}$) mit quadratischem Querschnitt (Seitenlänge $a = 10 \text{ cm}$) und homogenem Volumenkraftvektor $\mathbf{f} = -\rho g \mathbf{e}_z$, dessen Wichte $\rho g = 0,8 \text{ MPa/m}$ beträgt. Bekannt ist außerdem das (inhomogene) Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(x, y, z)$, welches den Deformationszustand im Probekörper beschreibt:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\nu \rho g}{E} xz \\ \frac{-\nu \rho g}{E} yz \\ \frac{\rho g}{2E} z^2 + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E} \end{pmatrix} \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$$



Der Probekörper ist homogen und besteht aus isotropem Material. Der Elastizitätsmodul ist folgendermaßen definiert: $E = 100 + 100 M \text{ MPa}$ (M ist die letzte Stelle Ihrer Matrikelnummer). Die Querdehnungszahl beträgt $\nu = 0,3$.

Gesucht:

1. Ermitteln Sie ausgehend vom gegebenen Verschiebungszustand den Verzerrungs- sowie den Spannungszustand in jedem Punkt des Stabes auf Basis der linearisierten Elastizitätstheorie.
2. Geben Sie die Größe der Traktionskräfte über die gesamte Oberfläche des Stabes an.
3. Kontrollieren Sie, ob die lokale Gleichgewichtsbedingung in jedem Punkt des Stabes erfüllt ist.
4. Skizzieren Sie (rein qualitativ) die verformte Lage des Probekörpers im Schnitt $x=0$.

Lösung:

Verzerrungsfeld ε folgt aus dem Verschiebungsfeld \mathbf{u} durch Ableiten nach den Ortskoordinaten:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \text{symm.} & & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho g \nu}{E} z & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho g \nu}{E} z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho g}{E} z \end{pmatrix}$$

Spannungsfeld σ folgt aus dem Hookesche Gesetz (es folgt ein inhomogener einaxialer Zugspannungszustand):

$$\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g z \end{pmatrix}$$

Traktionskräfte: folgen aus der Cauchyschen Formel: $\mathbf{T} = \sigma \cdot \mathbf{n}$:

Für Oberfläche $x = \pm \frac{a}{2}$ gilt $\mathbf{T} = \sigma(x = \pm \frac{a}{2}) \cdot (\pm \mathbf{e}_x) = 0$.

Für Oberfläche $y = \pm \frac{a}{2}$ gilt $\mathbf{T} = \sigma(y = \pm \frac{a}{2}) \cdot (\pm \mathbf{e}_y) = 0$.

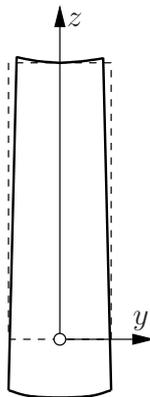
Für Oberfläche $z = 0$ gilt: $\mathbf{T} = \sigma(z=0) \cdot (-\mathbf{e}_z) = 0$ und für $z = l$: $\mathbf{T} = \sigma(z=l) \cdot (\mathbf{e}_z) = \rho g l$.

Mit Ausnahme der Staboberseite sind also alle Oberflächen freie Oberflächen. An der Oberseite ist Stab gleichmäßig durch Spannungen zufolge seines Eigengewichts belastet. Es handelt sich also um einen hängenden Stab.

Spannungsfeld erfüllt die **Gleichgewichtsbedingung** $\text{div} \sigma = -\mathbf{f}$, da $\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = \rho g$ ist und damit die Gleichung der dritten Zeile erfüllt ist (die ersten beiden Gleichungen sind trivial erfüllt).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \quad \checkmark \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \quad \checkmark \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= -(-\rho g) \quad \checkmark \end{aligned}$$

verformte Lage



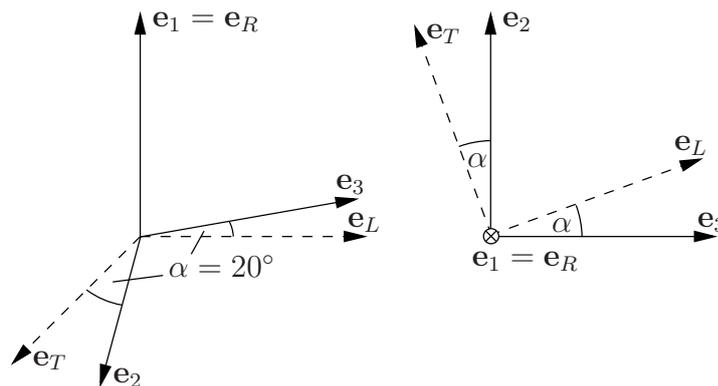
Ersatzkolloquium WS2013/2014

1. Beispiel: Orthotrope Elastizität

Angabe:

Gegeben sind die Komponenten des Steifigkeitstensors \mathbf{C} eines orthotropen Probekörpers in der $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L$ -Basis, welche mit den Materialhaupttrichtungen des Probekörpers zusammenfällt. Weiters gegeben sind die Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ in der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Basis, die durch Rotation der $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L$ -Basis um den Basisvektor \mathbf{e}_R entsteht, siehe nachstehende Abbildung. Der Rotationswinkel beträgt dabei $\alpha = 20^\circ$.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4,23 & 2,88 & 2,36 & 0 & 0 & 0 \\ 2,88 & 4,34 & 1,80 & 0 & 0 & 0 \\ 2,36 & 1,80 & 9,66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,95 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0,0059 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1123 & 0,1105 \\ 0 & 0,1105 & -0,0432 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$



Gesucht:

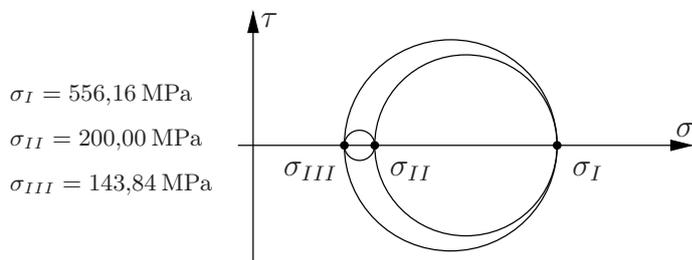
1. Ermitteln Sie die dem gegebenen Verzerrungstensor entsprechenden MOHRschen Spannungskreise und stellen Sie diese maßstäblich dar.
2. Geben Sie die betragsmäßig größte Normalspannung sowie die maximale Schubspannung an, welche aufgrund des gegebenen Verzerrungstensors auftreten.

Lösung:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9397 & -0,3420 \\ 0 & 0,3420 & 0,9397 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q} \cdot \begin{bmatrix} 0,0059 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1123 & 0,1105 \\ 0 & 0,1105 & -0,0432 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \cdot \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 0,0059 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0231 & 0,1347 \\ 0 & 0,1347 & 0,0460 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 4,23 & 2,88 & 2,36 & 0 & 0 & 0 \\ 2,88 & 4,34 & 1,80 & 0 & 0 & 0 \\ 2,36 & 1,80 & 9,66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,95 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} \cdot \begin{bmatrix} 0,0059 \\ 0,0231 \\ 0,0460 \\ 0,1905 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} = \begin{bmatrix} 0,2000 \\ 0,2000 \\ 0,5000 \\ 0,2000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} \text{ GPa}$$



$$\begin{aligned} \sigma_I &= 556,16 \text{ MPa} \\ \sigma_{II} &= 200,00 \text{ MPa} \\ \sigma_{III} &= 143,84 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_I = 556 \text{ MPa} \\ \tau_{\max} &= \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = 206,16 \text{ MPa} \end{aligned}$$

2. Kolloquium WS2013/2014

1. Beispiel: Orthotrope Elastizität – einaxialer Druckversuch

Angabe:

Gegeben ist ein Würfel aus orthotropem Material mit Seitenlänge $a = 10$ cm in der unverformten Lage. Der Würfel wird in \mathbf{e}_2 -Richtung durch eine Druckkraft $F = 50$ N, die sich gleichmäßig auf die entsprechende Fläche verteilt, belastet. Die Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_R$ und \mathbf{e}_L liegen in einer Ebene. Außerdem schließen sowohl die Vektoren \mathbf{e}_R und \mathbf{e}_1 als auch \mathbf{e}_3 und \mathbf{e}_L einen Winkel $\alpha = 20^\circ$ ein, siehe Abbildung. Die Seitenfläche, die gegenüber der durch die Kraft F belasteten Seitenfläche liegt, ist in Richtung ihrer Flächennormalen unverschieblich gelagert. Alle anderen Seitenflächen können sich frei verschieben. Alle Kontaktflächen sind als reibungsfrei zu betrachten. Die Komponenten des Nachgiebigkeitstensors \mathbf{D} sind in jener Basis, die durch die Materialhaupttrichtungen definiert ist ($\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L$), gegeben.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0,46 & -0,28 & -0,06 & 0 & 0 & 0 \\ -0,28 & 0,42 & -0,01 & 0 & 0 & 0 \\ -0,06 & -0,01 & 0,12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,89 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,05 \end{bmatrix} \text{GPa}^{-1}$$

Gesucht:

1. Die Komponenten des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ in der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Basis.
2. Die Transformationsmatrix \mathbf{Q} , die zur Transformation von Tensorkomponenten aus dem $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L$ -Basissystem in das $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Basissystem dient.
3. Die Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ in der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ -Basis.
4. Der Elastizitätsmodul E_L und die Querdehnungszahl ν_{RT} , welche die elastischen Eigenschaften des untersuchten Materials in den entsprechenden Materialhaupttrichtungen beschreiben.

Lösung:

$$1) \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{A} = -0,5 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \text{ GPa}$$

$$2) \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9397 & 0 & 0,3420 \\ 0 & 1,0000 & 0 \\ -0,3420 & 0 & 0,9397 \end{bmatrix}$$

3)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \cdot 10^{-5} \text{ GPa} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} \cdot 10^{-5} \text{ GPa}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0,14 & 0 & 0 \\ 0 & -0,21 & 0 \\ 0 & 0 & 0,005 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L} \cdot 10^{-5} = \begin{bmatrix} 0,1242 & 0 & -0,0434 \\ 0 & -0,21 & 0 \\ -0,0434 & 0 & 0,0208 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \cdot 10^{-5}$$

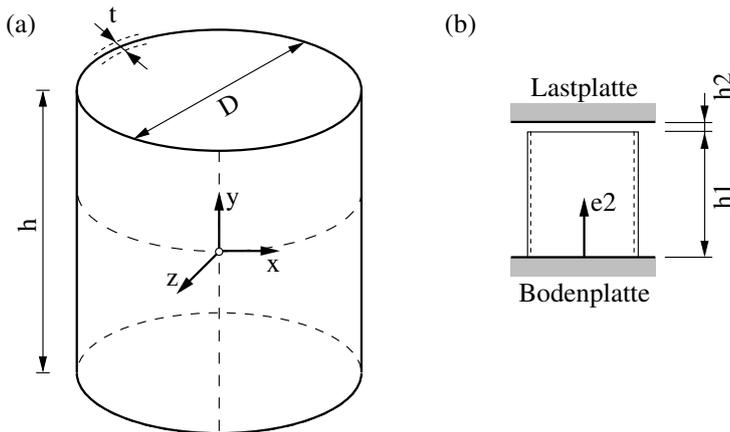
$$4) E_L = 8,3333 \text{ GPa}, \nu_{RT} = 0,6087$$

2. Kolloquium WS2011/2012

1. Beispiel: Hookesches Gesetz

Angabe:

Gegeben ist ein zylindrischer, dünnwandiger Glaskörper mit offener Grund- bzw. Deckfläche; für die Abmessungen des Zylinders siehe Abbildung (a). Der Glaszylinder steht reibungsfrei auf einer fixierten, starren Bodenplatte. Die Oberkante des Zylinders ist in der Ausgangslage 0,25 mm von einer starren, zunächst unverschieblichen Lastplatte entfernt, siehe Abbildung (b).



Glaseigenschaften:

Schubmodul: 28,5 GPa
 Querdehnungszahl: 0,23
 linearer Wärmeausdehnungskoeffizient: $5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
 einaxiale Druckfestigkeit: 900 N/mm²
 einaxiale Zugfestigkeit: 30 N/mm²

Gesucht:

- In der unverformten, spannungsfreien Ausgangslage weist der Zylinder eine Temperatur $T_0 = 25^\circ\text{C}$ auf. Auf welche Temperatur T_a muss der Zylinder erwärmt werden, damit er die Lastplatte gerade berührt? Wieviel Prozent der maßgeblichen Festigkeit sind erreicht, wenn der Glaszylinder auf $T_b = 250^\circ\text{C}$ erwärmt wird?

Hinweise: $t \ll D$, lineare Elastizitätstheorie, reibungsfreier Kontakt zw. Glas-Lastplatte.

- Die Temperatur des Glaszylinders wird auf $T = T_a$ gesteigert und anschließend konstant gehalten. Über die nun verschiebliche Lastplatte wird zusätzlich eine Einzelkraft P , $\mathbf{P} = -|P|\mathbf{e}_2$, in den Zylinder eingeleitet. Wie groß muss P sein, damit gerade Materialversagen eintritt.
- Für einen anderen Versuchskörper mit unbekannter Geometrie und Belastung ist der Elastizitätsmodul $E = 65 \text{ GPa}$ und der Schubmodul $G = 20 \text{ GPa}$ gegeben. Begründen Sie rechnerisch, warum diese Parameter linear-elastisches, isotropes Materialverhalten nicht zulässig beschreiben.

Lösung:

Lin. Verzerrungstensor: $\varepsilon_{22} = \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{0,25}{500} = 5 \cdot 10^{-4}$

Hooke: $\Delta T = \frac{\varepsilon_{22}}{\alpha_T} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-6}} = 100 \text{ K} = 100^\circ\text{C} \rightarrow T_a = T_0 + \Delta T = 125^\circ\text{C}$.

Ebener Sp.zustand: $\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} + \alpha_T\Delta T$; reibungsfreier Kontakt, unbehinderte Verformung in x_1 -Richtung: $0 = \frac{1}{70110}\sigma_{22} + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 125$ (oder $5 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{70110}\sigma_{22} + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 225$) $\rightarrow \sigma_{22} = -43,82 \text{ N/mm}^2$; $\frac{-43,82}{-900} = 4,87\%$

$\sigma_{22}^{\text{Bruch}} = P^{\text{Bruch}}/A \rightarrow P^{\text{Bruch}} = \sigma_{22}^{\text{Bruch}} \cdot A = -900 \cdot 250 \cdot \pi \cdot 5 = -3,53 \text{ MN}$ (Druckkraft)

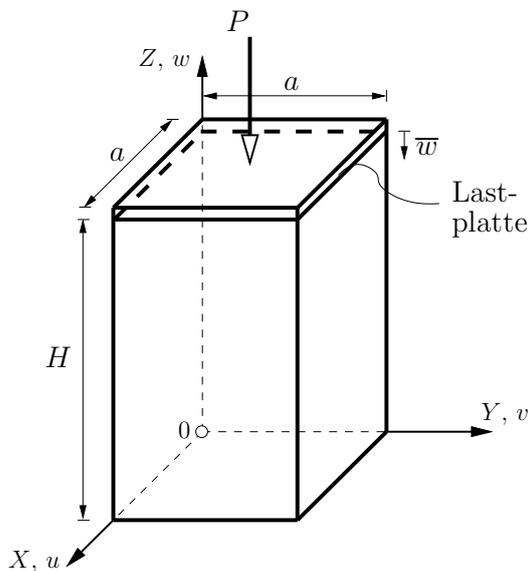
$E = 65 \text{ GPa}$, $G = 20 \text{ GPa} \rightarrow$ Stabilitätskriterien nicht erfüllt ($\lambda < 0$, $K < 0$, $\nu > 0,5$)

1. Kolloquium WS2010/2011

1. Beispiel: Einaxialer Druckversuch

Angabe:

Gegeben ist ein prismatischer Probekörper aus homogenem, isotropem Material mit Elastizitätsmodul E und Querdehnungszahl ν . Die Kantenlängen in der unverformten Lage betragen a und H (siehe Abbildung). Die Probe wird einem Druckversuch unterzogen: Die drei in der Abbildung nicht sichtbaren Oberflächen sind gegen Verschieben in Richtung ihrer Flächennormalen gehalten. An der belasteten Oberfläche ($Z = H$) wird eine starre Lastplatte in die Probe eingedrückt, sodass sich der Stauchungsweg \bar{w} ergibt. Die übrigen beiden Oberflächen sind freie Oberflächen.



Annahmen: lineare Elastizitätstheorie, Vernachlässigung des Eigengewichts, Spannungsfreiheit in der unverformten Lage, quasi-statischer Versuch. Alle Kontaktflächen zwischen Versuchskörper und Versuchsanlage (inklusive der Lastplatte) sind reibungsfrei (nicht sichtbare Oberflächen und Oberfläche $z = H$).

Gesucht:

1. Schreiben Sie die mathematische Formulierung der in Worten beschriebenen Verschiebungs- und Spannungsrandbedingungen für die gesamte Oberfläche des Probekörpers vollständig an.
2. Beweisen Sie, dass der Verschiebungsansatz $u(X, Y, Z) = \nu \frac{\bar{w}}{H} X$ und $v(X, Y, Z) = \nu \frac{\bar{w}}{H} Y$ sowie $w(X, Y, Z) = -\frac{\bar{w}}{H} Z$ die Verschiebungsrandbedingungen erfüllt.
3. Berechnen Sie die Komponenten des Verzerrungs- und des Spannungstensors mit Hilfe des im Punkt 2 gegebenen Verschiebungsansatzes.
4. Beweisen Sie, dass die Spannungen sowohl die Gleichgewichtsbedingungen in jedem Punkt des Probekörpers erfüllen als auch die Spannungsrandbedingungen einhalten.

Lösung:

Randbedingungen:

	X-Ri.	Y-Ri.	Z-Ri.
$X = 0$	$u = 0$	$\tau_{xy} = 0$	$\tau_{xz} = 0$
$Y = 0$	$\tau_{yx} = 0$	$v = 0$	$\tau_{yz} = 0$
$Z = 0$	$\tau_{zx} = 0$	$\tau_{zy} = 0$	$w = 0$
$X = a$	$\sigma_{xx} = 0$	$\tau_{xy} = 0$	$\tau_{xz} = 0$
$Y = a$	$\tau_{yx} = 0$	$\sigma_{yy} = 0$	$\tau_{yz} = 0$
$Z = H$	$\tau_{zx} = 0$	$\tau_{zy} = 0$	$w = -\bar{w}$

Kontrolle Verschiebungsansatz:

$$u(X = 0) = \nu \cdot \frac{\bar{w}}{H} \cdot 0 = 0 \checkmark$$

$$v(Y = 0) = \nu \cdot \frac{\bar{w}}{H} \cdot 0 = 0 \checkmark$$

$$w(Z = 0) = -\frac{\bar{w}}{H} \cdot 0 = 0 \checkmark$$

$$w(Z = H) = -\frac{\bar{w}}{H} \cdot H = -\bar{w} \checkmark$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \nu \frac{\bar{w}}{H} & 0 & 0 \\ 0 & \nu \frac{\bar{w}}{H} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{w}}{H} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hooke'sches Gesetz} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E \frac{\bar{w}}{H} \end{pmatrix}$$

Kontrolle Gleichgewicht und Spannungsrandbedingungen:

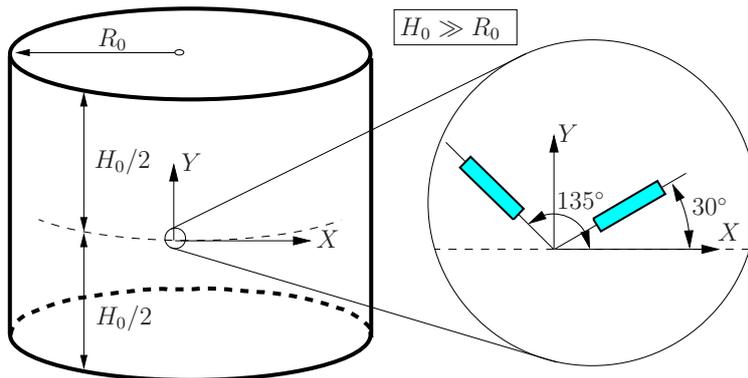
$$\sigma_{j i, j} = 0 \checkmark \quad \sigma_{xx}(X = a) = \sigma_{yy}(Y = a) = 0 \checkmark \quad \tau_{ij} = 0 \checkmark$$

1. Kolloquium WS2010/2011

2. Beispiel: Zylindrischer Stahltank mit Dehnungsmessstr.

Angabe:

Gegeben ist ein geschlossener zylindrischer Tank (Radius R_0 , Wanddicke t_0 , Höhe $H_0 \gg R_0$) aus isotropem Stahl (Querdehnungszahl ν und linearer Wärmeausdehnungskoeffizient α_T). In der spannungsfreien Referenzlage (kein Innendruck, Referenztemperatur T_{ref}) wurden zwei Dehnungsmessstreifen (DMS) an der äußeren Oberfläche des Tanks angebracht (siehe Abbildung). Nach Aufbringen von Innendruck p und einer gleichmäßigen Temperaturänderung ΔT des Stahls wurden mit den DMS die in der Tabelle angegebenen Dehnungen gemessen.



$R_0 = 150,0 \text{ cm}$
$t_0 = 1,0 \text{ cm}$
$p = 3,0 \text{ bar}$
$\nu = 0,35$
$\alpha_T = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
$\varepsilon_{30^\circ} = 6,8405 \cdot 10^{-4}$
$\varepsilon_{135^\circ} = 6,4701 \cdot 10^{-4}$

Hinweis: 1 bar = 0,01 kN/cm².

Annahmen: Es sind die Kesselformel und ein ebener Spannungszustand zugrundezulegen.

Gesucht:

- Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul E des Stahls und die Temperaturdifferenz ΔT auf Basis der linearen Elastizitätstheorie.
- Bestimmen Sie die Komponente $E_{X'X'}$ des Green'schen Verzerrungstensors, wobei die Koordinatenachse X' mit der X -Achse einen Winkel von 60° und mit der Y -Achse einen Winkel von 30° einschließt.
- Welche Dehnungen würde man messen, wenn $p = 3 \text{ bar}$ und $\Delta T = 80 \text{ K}$ betragen?

Lösung:

Die Spannungen ergeben sich aus der Kesselformel: $\sigma_x = 4,5 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_y = 2,25 \text{ kN/cm}^2$. Anwendung der Transformationsbeziehung für Verzerrungstensoranteile in der x - y -Ebene (für 30° und 135°) ergibt: $\varepsilon_x = 7,2109 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_y = 5,7293 \cdot 10^{-4}$. Das Hooke'sche Gesetz für einen ebenen

Spannungszustand liefert zwei Gl. zur Bestimmung von E und ΔT :
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_T \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow E = 20\,501,48 \text{ kN/cm}^2$, $\Delta T = 45 \text{ K}$. Komponente des Green'schen Verzerrungstensors: $\varepsilon_{60^\circ} = 6,0997 \cdot 10^{-4}$,

Interpretationsformel: $E_{X'X'} = \frac{1}{2}[(\varepsilon_{60^\circ} + 1)^2 - 1] = 6,1016 \cdot 10^{-4}$. Dehnungen in den DMS mit $\Delta T = 80 \text{ K}$:

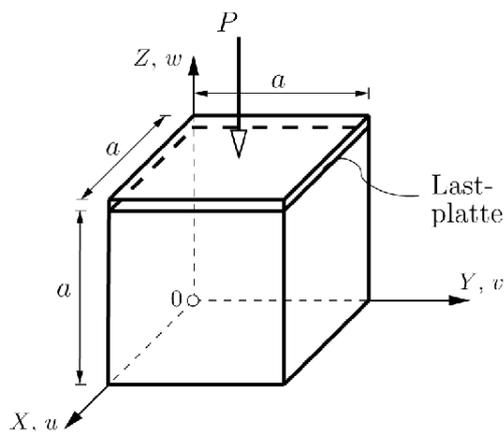
Aus dem Hooke'schen Gesetz ergibt sich: $\varepsilon_x^* = 1,1411 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_y^* = 9,9292 \cdot 10^{-3}$. Transformation in Richtung der DMS ergibt: $\varepsilon'_{30^\circ} = 1,1040 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon'_{135^\circ} = 1,0670 \cdot 10^{-3}$

Ersatzkolloquium WS2010/2011

1. Beispiel: Odometerversuch mit Eigengewicht

Angabe:

Gegeben ist eine würfelförmige Bodenprobe aus homogenem, isotropem Material mit Elastizitätsmodul E und Querdehnungszahl ν . Das spezifische Gewicht wird im Volumenkraftvektor $-\rho g \underline{e}_z$ berücksichtigt, wobei ρ die Massendichte und g die Erdbeschleunigung bezeichnet. In der unverformten Lage beträgt die Kantenlänge a (siehe Abbildung). Mit Hilfe eines Kompressionsapparates wird die Probe einem Odometerversuch unterzogen: Mit Ausnahme der belasteten Oberfläche ($Z = H$) sind alle anderen Oberflächen gegen Verschieben in Richtung ihrer Flächennormalen gehalten. An der belasteten Oberfläche ($Z = H$) wird eine starre Lastplatte mit der Kraft P in die Probe eingedrückt.



Annahmen: lineare Elastizitätstheorie, Spannungsfreiheit in der unverformten Lage, quasi-statischer Versuch. Alle Kontaktflächen zwischen Versuchskörper und Kompressionsapparat (inklusive der Lastplatte) sind reibungsfrei.

Gesucht:

1. Schreiben Sie die mathematische Formulierung der in Worten beschriebenen Verschiebungs- und Spannungsrandbedingungen für die gesamte Oberfläche der Bodenprobe vollständig an.
2. Bestimmen Sie für den Spannungsansatz $\sigma_{zz} = \rho g z + C_1$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} \frac{\nu}{1-\nu}$, $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ die Konstante C_1 aus den Randbedingungen. Beweisen Sie, dass die Spannungen sowohl die Gleichgewichtsbedingungen in jedem Punkt der Bodenprobe erfüllen als auch die Spannungsrandbedingungen einhalten.
3. Berechnen Sie mit Hilfe des in Punkt 2 gegebenen Ansatzes die Komponenten des Verzerrungstensors durch Anwenden des Hooke'schen Gesetzes sowie anschließend die Verschiebungskomponenten u , v und w durch Integration der linearen kinematischen Beziehungen und Anpassen der Randbedingungen.

Lösung:

1. Randbedingungen:

	X-Ri.	Y-Ri.	Z-Ri.
$X = 0$	$u = 0$	$\tau_{xy} = 0$	$\tau_{xz} = 0$
$Y = 0$	$\tau_{yx} = 0$	$v = 0$	$\tau_{yz} = 0$
$Z = 0$	$\tau_{zx} = 0$	$\tau_{zy} = 0$	$w = 0$
$X = a$	$u = 0$	$\tau_{xy} = 0$	$\tau_{xz} = 0$
$Y = a$	$\tau_{yx} = 0$	$v = 0$	$\tau_{yz} = 0$
$Z = a$	$\tau_{zx} = 0$	$\tau_{zy} = 0$	$\sigma_{zz} = -\frac{P}{a^2}$

Konstante C_1 :

$$\sigma_{zz}(Z = a) = \rho g a + C_1 = -\frac{P}{a^2} \Rightarrow C_1 = -\rho g a - \frac{P}{a^2}$$

Kontrolle Gleichgewicht und Spannungsrandbedingungen:

$$\sigma_{ji,j} = 0 \checkmark \quad \sigma_{zz}(Z = a) = -\frac{P}{a^2} \checkmark \quad \tau_{ij} = 0 \checkmark$$

Verzerrungen mit Hooke'schen Gesetz, Verschiebungen durch Integration der Verzerrungen:

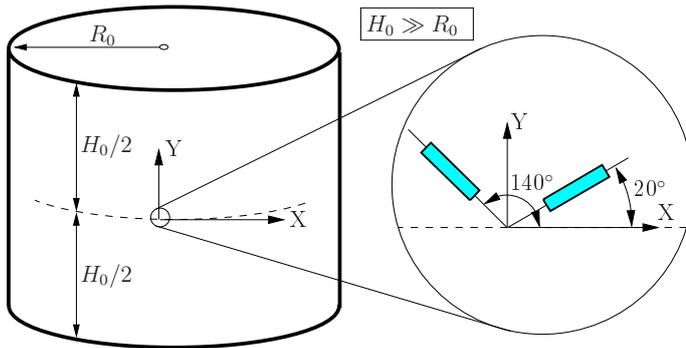
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} \sigma_{zz} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} u &= \int \varepsilon_{xx} dx = C_2, \text{ mit } u(X=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ v &= \int \varepsilon_{yy} dy = C_3 \text{ mit } v(Y=0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \\ w &= \int \varepsilon_{zz} dz = \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} \left(\rho g \frac{z^2}{2} - \rho g a z - \frac{P}{a^2} z \right) + C_4, \\ &\text{ mit } w(Z=0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \end{aligned}$$

1. Kolloquium WS2009/2010

1. Beispiel: Ebener SPZ / Ebener Verzerrungszustand

Angabe:

Gegeben ist ein gasgefüllter Stahltank laut Abbildung (isotropes Materialverhalten). Zwei Dehnungsmessstreifen wurden vor dem Einfüllen des Gases an der Oberfläche des spannungsfreien Stahltanks angebracht. Nach dem Steigern des Innendrucks auf den Wert p_i wurden die in der Tabelle angegebenen Dehnungsmesswerte erhalten.



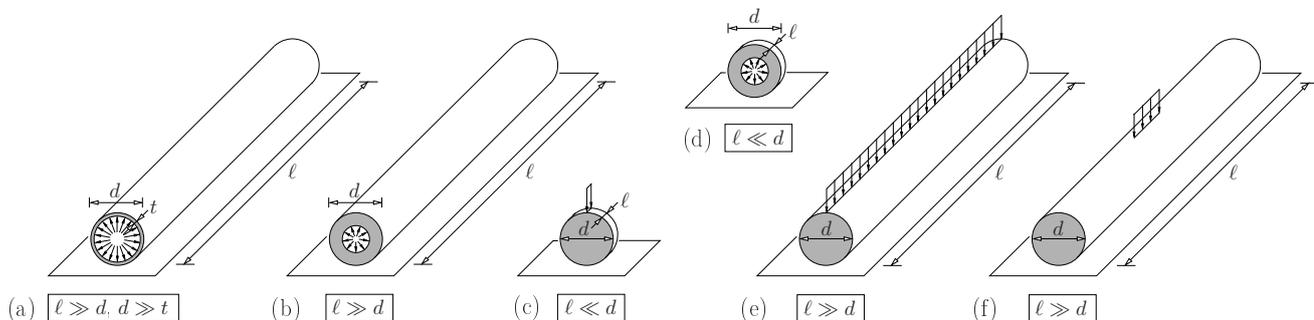
Radius:	$R_0 = 60,0 \text{ cm}$
Blechdicke:	$t_0 = 10,0 \text{ mm}$
Innendruck:	$p_i = 30 \text{ bar}$
(Hinweis: $1 \text{ bar} = 0,01 \text{ kN/cm}^2$)	
DMS bei 20° :	$\epsilon_{20^\circ} = 6,5978 \cdot 10^{-4}$
DMS bei 140° :	$\epsilon_{140^\circ} = 5,0048 \cdot 10^{-4}$

Hinweis: Legen Sie ihren Berechnungen einen ebenen Spannungszustand (ESZ) zugrunde.

Gesucht:

- Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul E und die Querdehnungszahl ν des Stahls auf Basis einer geometrisch linearen Theorie.
- Bestimmen Sie die Änderung des Umfangs und des Radius des Stahltanks.
- Bestimmen Sie die Komponente $E_{X'X'}$ des Green'schen Verzerrungstensors, wobei die Koordinatenachse X' mit der X-Achse einen Winkel von 60° einschließt.
- Geben Sie für jeden Körper (a) bis (f) in der unteren Abbildung ein sinnvolles technisches Konzept (ESZ, EVZ, 3D) zur Bestimmung des Spannungs- und Verzerrungszustandes an. Bei den Körpern (a), (b), (e) und (f) ist die Verschiebung in Längsrichtung verhindert. Die Seitenflächen der Körper (c) und (d) sind spannungsfrei. Alle Körper sind reibungsfrei gelagert, und das Eigengewicht kann vernachlässigt werden.

ESZ ... ebener Spannungszustand, EVZ ... ebener Verzerrungszustand, 3D ... räumlicher Spannungs- und Verzerrungszustand



Lösung:

- Der Berechnung wird ein ebener Spannungszustand (ESZ) zugrunde gelegt. Aufgrund der Belastung und Geometrie des Körpers, sind σ_{xx} und σ_{yy} Hauptnormalspannungen, und folglich $\sigma_{xy} = 0$ und $\varepsilon_{xy} = 0$. Mit Hilfe der gemessenen Dehnungen und den Transformationsbeziehungen für Verzerrungstensorkomponenten in der X-Y-Ebene, ergeben sich die Verzerrungen $\varepsilon_{xx} = 7.2270 \cdot 10^{-4}$ und $\varepsilon_{yy} = 1.8489 \cdot 10^{-4}$. Formulieren der Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben in Umfangs- bzw. Axialrichtung unter der Näherung $R_i \approx R_0$ liefert die Hauptnormalspannungen $\sigma_{xx} = 18 \text{ kN/cm}^2$ und $\sigma_{yy} = 9 \text{ kN/cm}^2$. Das Hooke'sche Gesetz für den ESZ liefert nun zwei Gleichungen zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls $E = 21420 \text{ kN/cm}^2$ und der Querdehnungszahl $\nu = 0.28$.

- Die Änderung des Umfangs und des Radius des Stahl tanks berechnet sich wie folgt:

$$\Delta U = \varepsilon_{xx} U = \varepsilon_{xx} 2R_0 \pi = 7.2270 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 60 \cdot \pi = 0.272 \text{ cm}$$

$$\Delta R_0 = \Delta U / 2\pi = 0.272 / 2\pi = 0.043 \text{ cm}$$

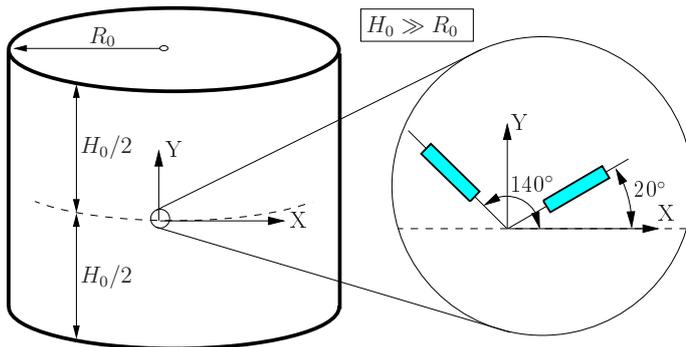
- $\varepsilon_{60^\circ} = 0.31934 \cdot 10^{-3}$, $E_{X'X'} = \frac{1}{2}((1 + \varepsilon_{60^\circ})^2 - 1) = 0.31939 \cdot 10^{-3}$
- (a) EVZ & ESZ da Verschiebung in Längsrichtung verhindert, Belastung gleichmäßig, $\ell \gg d$ und $d \gg t$ (vgl. zylindrischer Stahl tank)
(b) EVZ da Verschiebung in Längsrichtung verhindert, Belastung gleichmäßig und $\ell \gg d$
(c) ESZ da Seitenflächen spannungsfrei, Belastung gleichmäßig und $\ell \ll d$
(d) ESZ da Seitenflächen spannungsfrei, Belastung gleichmäßig und $\ell \ll d$
(e) EVZ da Verschiebung in Längsrichtung verhindert, Belastung gleichmäßig und $\ell \gg d$
(f) 3D aufgrund der lokalen Belastung

1. Kolloquium WS2007/2008

1. Beispiel: Ebener Spannungszustand / Ebener Verzerrungszustand

Angabe:

Gegeben ist ein gasgefüllter Stahltank laut Abbildung (isotropes Materialverhalten). Zwei Dehnungsmessstreifen wurden vor dem Einfüllen des Gases an der Oberfläche des spannungsfreien Stahltanks angebracht. Nach dem Steigern des Innendrucks auf den Wert p_i wurden die in der Tabelle angegebenen Dehnungsmesswerte erhalten.



Radius:	$R_0 = 60,0 \text{ cm}$
Blechdicke:	$t_0 = 10,0 \text{ mm}$
Innendruck:	$p_i = 30 \text{ bar}$ (Hinweis: $1 \text{ bar} = 0,01 \text{ kN/cm}^2$)
DMS bei 20° :	$\epsilon_{20^\circ} = 6,5978 \cdot 10^{-4}$
DMS bei 140° :	$\epsilon_{140^\circ} = 5,0048 \cdot 10^{-4}$

Hinweis: Legen Sie ihren Berechnungen einen ebenen Spannungszustand (ESZ) und die geometrisch lineare Elastizitätstheorie zugrunde.

Gesucht:

1. Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul E und die Querdehnungszahl ν des Stahls.
2. Bei welchem Innendruck beträgt die Blechdicke t in der verformten Lage $9,99 \text{ mm}$.
3. Wie groß muß das Verhältnis R_0/t_0 mindestens sein, damit die Annahme eines ESZ sinnvoll ist. *Hinweis:* Der ESZ kann als technisch sinnvolle Näherung betrachtet werden, wenn die größte Spannung in Dickenrichtung zumindest eine Zehnerpotenz kleiner als die Normalspannung in Umfangsrichtung ist.

Lösung:

- Der Berechnung wird ein ebener Spannungszustand (ESZ) zugrunde gelegt. Aufgrund der Belastung und Geometrie des Körpers, sind σ_{xx} und σ_{yy} Hauptnormalspannungen, und folglich $\sigma_{xy} = 0$ und $\varepsilon_{xy} = 0$. Mit Hilfe der gemessenen Dehnungen und den Transformationsbeziehungen für Verzerrungstensoranteile in der X-Y-Ebene, ergeben sich die Verzerrungen $\varepsilon_{xx} = 7.2270 \cdot 10^{-4}$ und $\varepsilon_{yy} = 1.8489 \cdot 10^{-4}$. Formulieren der Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben in Umfangs- bzw. Axialrichtung unter der Näherung $R_i \approx R_0$ liefert die Hauptnormalspannungen $\sigma_{xx} = 18 \text{ kN/cm}^2$ und $\sigma_{yy} = 9 \text{ kN/cm}^2$. Das Hooke'sche Gesetz für den ESZ liefert nun zwei Gleichungen zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls $E = 21420 \text{ kN/cm}^2$ und der Querdehnungszahl $\nu = 0.28$.
 - Die Dickenänderung Δt in Abhängigkeit des Innendrucks p_i ergibt sich zu:

$$\Delta t = \varepsilon_{zz} \cdot t_0 = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) t_0 = -\frac{\nu}{E} \left(\frac{R_0 p_i}{t_0} + \frac{R_0 p_i}{2t_0} \right) t_0 = -0.001 \text{ cm}$$

Daraus ergibt sich ein Innendruck von $p_i = 85 \text{ bar}$, bei dem die Blechdicke t in der verformten Lage 9.99 mm beträgt.

- Die Annahme des ESZ ist lt. Angabe zulässig wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{\text{Normalspannung in Umfangsrichtung}}{\text{Größte Spannung in Dickenrichtung}} > 10 \rightarrow \frac{|\sigma_{xx}|}{|p_i|} = \frac{\frac{R_0 |p_i|}{t_0}}{|p_i|} = \frac{R_0}{t_0} > 10.$$

Abschnitt IV

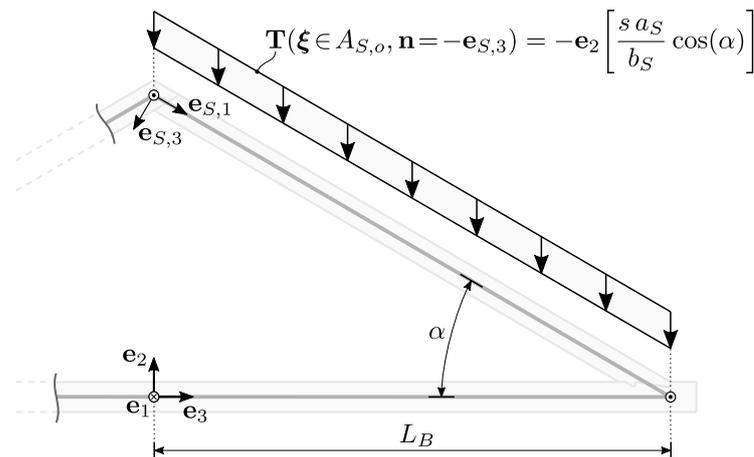
STABTHEORIE – DEHN- UND BIEGESTÄBE

2. Kolloquium WS2020/2021

1. Beispiel: Streckenlasten – Äußere Kräfte

Angabe:

Gegeben ist das nachfolgend dargestellte Traktionsvektorfeld $\mathbf{T}(\xi \in A_{S,o}, \mathbf{n} = -\mathbf{e}_{S,3})$, welches auf die Fläche der Sparrenoberseite $A_{S,o}$ wirkt.



Hinweis: Das Eigengewicht der Dachfläche oder des Dachgespärres ist hier nicht zu berücksichtigen. Es ist lediglich das gegebene Traktionsvektorfeld zu betrachten.

Gesucht: Bestimmen Sie für den Sparren die Streckenlast in lokaler $\mathbf{e}_{S,3}$ -Richtung, sprich $q_S(\xi_{S,1}) = q_S$ in [kN/m]. Für ein Sparrendach mit der halben Dachbreite $L_B = 5,50$ m, dem Dachneigungswinkel $\alpha = 30^\circ$, dem Sparrenabstand $a_S = 0,80$ m; für einen Sparren mit der Breite $b_S = 0,10$ m und der Höhe $h_S = 0,20$ m; sowie für $s = 1,35$ kN/m².

Lösung:

Zunächst kann das gegebene Traktionsvektorfeld vom globalen Koordinatensystem auf das lokale Bezugssystem überführt werden.

$$\mathbf{e}_{S,3} = -\mathbf{e}_2 \cos(\alpha) - \mathbf{e}_3 \sin(\alpha) \rightarrow T_{S,3} = +\frac{s a_S}{b_S} \cos^2(\alpha)$$

Die gesuchte Streckenlasten $q_S(\xi_{S,1}) = q_S$ kann nun mit der Traktionsvektorkomponente $T_{S,3}$ wie folgt ermittelt werden.

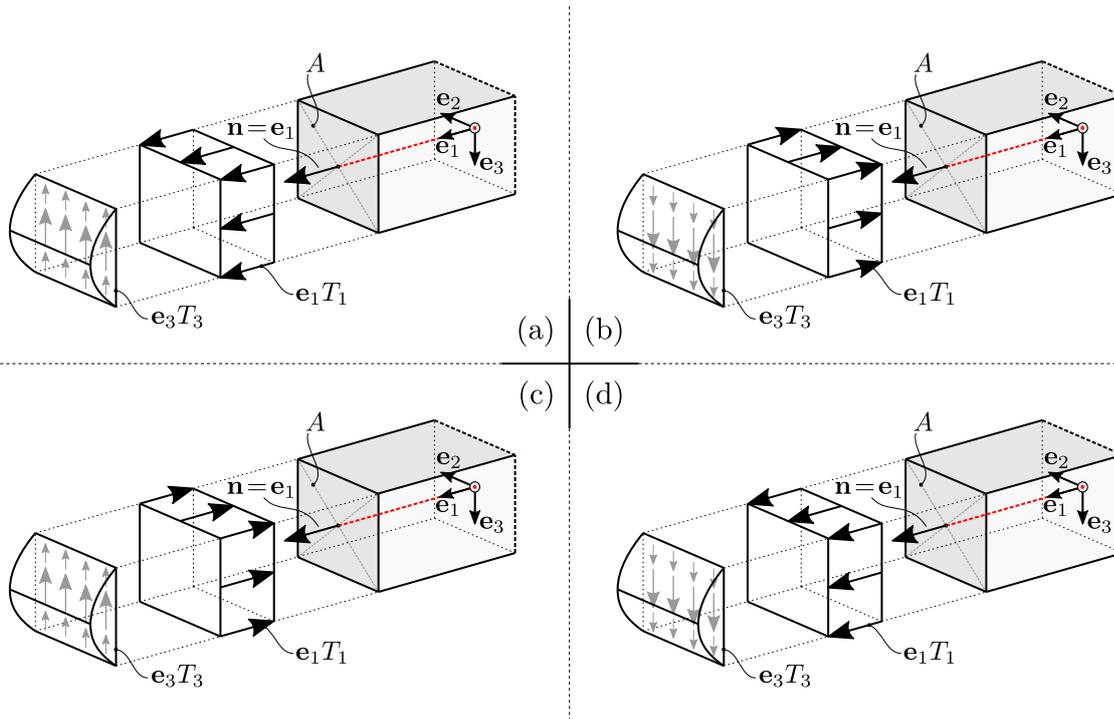
$$q_S = \int_{C_S} [T_{S,3}] d\xi_{S,2} d\xi_{S,3} = +s a_S \cos^2(\alpha) = 0,8100 \text{ kN/m}$$

2. Kolloquium WS2020/2021

2. Beispiel: Typische Spannungsverläufe

Angabe:

Gegeben ist die gedankliche Schnittfläche A mit der Flächennormalen $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ mit verschiedenen Darstellungsvarianten des Traktionsvektorfeldes $\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi} \in A, \mathbf{n} = \mathbf{e}_1)$. Dabei sind die Traktionskräfte $\mathbf{e}_1 T_1$ den Normalspannungen σ_{11} zugeordnet, und die Traktionskräfte $\mathbf{e}_3 T_3$ den Schubspannungen σ_{31} .



Gesucht: Welchem Bild entspricht ein Traktionsvektorfeld der Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 T_1(\boldsymbol{\xi} \in A, \mathbf{n} = -\mathbf{e}_1) &= +4,250 \mathbf{e}_1 \text{ N/mm}^2 \\ \mathbf{e}_3 T_3(\boldsymbol{\xi} \in A, \mathbf{n} = -\mathbf{e}_1) &= -0,225 \mathbf{e}_3 \left[1 - \frac{4\xi_3^2}{h^2} \right] \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Lösung:

Da in den Abbildungen das gedankliche Schnittufer mit der Flächennormalen $\mathbf{n} = +\mathbf{e}_1$ gezeigt wird und die gegebenen Traktionskraftkomponenten für eine Schnittfläche mit Flächennormaler $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$ definiert sind, wird das Schnittprinzip angewendet.

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}) = -\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}, -\mathbf{n}) \begin{cases} \mathbf{e}_1 T_1(A, \mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1 T_1(A, -\mathbf{e}_1) = -4,250 \mathbf{e}_1 \text{ N/mm}^2 \\ \mathbf{e}_3 T_3(A, \mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_3 T_3(A, -\mathbf{e}_1) = +0,225 \mathbf{e}_3 \left[1 - \frac{4\xi_3^2}{h^2} \right] \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

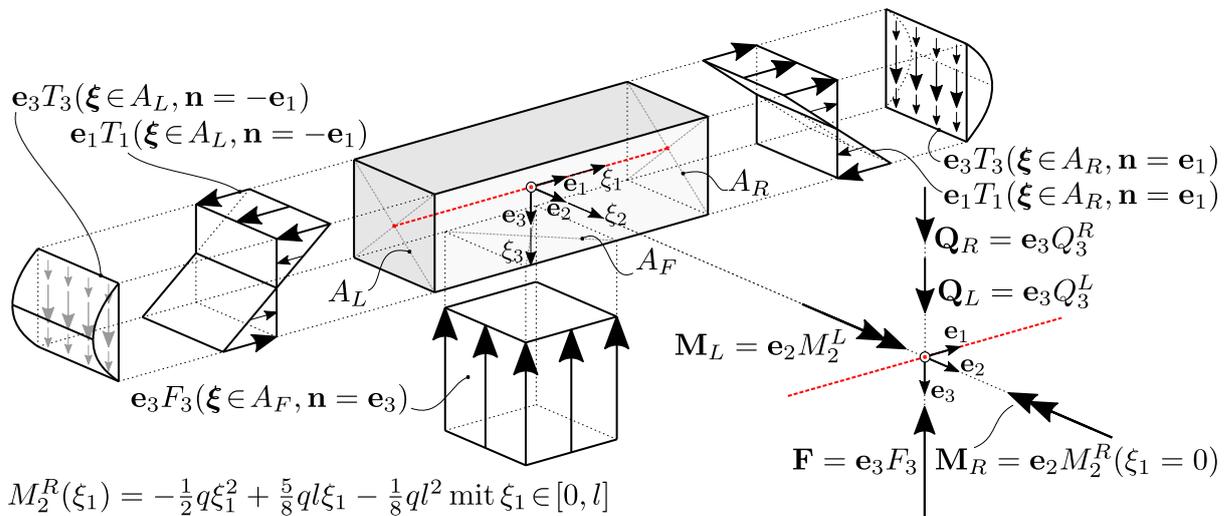
Somit soll die Traktionsvektorkomponente T_1 in den Abbildungen in die negative \mathbf{e}_1 -Richtung wirken und die Komponente T_3 in die positive \mathbf{e}_3 -Richtung. Dies entspricht der Abbildung b).

2. Kolloquium WS2020/2021

3. Beispiel: Gleichgewicht an einer Holzverbindung – „Strukturpunkt“

Angabe:

Gegeben ist der Strukturpunkt „Innenaufleger“ eines Zwei-Feld-Trägers mit Bezug auf ein lokales \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 Basissystem. Durch das gedankliche Freischneiden entstehen die Querschnittsflächen A_R und A_L sowie die Träger-Innenaufleger-Kontaktfläche A_F mit den zugehörigen Normal- und Schubspannungsverläufen der Querkraftvektoren \mathbf{Q}_R und \mathbf{Q}_L und der Biegemomentvektoren \mathbf{M}_R und \mathbf{M}_L in unmittelbarer Nähe des Auflagerpunktes ($\xi_1 \approx 0$) sowie mit dem zugehörigen Kontaktspannungsverlauf des Kraftvektors („Auflagerkraft“) \mathbf{F} .



Hinweis: Die natürliche Randbedingung am Stabanfang ($\xi_1=0$) lautet: $dM_2(\xi_1)/d\xi_1 = Q_3(\xi_1)$. Der betrachtete Strukturpunkt befindet sich im Momentengleichgewicht. Dies bedingt: $\mathbf{M}_L + \mathbf{M}_R = 0$. Des Weiteren gilt $\mathbf{Q}_L = \mathbf{Q}_R$ aufgrund einer Symmetrieebene mit Normaler $\mathbf{n}_{\text{sym}} = +\mathbf{e}_1$.

Gesucht: Bestimmen Sie die Komponente F_3 des Kraftvektors \mathbf{F} in [kN] für die Feldlänge $l = 5$ m und für $q = 6,25$ kN/m, sodass der Strukturpunkt im Gleichgewicht ist.

Lösung:

Alle am betrachteten Strukturpunkt angreifenden Kräfte müssen im Gleichgewicht stehen. Somit liegt folgende Bestimmungsgleichung für die gesuchte Komponente F_3 vor:

$$\mathbf{F} + \mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_R = 0 \rightarrow \mathbf{e}_3 [F_3 + Q_3^L + Q_3^R] = 0$$

Mit Hilfe der „natürlichen Randbedingung“ folgt die Querkraftvektorkomponente Q_3^R mit:

$$\frac{dM_2(\xi_1)}{d\xi_1} = Q_3(\xi_1) = -q\xi_1 + \frac{5}{8}ql \rightarrow Q_3^R(\xi_1 = 0) = +\frac{5}{8}ql$$

Die Symmetrieebene im Strukturpunkt bedingt $\mathbf{Q}_L = \mathbf{Q}_R$ und somit folgt F_3 mit:

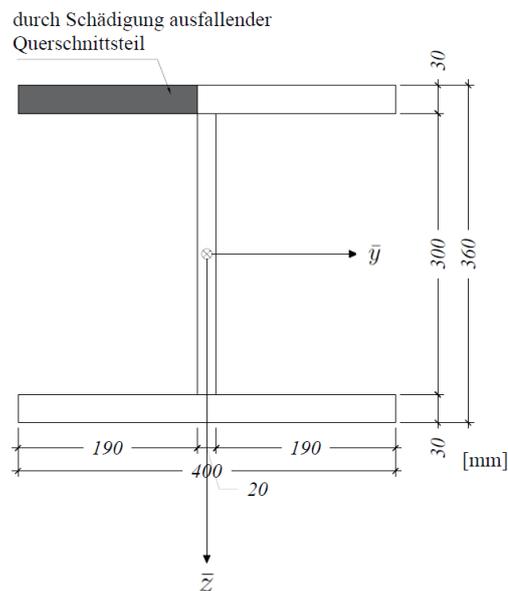
$$F_3 = -Q_3^L - Q_3^R = -\frac{5}{8}ql - \frac{5}{8}ql = -1,25ql = -39,0625 \text{ kN}$$

2. Kolloquium WS2020/2021

12. Beispiel: Winkel zwischen $y - z$ Koordinatensystem und Hauptträgheitsachsen

Angabe:

Gegeben ist der Querschnitt eines Fachwerkstabes. Durch Korrosion wird der Querschnitt derart geschädigt, dass der linke obere Flanschteil ausfällt, woraus eine Reduktion der Querschnittsfläche resultiert (siehe Skizze). Gegeben ist des Weiteren das Trägheitsmoment $I_y = 50818,92 \text{ cm}^4$ und das Trägheitsmoment $I_{yz} = -12191,6667 \text{ cm}^4$. Die Hauptträgheitsachsen werden zur Unterscheidung vom $\bar{y} - \bar{z}$ Koordinatensystem mit η und ζ bezeichnet.



Gesucht ist der Winkel α in $[\circ]$, den die \bar{y} -Achse mit der η -Achse einschließt.

Lösung:

Winkelberechnung:
$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{-2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z} \right)$$

Neuer Schwerpunkt:
$$\bar{z}_S = \frac{-165 \cdot 6300 + 165 \cdot 12000}{24300} = 38,70 \text{ mm} = 3,870 \text{ cm}$$

Neue Trägheitsmomente:

$$I_y = \frac{21 \cdot 3^3}{12} + 21 \cdot 3 \cdot (-20,37)^2 + \frac{40 \cdot 3^3}{12} + 40 \cdot 3 \cdot 12,63^2 + \frac{2 \cdot 30^3}{12} + 2 \cdot 30 \cdot (-3,87)^2 = 50818,9167 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{3 \cdot 21^3}{12} + 3 \cdot 21 \cdot 7,037^2 + \frac{3 \cdot 40^3}{12} + 3 \cdot 40 \cdot (-2,463)^2 + \frac{30 \cdot 2^3}{12} + 30 \cdot 2 \cdot (-2,463)^2 = 22546,92 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = 21 \cdot 3 \cdot (-20,37) \cdot 7,037 + 3 \cdot 40 \cdot (-2,463) \cdot 12,63 + 30 \cdot 2 \cdot (-2,463) \cdot (-3,87) = -12191,6667 \text{ cm}^4$$

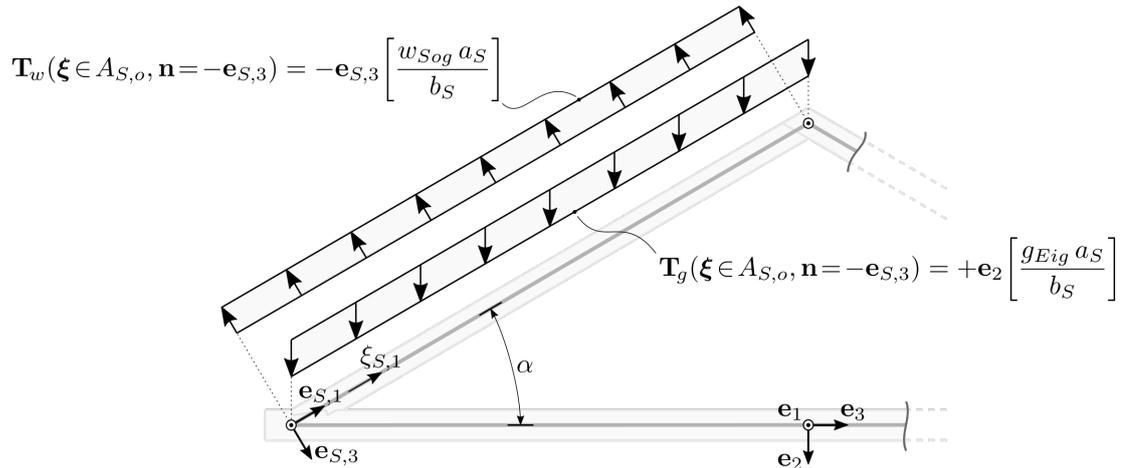
$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{-2 \cdot (-12191,6667)}{50818,9167 - 22546,92} \right) = 20,38815058 \approx 20,39^\circ$$

Ersatzkolloquium WS2020/2021

7. Beispiel: Äußere Kräfte – Lastaufstellung

Angabe:

Gegeben sind die Traktionsvektorfelder eines Windsoges $\mathbf{T}_w(\boldsymbol{\xi} \in A_{S,o}, \mathbf{n} = -\mathbf{e}_{S,3})$ und des Eigengewichts der Dachfläche $\mathbf{T}_g(\boldsymbol{\xi} \in A_{S,o}, \mathbf{n} = -\mathbf{e}_{S,3})$, welche beide auf die Fläche der Sparrenoberseite $A_{S,o}$ wirken. Der Dachneigungswinkel α beträgt 30° . Der Sparren besitzt eine Breite $b_S = 0,10$ m, eine Höhe $h_S = 0,20$ m und einen Sparrenabstand $a_S = 0,80$ m. Die Intensität des Windsoges beträgt $w_{Sog} = 0,75$ kN/m² und jene des Dachflächeneigengewichts folgt mit $g_{Eig} = 1,15$ kN/m².



Hinweis: Das Eigengewicht des Dachgespärres ist hier nicht zu berücksichtigen.

Gesucht: Bestimmen Sie für den Sparren die Streckenlast in lokaler $\mathbf{e}_{S,3}$ -Richtung, sprich $q_S(\xi_{S,1}) = q_S$ in [kN/m].

Lösung:

Zunächst kann die Traktionsvektorfeld-Komponente T_2^g vom globalen Koordinatensystem auf das lokale $\mathbf{e}_{S,1}$ - $\mathbf{e}_{S,3}$ Bezugssystem überführt werden.

$$\mathbf{e}_{S,3} = +\mathbf{e}_2 \cos(\alpha) + \mathbf{e}_3 \sin(\alpha) \quad \rightarrow \quad T_{S,3}^g = + \left[\frac{g_{Eig} a_S}{b_S} \right] \cos(\alpha)$$

Die gesuchte Streckenlasten $q_S(\xi_{S,1}) = q_S$ kann nun mit der Traktionsvektorkomponente $T_{S,3}^g$ und $T_{S,3}^w$ wie folgt ermittelt werden.

$$q_S = \int_{C_S} [T_{S,3}^g - T_{S,3}^w] d\xi_{S,2} d\xi_{S,3} = [T_{S,3}^g - T_{S,3}^w] b_S = + [g_{Eig} \cos(\alpha) - w_{Sog}] a_S$$

Berücksichtigung der gegebenen Zahlenwerte führt auf:

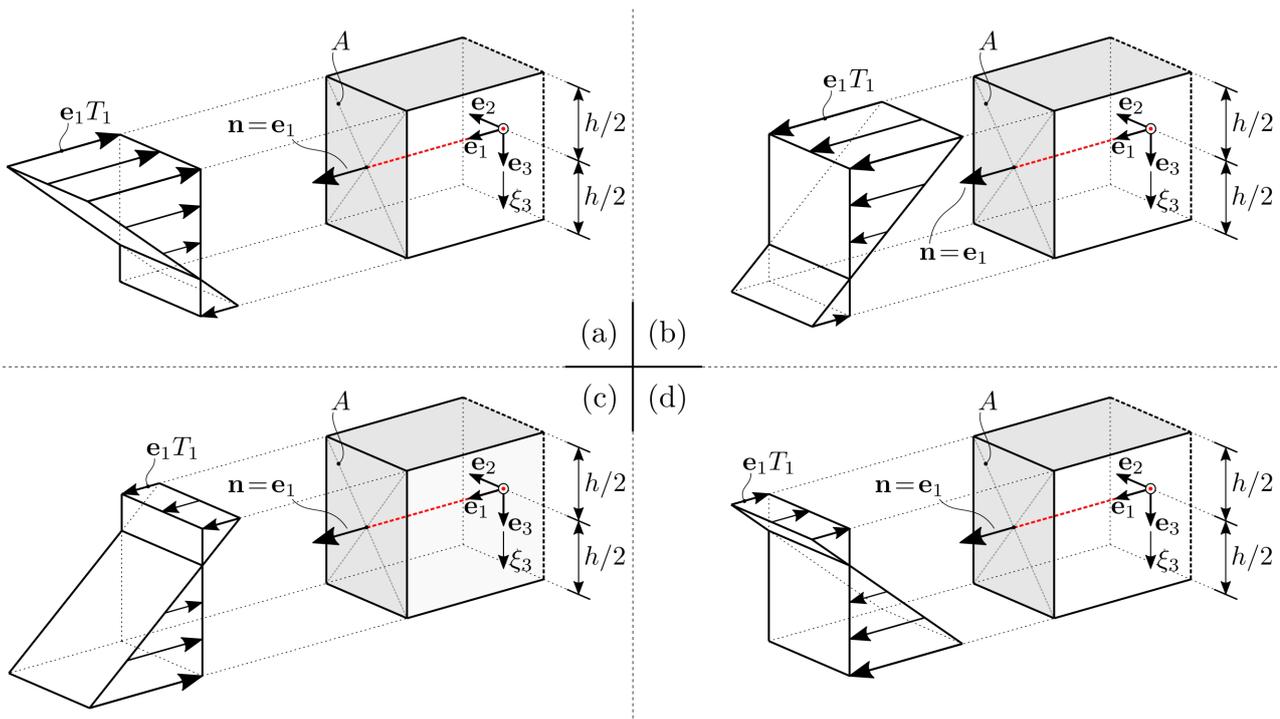
$$q_S = +1,15 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,80 \text{ m} \cdot \cos(30) - 0,75 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,80 \text{ m} = +0,1967 \text{ kN/m}$$

Ersatzkolloquium WS2020/2021

8. Beispiel: Typische Spannungsverläufe

Angabe:

Gegeben ist ein Holzbalken mit der Breite $b = 14 \text{ cm}$ und der Höhe $h = 20 \text{ cm}$ sowie die gedankliche Schnittfläche A mit der Flächennormalen $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ mit verschiedenen Darstellungsvarianten des Traktionsvektorfeldes $\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi} \in A, \mathbf{n} = \mathbf{e}_1)$. Die Traktionskräfte $\mathbf{e}_1 T_1$ sind den Normalspannungen σ_{11} zugeordnet, welche infolge einer Normalkraft und einem Biegemoment resultieren.



Gesucht: Welchem Bild entspricht ein Traktionsvektorfeld der Form:

$$\mathbf{e}_1 T_1(\boldsymbol{\xi} \in A, \mathbf{n} = -\mathbf{e}_1) = -\left[0,2679 + 0,0536 \xi_3\right] \mathbf{e}_1 \text{ kN/cm}^2$$

Lösung:

Da in den Abbildungen das gedankliche Schnittufer mit der Flächennormalen $\mathbf{n} = +\mathbf{e}_1$ gezeigt wird und die gegebene Traktionskraftkomponente für eine Schnittfläche mit Flächennormaler $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$ definiert ist, wird das Schnittprinzip $(\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}) = -\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}, -\mathbf{n}))$ angewendet.

$$\mathbf{e}_1 T_1(A, \mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1 T_1(A, -\mathbf{e}_1) = -\left\{-\left[0,2679 + 0,0536 \xi_3\right] \mathbf{e}_1\right\} \text{ kN/cm}^2$$

In weiterer Folge berücksichtigen wir ξ_3 mit $\pm h/2$:

$$\xi_3 = -h/2 = -10 \text{ cm} : \mathbf{e}_1 T_1 = +\left[0,2679 - 0,0536 \cdot 10\right] = -0,2681 \mathbf{e}_1 \text{ kN/cm}^2$$

$$\xi_3 = +h/2 = +10 \text{ cm} : \mathbf{e}_1 T_1 = +\left[0,2679 + 0,0536 \cdot 10\right] = +0,8039 \mathbf{e}_1 \text{ kN/cm}^2$$

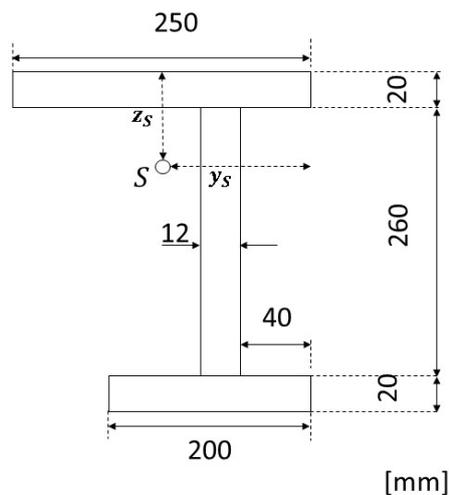
und erkennen, dass das gegebene Traktionsvektorfeld durch Abbildung (d) dargestellt wird. Da die Traktionskraftvektoren an der Balkenoberseite einerseits in die negative \mathbf{e}_1 -Richtung wirken und andererseits betragsmäßig kleiner sind als jene an der Balkenunterseite.

Ersatzkolloquium WS2020/2021

11. Beispiel: Schiefe Biegung

Angabe:

Gegeben ist ein I-Profil, welches eine Querschnittsfläche von $A = 121,2 \text{ cm}^2$ aufweist, sowie die Schwerpunktkoordinaten $y_s = 9,641 \text{ cm}$ und $z_s = 13,845 \text{ cm}$; das Trägheitsmoment beträgt $I_z = 5147,94 \text{ cm}^4$. Weitere Querschnittswerte sind der Skizze zu entnehmen.



Gesucht: Berechnen Sie das Deviationsmoment I_{yz} (in $[\text{cm}^4]$) des dargestellten Profils.

Lösung:

$$I_y = \frac{250 \cdot 20^3}{12} + 250 \cdot 20 \cdot (10 - 138,45)^2 + \frac{12 \cdot 260^3}{12} + 12 \cdot 260 \cdot (150 - 138,45)^2 + \frac{200 \cdot 20^3}{12} + 200 \cdot 20 \cdot (290 - 138,45)^2 = 1,926588 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 = 19265,88 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{20 \cdot 250^3}{12} + 250 \cdot 20 \cdot (125 - 96,41)^2 + \frac{260 \cdot 12^3}{12} + 12 \cdot 260 \cdot (46 - 96,41)^2 + \frac{20 \cdot 200^3}{12} + 200 \cdot 20 \cdot (100 - 96,41)^2 = 5,14794 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 = 5147,94 \text{ cm}^4$$

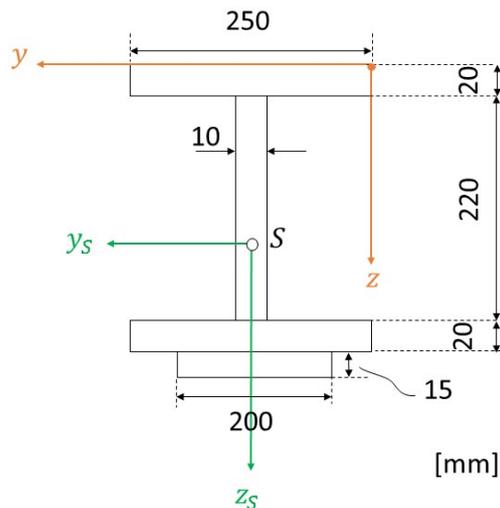
$$I_{yz} = 250 \cdot 20 \cdot (125 - 96,41) \cdot (10 - 138,45) + 12 \cdot 260 \cdot (46 - 96,41) \cdot (150 - 138,45) + 200 \cdot 20 \cdot (100 - 96,41) \cdot (290 - 138,45) = -1,80022 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 = -1800,22 \text{ cm}^4$$

Ersatzkolloquium WS2020/2021

12. Beispiel: Schiefe Biegung

Angabe:

Gegeben ist ein Kragträger mit einfach symmetrischem Querschnitt, der sich aus einem I-Profil und einem zusätzlich aufgeschweißten Stahlblech zusammensetzt. Querschnittsabmessungen sind der Skizze zu entnehmen.



Gesucht: Berechnen Sie die Koordinate z_S (in [cm]) des Schwerpunktes.

Lösung:

$$z_S = \frac{250 \cdot 20 \cdot 10 + 10 \cdot 220 \cdot 130 + 250 \cdot 20 \cdot 250 + 200 \cdot 15 \cdot 267,5}{A}$$

$$= \frac{2388500}{15200} = 157,14 \text{ mm} = 15,71 \text{ cm}$$

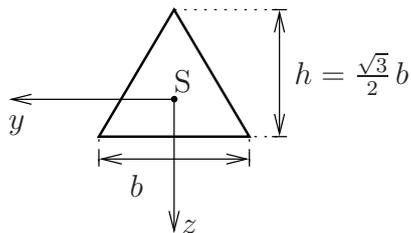
2. Kolloquium WS2018/2019

1. Beispiel: Kernfläche und Normalspannungen

Angabe:

Gegeben ist eine eingespannte Stütze, deren Querschnitt einem *gleichseitigen* Dreieck entspricht mit $b = 25$ cm (siehe Abbildung). Am freien Ende wird die Stütze durch die in Stablängsrichtung wirkende Kraft P_x und durch zwei in der y - z -Ebene wirkende Kräfte P_y und P_z belastet (alle Kräfte greifen im Schwerpunkt S an). Die Größe der Kraft P_x wird durch die letzten beiden Ziffern Ihrer Matrikelnummer XY bestimmt: $P_x = (300 - XY)$ kN.

Vollquerschnitt der Stütze

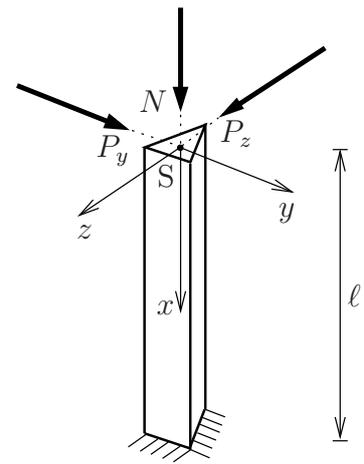


$$I_y = \frac{1}{36} b h^3$$

$$I_z = \frac{1}{48} h b^3$$

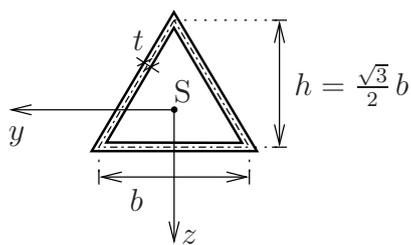
$$I_{yz} = 0$$

System



Hohlquerschnitt für Punkt d

Achtung: b und h beziehen sich hier auf die Mittellinie



$$I_y^{hohl} = ?$$

$$I_z^{hohl} = ?$$

$$t = \frac{b}{10}$$

$$\text{Belastung: } P_y = P_z = \frac{N}{10}$$

$$\text{Abmessungen: } \ell = 10 b$$

Gesucht:

- Bestimmen Sie die Kernfläche des Vollquerschnitts und stellen Sie diese maßstäblich dar.
- Berechnen Sie die Gleichung der Nulllinie im Stützenfuß für den Vollquerschnitt und stellen Sie diese maßstäblich dar.
- Ermitteln Sie die maximalen Normalspannungen im Stützenfuß für den Vollquerschnitt und markieren Sie in Ihrer Skizze jene Stellen, wo die maximalen Zug- und Druckspannungen zufolge der gegebenen Belastung auftreten.
- Berechnen Sie die Flächenmomente 2. Ordnung des Hohlquerschnitts (I_y^{hohl} , I_z^{hohl}). Um wie viel Prozent vermindern/vergrößern sich die Trägheitsmomente, verglichen mit dem Vollquerschnitt?
Hinweis: Beziehen Sie sich auf Profilmittellinien.
- Bestimmen Sie die Knicklast N_{cr} der Vollquerschnitt-Stütze ($E = 21000$ kN/cm²).

Hinweis: Die Schnittgrößen im Stützenfuß ergeben sich zu $N = -P_x$, $M_y = -P_z \cdot \ell$ und $M_z = P_y \cdot \ell$.

Lösung:

1. Kernfläche:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} b = 21,65 \text{ cm}; \quad A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 = 270,63 \text{ cm}^2;$$

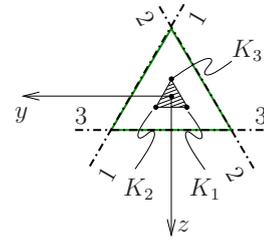
$$I_y = I_z = \frac{\sqrt{3} b^4}{96} = 7.047,73 \text{ cm}^4; \quad i_y^2 = i_z^2 = \frac{b^2}{24} = 26,04 \text{ cm}^2$$

Nulllinie 3-3 (parallel zur y -Achse):

$$P_{3y} = (\infty/0) \rightarrow y_{K_3} = 0$$

$$P_{3z} = (0/\frac{\sqrt{3}}{6} b) \rightarrow z_{K_3} = -\frac{i_y^2}{z P_{3z}} = -\frac{b}{4\sqrt{3}} \rightarrow K_3 (0/-3,61)$$

K_1 und K_2 folgen aus Symmetrie $K_1 (-3,13/1,80)$ $K_2 (3,13/1,80)$



2. Nulllinie:

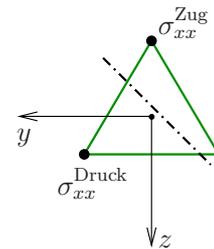
$$\tan \gamma_y = \frac{M_z}{M_y} = -1$$

$$z = \frac{I_y \tan \gamma_y}{I_z} y - \frac{N}{A} \frac{I_y}{M_y} = -y - \frac{40b^2}{96\ell} = -y - \frac{4b}{96} = -y - 1,04$$

3. Normalspannungen: $\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = -\frac{P_x}{A} - \frac{P_z \ell}{I_y} z - \frac{P_y \ell}{I_z} y$

$$P^o(0/-\frac{b}{\sqrt{3}}): \quad \sigma_{xx}^o = 0,05 \cdot P_x \text{ kN/cm}^2 = \sigma_{xx}^{\text{Zug}}$$

$$P^{\text{li}}(\frac{b}{2}/\frac{\sqrt{3}b}{6}): \quad \sigma_{xx}^{\text{li}} = -0,07 \cdot P_x \text{ kN/cm}^2 = \sigma_{xx}^{\text{Druck}}$$



4. Trägheitsmoment des Hohlquerschnitts $I_y^{\text{hohl}} = I_z^{\text{hohl}}$

$$\tilde{t} = 2t = 5 \text{ cm}$$

$$I_z^{\text{hohl}} = (b \cdot t) \left(2 \cdot \left(\frac{b}{4} \right)^2 \right) + \frac{t \cdot b^3}{12} + 2 \cdot \frac{\tilde{t} \cdot \left(\frac{b}{2} \right)^3}{12} = \frac{1}{40} b^4 = 0,025 b^4 = 9.765,63 \text{ cm}^4 \approx I_y^{\text{hohl}}$$

$$\rightarrow \frac{I^{\text{hohl}}}{I^{\text{voll}}} = 1,386$$

5. Knicklast: $\mathcal{N}_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \cdot 7047,73}{(2 \cdot 10 \cdot 25)^2} = 5.842,90 \text{ kN}$

2. Kolloquium WS2018/2019

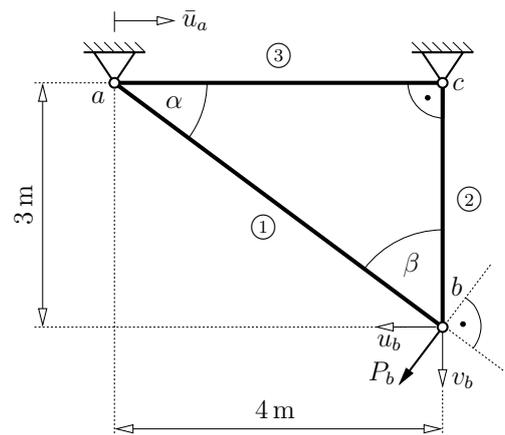
3. Beispiel: Fachwerk - PvV und PvK

Angabe:

Gegeben ist ein ideales Fachwerk. Sämtliche Fachwerksstäbe weisen einen Elastizitätsmodul von $E = 5000 \text{ kN/cm}^2$ und eine Querschnittsfläche von $A = 12 \text{ cm}^2$ auf. Im Auflager a ist eine horizontale Verschiebung $\bar{u}_a = 1 \text{ mm}$ eingepreßt und im Punkt b wirkt eine Kraft $P_b = 100 \text{ kN}$ (siehe Abbildung).

Gesucht:

- Ermitteln Sie mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen die unbekanntene Knotenpunktverschiebungen u_b und v_b sowie die Stablängenänderungen Δl_1 , Δl_2 und Δl_3 .
- Kontrollieren Sie die horizontale Verschiebungskomponente u_b des Knotenpunktes b mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte.
- Stellen Sie, unter Verwendung der in Punkt a berechneten Knotenpunktverschiebungen, die verformte Lage des Fachwerks qualitativ dar.



Lösung: 1-fach statisch unbestimmtes Grundsystem

1. PvV:

Unbekannte Knotenpunktverschiebungen: u_b (\leftarrow) und v_b (\downarrow)

Stabkräfte: $N_1 = \frac{EA}{5} \Delta l_1$, $N_2 = \frac{EA}{3} \Delta l_2$, $N_3 = \frac{EA}{4} \Delta l_3$

Stablängenänderungen: $\Delta l_1 = -\frac{4}{5}u_b + \frac{3}{5}v_b - \frac{4}{5}\bar{u}_a$, $\Delta l_2 = v_b$, $\Delta l_3 = -\bar{u}_a$

Virtuelle Stablängenänderungen: $\Delta \hat{l}_1 = -\frac{4}{5}\hat{u}_b + \frac{3}{5}\hat{v}_b$, $\Delta \hat{l}_2 = \hat{v}_b$, $\Delta \hat{l}_3 = 0$

\Rightarrow PvV: $-EA \left[\frac{1}{5} \left(-\frac{4}{5}u_b + \frac{3}{5}v_b - \frac{4}{5}\bar{u}_a \right) \left(-\frac{4}{5}\hat{u}_b + \frac{3}{5}\hat{v}_b \right) + \frac{1}{3}v_b \cdot \hat{v}_b + \frac{1}{4}(-\bar{u}_a) \cdot 0 \right] + \frac{3}{5}P_b \cdot \hat{u}_b + \frac{4}{5}P_b \cdot \hat{v}_b = 0$

$\hat{u}_b \left(-EA \left[\frac{16}{125}u_b - \frac{12}{125}v_b + \frac{16}{125}\bar{u}_a \right] + \frac{3}{5}P_b \right) + \hat{v}_b \left(-EA \left[-\frac{12}{125}u_b + \frac{9}{125}v_b - \frac{12}{125}\bar{u}_a + \frac{1}{3}P_b \right] + \frac{4}{5}P_b \right) = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{16}{125} & -\frac{12}{125} \\ -\frac{12}{125} & \frac{1}{3} + \frac{9}{125} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{125}\bar{u}_a + \frac{3P_b}{5EA} \\ \frac{12}{125}\bar{u}_a + \frac{4P_b}{5EA} \end{bmatrix} \Rightarrow u_b = 0,0115 \text{ m}, v_b = 0,00625 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta l_1 = -0,00625 \text{ mm}, \Delta l_2 = 0,00625 \text{ m}, \Delta l_3 = -0,001 \text{ m}$$

2. PvK: Weglassen von Stab 3

$$\sum H_b = 0 \Rightarrow \hat{N}_1 = -\frac{5}{4}\hat{B}_H$$

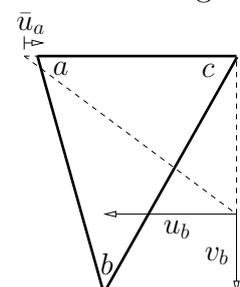
$$\sum V_b = 0 \Rightarrow \hat{N}_2 = \frac{3}{4}\hat{B}_H$$

$$\sum H_a = 0 \Rightarrow \hat{A}_H = \hat{B}_H$$

$$\Rightarrow \text{PvK: } -\left(-\frac{5}{4}\hat{B}_H\right)\Delta l_1 - \left(\frac{3}{4}\hat{B}_H\right)\Delta l_2 + u_b \cdot \hat{B}_H + \bar{u}_a (\hat{B}_H) = 0$$

$$\Rightarrow u_b = -\frac{5}{4}\Delta l_1 + \frac{3}{4}\Delta l_2 - \bar{u}_a = 0,0115 \text{ m} \checkmark$$

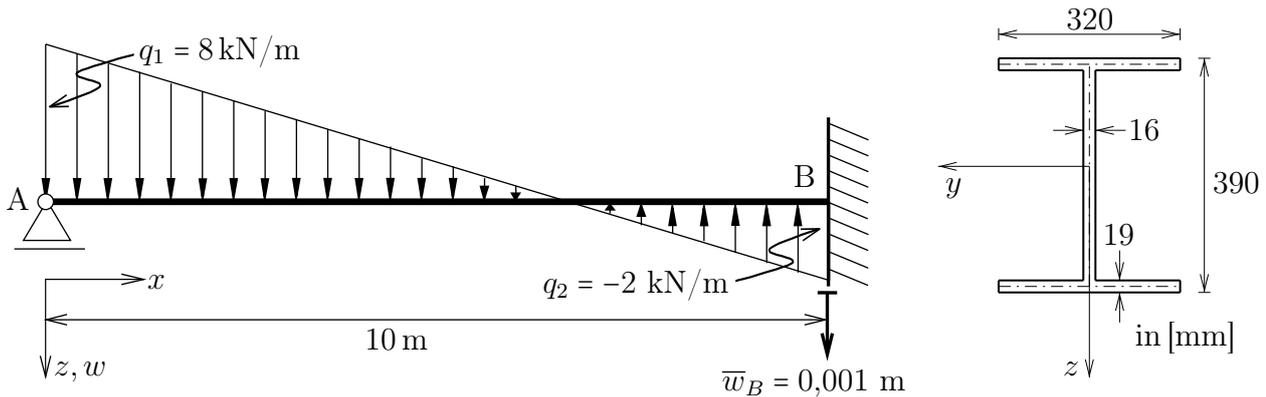
3. Verformte Lage:



2. Kolloquium WS2017/2018

1. Beispiel: Integration der Differentialbeziehungen

Angabe: Gegeben ist ein 10 m langer Träger aus Stahl mit konstantem Querschnitt, welcher durch eine linear veränderliche Streckenlast $q(x)$ und eine eingeprägte Auflagerverschiebung im Punkt B \bar{w}_B gemäß nachstehender Abbildung beansprucht wird. Für den doppelt-symmetrischen Querschnitt gilt eine Biegesteifigkeit von $EI_y = 100000 \text{ kNm}^2$.



Gesucht:

- Bestimmen Sie die Funktionen der Verläufe von Durchbiegung $w(x)$, Querschnittsdrehwinkel $\varphi(x)$, Biegemoment $M(x)$ sowie Querkraft $Q(x)$ durch Integration der Differentialbeziehungen der linearen Stabtheorie.
- Bestimmen Sie das maximale und das minimale Biegemoment M_{max} bzw. M_{min} sowie die Positionen, an denen diese Extremwerte auftreten und stellen Sie den Verlauf von $M(x)$ maßstäblich dar.
- Bestimmen Sie die maximale Durchbiegung w_{max} sowie die Position, an der sie auftritt und stellen Sie den Verlauf von $w(x)$ maßstäblich dar.
- Bestimmen Sie (bei Verwendung der Ergebnisse aus Punkt b) die betragsmäßig größte Biegenormalspannung die im gegebenen Querschnitt ($I_y = 47695 \text{ cm}^4$) auftritt.

Lösung:

a. Belastungsfunktion $q_z(x) = 8 - \frac{8-(-2)}{10} \cdot x = 8 - x$

Viermalige Integration der Differentialgleichung 4. Ordnung:

$$q_z(x) = EI_y \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = -x + 8$$

$$-Q_z(x) = EI_y \cdot \frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{x^2}{2} + 8 \cdot x + C_1$$

$$-M_y(x) = EI_y \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{x^3}{6} + 4 \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2$$

$$EI_y \cdot \varphi(x) = EI_y \cdot \frac{dw}{dx} = -\frac{x^4}{24} + \frac{4}{3} \cdot x^3 + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3$$

$$EI_y \cdot w(x) = EI_y \cdot w = -\frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{3} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4$$

Anpassung der Integrationskonstanten an die Randbedingungen:

$$M(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \text{ kNm}$$

$$w(x=0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \text{ kNm}^3$$

$$\varphi(x=l) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2750}{3} + 50 \cdot C_1 + C_3$$

$$w(x=l) = 0,001 \Rightarrow 100 = 2500 + \frac{500}{3} \cdot C_1 + 10 \cdot C_3 \Rightarrow C_1 = -\frac{203}{10} \text{ kN}, C_3 = \frac{295}{3} \text{ kNm}^2$$

Funktionen der Verläufe:

$$Q(x) = \frac{x^2}{2} - 8 \cdot x + \frac{203}{10}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{100000} \left(-\frac{x^4}{24} + \frac{4}{3} \cdot x^3 - \frac{203}{20} \cdot x^2 + \frac{295}{3} \cdot x \right)$$

$$M(x) = \frac{x^3}{6} - 4 \cdot x^2 + \frac{203}{10} \cdot x$$

$$w(x) = \frac{1}{100000} \left(-\frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{3} - \frac{203}{60} \cdot x^3 + \frac{295}{3} \cdot x \right)$$

b. Maximales und minimales Moment:

$$Q(x) = 0 \Rightarrow x_{M_{max}} = 3,16 \text{ m}$$

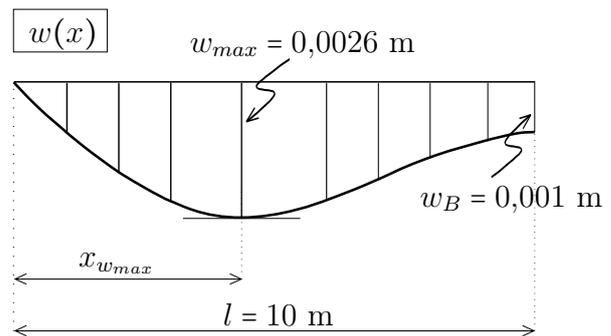
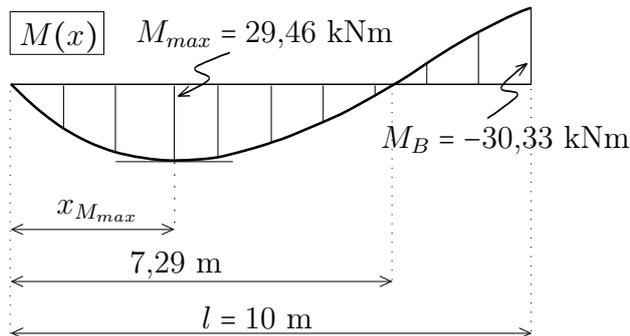
$$M_{max} = M(x = x_{M_{max}}) = 29,46 \text{ kNm}$$

$$M_{min} = M(x = 10) = -30,33 \text{ kNm}$$

c. Maximale Durchbiegung:

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow x_{w_{max}} = 4,39 \text{ m}$$

$$w_{max} = w(x = x_{w_{max}}) = 0,0026 \text{ m}$$



d. Die betragsmäßig größte Biege­normalspannung tritt an der Einspannstelle auf:

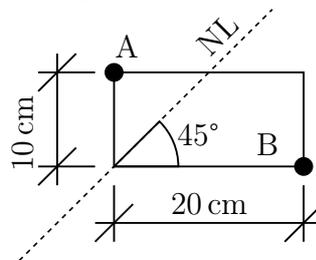
$$\sigma = \frac{M_{min}}{I_y} \cdot z_{max} = \frac{-30,33 \cdot 100}{47695} \cdot \frac{\pm 39}{2} = \pm 1,24 \text{ kN/cm}^2$$

Ersatzkolloquium WS2016/2017

1. Beispiel: Spannungen, Festigkeitskriterien, Stabtheorie

Angabe:

- a. Bei dem in der Abbildung dargestellten, auf Biegung und Normalkraft beanspruchten, Querschnitt ist die Nulllinie (NL) und die Spannung im Punkt A, $\sigma_A = 1 \text{ kN/cm}^2$, bekannt. Wie groß ist die Spannung σ_B im Punkt B gemäß linearer Stabtheorie?



- b. Beweisen oder widerlegen Sie die Existenz eines Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & q \\ 0 & q & q \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3},$$

wobei $q < 0$ ist, mithilfe der Mohr'schen Spannungskreise. Erläutern Sie die Widerlegung (falls $\boldsymbol{\sigma}$ nicht existiert) in Stichworten oder (falls $\boldsymbol{\sigma}$ existiert) bestimmen Sie grafisch σ_I , σ_{II} und σ_{III} .

- c. Berechnen Sie die hydrostatische Koordinate ξ und die radiale Koordinate $r = \sqrt{2 \cdot J_2}$ des Haigh-Westergaard'schen-Spannungsraumes, in Abhängigkeit von der Hauptspannung σ_{III} , für den Spannungszustand

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{III} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}},$$

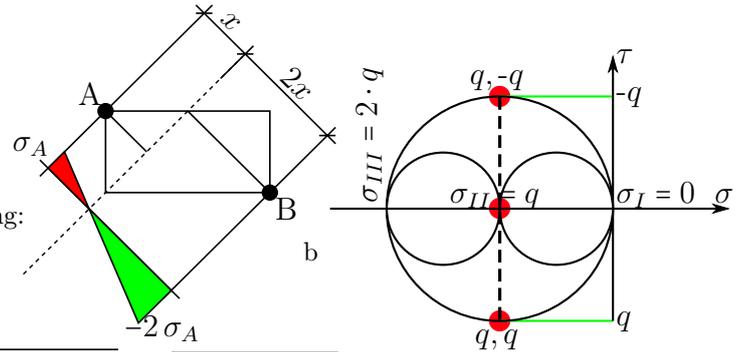
wobei $\sigma_{III} < 0$.

- d. Berechnen Sie die Hauptspannung σ_{III} , in Abhängigkeit von den Mohr-Coulomb-Parametern c und φ , für

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{III} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}},$$

wobei $\sigma_{III} < 0$.

Lösung:



a Doppleter Abstand \Rightarrow Doppelte Spannung:

$$\sigma_B = -2 \cdot \sigma_A = -2 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

c $\xi = \sigma_{III} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_{III}$

$$r = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (\frac{1}{2} \sigma_{III})^2} = \sqrt{\frac{1}{6}} \cdot |\sigma_{III}|$$

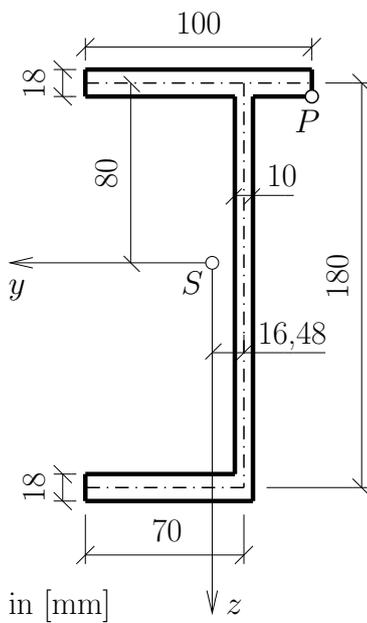
d (Annahme $f(\sigma) = 0$): $\frac{\sigma_{III}}{2} \cdot (1 + \sin(\varphi)) - \sigma_{III} \cdot (1 - \sin(\varphi)) \leq 2 \cdot c \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow \sigma_{III} \leq \frac{4 \cdot c \cdot \cos(\varphi)}{3 \sin(\varphi) - 1}$

3. Kolloquium WS2016/2017

2. Beispiel: Normalspannungen

Angabe:

Gegeben ist ein Querschnitt mit den Trägheitsmomenten $I_y = 2924,26 \text{ cm}^4$ und $I_z = 297,28 \text{ cm}^4$, welcher durch die Biegemomente $M_y = 300 \text{ kNcm}$ und $M_z = 100 \text{ kNcm}$ beansprucht wird.



Gesucht:

1. Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente, Bezugnehmend auf die Profilmittellinien, sowie den Neigungswinkel der Hauptträgheitsachsen.
2. Ermitteln Sie die Lage der Nulllinie und zeichnen Sie diese winkeltreu in der nebenstehenden Abbildung ein.
3. Markieren Sie in Ihrer Zeichnung die Stellen der Extremwerte der Biegenormalspannungen und berechnen Sie diese.
4. Überprüfen Sie rechnerisch, ob zufolge einer im Punkt P angreifenden Normalkraft, deren Wirkungslinie parallel zur x -Achse verläuft, nur Zugspannungen, nur Druckspannungen oder sowohl Druck- als auch Zugspannungen auftreten. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Hauptträgheitsmomente

$$I_{yz} = 153 \text{ cm}^4 (\text{exakte Berechnung } I_{yz} = 156 \text{ cm}^4); \quad I_\eta = 2933,14 \text{ cm}^4; \\ I_\zeta = 288,40 \text{ cm}^4; \quad \alpha = -3,32^\circ$$

2. Lage der Nulllinie

$$\tan \gamma_y = \frac{M_z}{M_y} = \frac{1}{3}; \quad k = \tan \delta_y = \frac{I_y \tan \gamma_y + I_{yz}}{I_z + I_{yz} \tan \gamma_y} = 3,238 \quad \rightarrow \quad \delta_y = 71,84^\circ \\ \Rightarrow \quad z = k \cdot y = 3,238 \cdot y \quad (d = 0)$$

3. Extremwerte der Biegenormalspannungen

$$\frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 0,1235 \text{ kN/cm}^3; \quad \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 0,4 \text{ kN/cm}^3$$

$$\sigma_{\max}^{\text{Druck}}(5,352 / -8,9) = 0,1235 \cdot z - 0,4 \cdot y = -3,24 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\max}^{\text{Zug}}(-2,148 / 10,9) = 2,21 \text{ kN/cm}^2$$

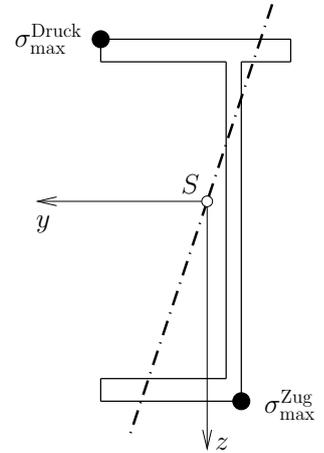
4. Nulllinie zufolge Normalkraft in P

$$i_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}} = 7,769 \text{ cm}; \quad i_\zeta = \sqrt{\frac{I_\zeta}{A}} = 2,436 \text{ cm}$$

$$\bar{\eta}_P = -4,229 \text{ cm}; \quad \bar{\zeta}_P = -7,357 \text{ cm}$$

$$\zeta_{P,1}^{\text{NL}} = 0; \quad \eta_{P,1}^{\text{NL}} = -\frac{i_\zeta^2}{\bar{\eta}_P} = 1,403 \text{ cm}; \quad \eta_{P,2}^{\text{NL}} = 0; \quad \zeta_{P,2}^{\text{NL}} = -\frac{i_\eta^2}{\bar{\zeta}_P} = 8,203 \text{ cm};$$

Nachdem die Nulllinie zufolge der im Punkt P Normalkraft den Querschnitt schneidet, entstehen sowohl Druck- als auch Zugspannungen.

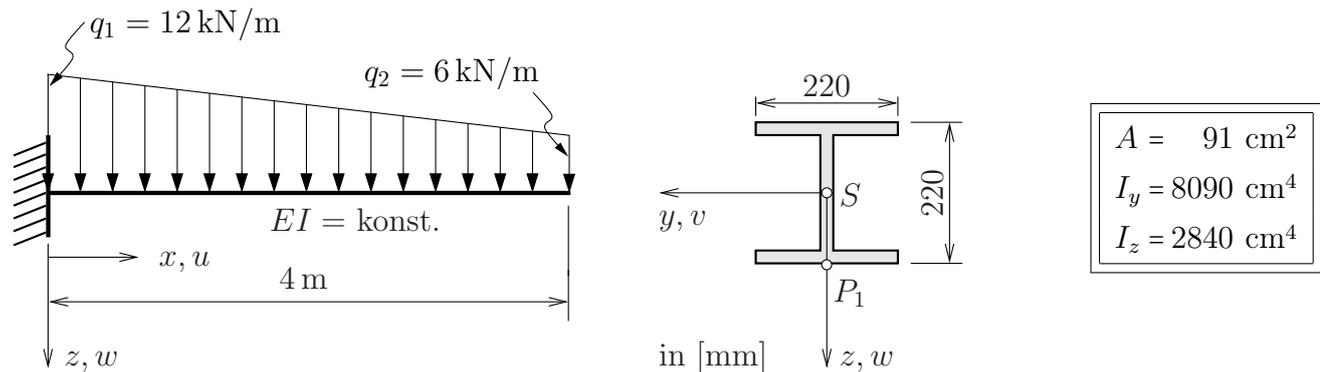


3. Kolloquium WS2016/2017

3. Beispiel: Integration der Differentialbeziehungen

Angabe:

Gegeben ist ein 4 m langer Kragträger aus Stahl (Elastizitätsmodul $E = 210\,000\text{ MN/m}^2$) mit konstantem Querschnitt, welcher durch eine linear veränderliche Streckenlast gemäß nachstehender Abbildung beansprucht wird. Der doppelt symmetrische Querschnitt besteht aus einem I-Profil des Typs HE-B 220, dessen Querschnittswerte der Tabelle zu entnehmen sind.



Gesucht:

- Bestimmen Sie die Biegelinie $w(x)$ durch Integration der Differentialbeziehungen der linearen Stabtheorie und stellen Sie den Verlauf von $w(x)$ maßstäblich dar.
- Berechnen Sie, unter Zugrundelegung der linearisierten Elastizitätstheorie, die Komponenten des Verschiebungsvektors (u, v, w) für zwei Punkte am freien Kragarmende, nämlich für den Schwerpunkt S und für den im Querschnitt markierten Punkt P_1 .
- Welche Auswirkung hat eine Verdopplung der Belastung auf die Durchbiegung? Wird diese mehr als, weniger als oder genau doppelt so groß? Begründen Sie Ihre Antwort.

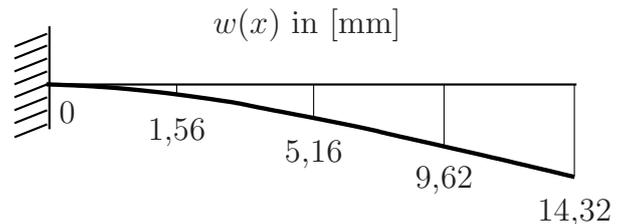
Lösung:

1. Biegelinie

$$\begin{aligned}q_z(x) &= EI_y \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{3}{2} \cdot x + 12 \\-Q_z(x) &= EI_y \cdot \frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + 12 \cdot x + C_1 \\-M_y(x) &= EI_y \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{1}{4} \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \\EI_y \cdot \varphi(x) &= EI_y \cdot \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{16} \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 + C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3 \\EI_y \cdot w(x) &= EI_y \cdot w = -\frac{1}{80} \cdot x^5 + \frac{1}{2} \cdot x^4 + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4\end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}w(x=0) &= 0 \rightarrow C_4 = 0 \\ \varphi(x=0) &= 0 \rightarrow C_3 = 0 \\ Q_z(x=4) &= 0 \rightarrow C_1 = -36 \text{ kN} \\ M_y(x=4) &= 0 \rightarrow C_2 = 64 \text{ kNm}\end{aligned}$$



$$E \cdot I_y = 210\,000 \cdot 10^3 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 8090 \text{ cm}^4 \cdot \left(\frac{0,01 \text{ m}}{1 \text{ cm}}\right)^4 = 16\,989 \text{ kNm}^2$$

$$\rightarrow w(x) = \frac{1}{16\,989 \text{ kNm}^2} \left(-\frac{1}{80} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot x^5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot x^4 - 6 \text{ kN} \cdot x^3 + 32 \text{ kNm} \cdot x^2 \right)$$

2. Verschiebungen am Kragarmende

$$\begin{aligned}w(x=4) &= 14,32 \text{ mm} \rightarrow \mathbf{u}_S = (u_S / v_S / w_S) = (0 / 0 / 14,32) \text{ mm} \\ u_{P_1} &= -\varphi(x=4) \cdot \frac{h}{2} = -0,518 \text{ mm} \rightarrow \mathbf{u}_{P_1} = (u_{P_1} / v_{P_1} / w_{P_1}) = (-0,518 / 0 / 14,32) \text{ mm}\end{aligned}$$

3. Auswirkungen einer Verdopplung der Belastung

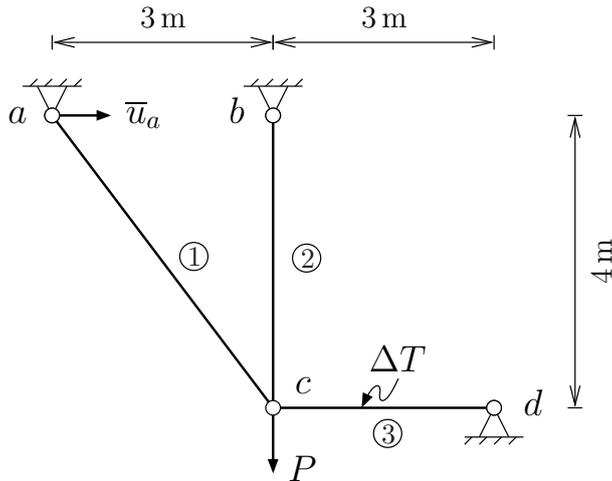
Bei Verdopplung der Belastung verdoppelt sich auch die Durchbiegung, da die Belastung linear in die Berechnung eingeht.

3. Kolloquium WS2015/2016

2. Beispiel: Virtuelle Arbeitsprinzipien für ideale Fachwerke

Angabe:

Gegeben: Ein ideales Fachwerk ist durch die vertikale Kraft $P = 150 \text{ kN}$ belastet. Der Stab ③ erfährt zusätzlich eine Erwärmung um $\Delta T = 10 \text{ K}$. Im Auflager a ist die Verschiebung $\bar{u}_a = 5 \text{ mm}$ eingepreßt. Alle Stäbe weisen die Dehnsteifigkeit $E \cdot A = 100\,000 \text{ kN}$ und den Temperatureausdehnungskoeffizienten $\alpha_T = 5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ auf.



Gesucht:

- Bestimmen Sie die Stabkräfte zufolge der gegebenen Belastung mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen.
- Überprüfen Sie die horizontale Knotenpunktverschiebung im Punkt c mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte unter Anwendung des Reduktionssatzes der Baustatik.

Lösung:

1. Bestimmung der Stabkräfte mittels PvV

$$N_1 = E \cdot A \cdot \frac{\Delta l_1}{5}; N_2 = E \cdot A \cdot \frac{\Delta l_2}{4}; N_3 = E \cdot A \cdot \left(\frac{\Delta l_3}{3} - \alpha_T \cdot \Delta T \right) \text{ mit } \Delta l_1 = \frac{4}{5} \cdot v_c - \frac{3}{5} \cdot u_c - \frac{3}{5} \cdot \bar{u}_a; \Delta l_2 = v_c; \Delta l_3 = u_c$$

$$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5m} \cdot v_c - \frac{3}{5m} \cdot u_c - \frac{3}{5m} \cdot \bar{u}_a \right) \cdot \left(\frac{4}{5m} \cdot \hat{v}_c - \frac{3}{5m} \cdot \hat{u}_c \right) + \frac{1}{4m} \cdot v_c \cdot \hat{v}_c + \left(\frac{u_c}{3m} - 5 \cdot 10^{-4} \right) \cdot \hat{u}_c - \frac{150}{100\,000} \cdot \hat{v}_c = 0$$

$$\begin{bmatrix} -12/125 & 189/500 \\ 152/375 & -12/125 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_c \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99/50\,000 \\ 7/50\,000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} u_c &= \frac{27}{16000} = 1,688 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ v_c &= \frac{17}{3000} = 5,666 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\Delta l_1 = 5,208 \cdot 10^{-4} \text{ m}; \Delta l_2 = 5,666 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \Delta l_3 = 1,688 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Rightarrow N_1 = 10,42 \text{ kN}; N_2 = 141,67 \text{ kN}; N_3 = 6,25 \text{ kN}$$

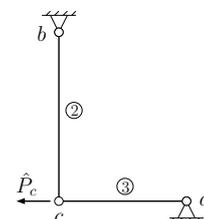
2. Kontrolle der horizontalen Knotenpunktverschiebung mittels PvK

Der Reduktionssatz der Baustatik liefert einen Dreigelenksbogen.

Rundschnitt um den Knoten c : $\Sigma \hat{H}_c = 0$: $N_3 = \hat{P}_c$, $\Sigma \hat{V}_c = 0$: $N_2 = 0$

0

$$\Rightarrow -\hat{P}_c \cdot \Delta l_3 + \hat{P}_c \cdot u_c = 0 \Rightarrow u_c = \Delta l_3 = 1,688 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



3. Kolloquium WS2015/2016

3. Beispiel: Biegenormalspannungen und Kern

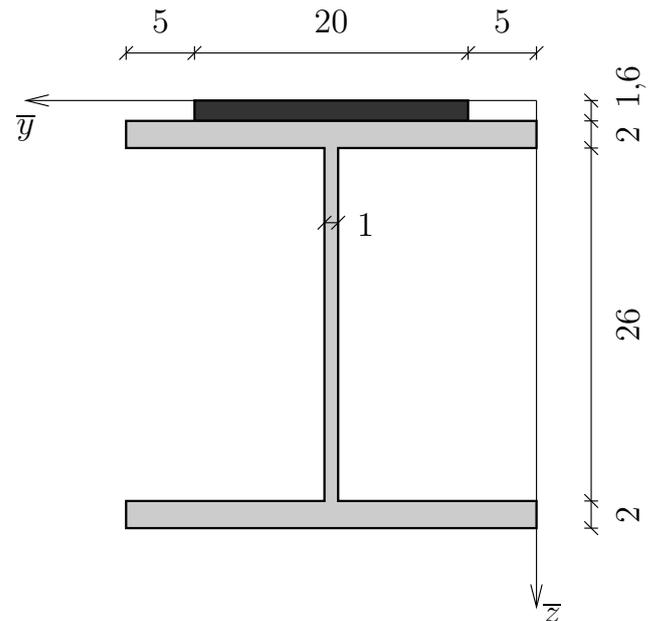
Angabe:

Gegeben: Der Querschnitt laut Abbildung ist durch die Biegemomente $M_y = 6400 \text{ kNcm}$ und $M_z = 8000 \text{ kNcm}$ beansprucht.

Hinweis: Der Querschnitt ist im Maßstab 1:5 dargestellt.

Gesucht:

1. Bestimmen Sie die den Schwerpunkt und die Hauptträgheitsmomente.
2. Ermitteln Sie die Lage der Nulllinie und zeichnen Sie diese in der nebenstehenden Abbildung ein.
3. Markieren Sie in der Zeichnung die Stellen der betragsmäßig größten Biegenormalspannungen (Druck und Zug) und berechnen Sie diese.
4. Ermitteln Sie den Kern des Querschnitts und zeichnen Sie diesen in der nebenstehenden Abbildung ein.



in [cm]

Lösung:

1. Bestimmung des Schwerpunkts und der Hauptträgheitsmomente

$$\bar{y}_S = 15 \text{ cm}; \quad \bar{z}_S = 13,76 \text{ cm}; \quad I_y = 31\,584 \text{ cm}^4; \quad I_z = 10\,069 \text{ cm}^4$$

2. Bestimmung der Lage der Nulllinie

$$\tan \gamma_y = \frac{M_z}{M_y} = \frac{8000}{6400} = 1,25; \quad d = 0; \quad k = \tan \delta_y = \frac{I_y \cdot \tan \gamma_y}{I_z} = 3,92 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow z = k \cdot y = 3,92 \cdot y \quad (\delta_y = 75,6^\circ)$$

3. Maximale Biegenormalspannungen (Zug und Druck)

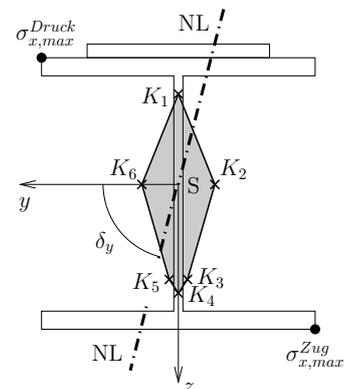
$$\sigma_{x,max}^{Druck}(15/-12,16) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y = -14,38 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{x,max}^{Zug}(-15/17,84) = 15,53 \text{ kN/cm}^2$$

4. Bestimmung des Kerns

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 13,32 \text{ cm}; \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 7,52 \text{ cm}$$

$$K_1(0/-9,94); \quad K_2(-3,77/0); \quad K_3(-1,07/10,50); \\ K_4(0/12,89); \quad K_5(1,07/10,50); \quad K_6(3,77/0) \quad \text{in [cm]}$$



3. Kolloquium WS2014/2015

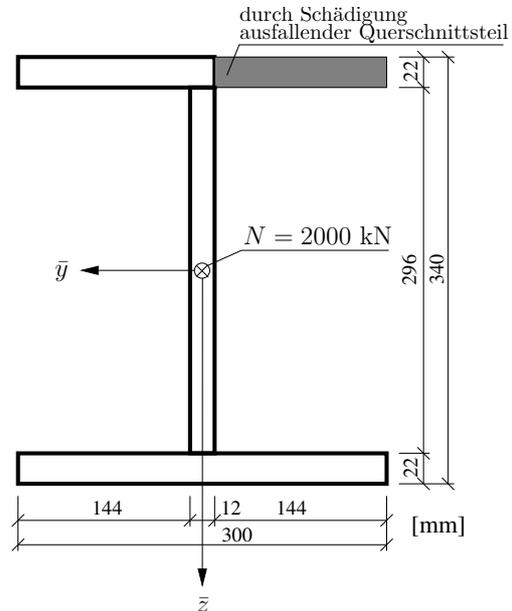
1. Beispiel: Normalspannungen

Angabe:

Gegeben ist der Querschnitt eines Fachwerkstabes, der zentrisch durch eine Zugkraft $N = 2000 \text{ kN}$ belastet wird. Durch Korrosion wird der Querschnitt derart geschädigt, dass der rechte obere Flanschteil ausfällt, woraus eine Reduktion der Querschnittsfläche resultiert. Es wird die Annahme getroffen, dass der Angriffspunkt der Normalkraft im geschädigten Querschnitt unverändert im Schwerpunkt des ungeschädigten Querschnitts liegt ($\bar{y} = \bar{z} = 0$).

Querschnittswerte des *ungeschädigten* Querschnitts:

$$\begin{aligned} A &= 167,52 \text{ cm}^2 \\ I_{\bar{y}} &= 36017,59 \text{ cm}^4 \\ I_{\bar{z}} &= 9904,26 \text{ cm}^4 \\ I_{\bar{y}\bar{z}} &= 0,00 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$



Gesucht:

- Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunktes des geschädigten Querschnitts sowie dessen Hauptträgheitsmomente.
- Ermitteln Sie (für den geschädigten Querschnitt) die Lage der Nulllinie infolge der einwirkenden Normalkraft und stellen Sie diese in einer maßstäblichen Skizze grafisch dar.
- Berechnen Sie (für den geschädigten Querschnitt) die Extremwerte der resultierenden Normalspannungsverteilung und kennzeichnen Sie die Positionen, an denen sie auftreten.
- Um wieviel Prozent ändert sich die maximale Zugspannung des Querschnitts durch die Schädigung (bezogen auf den ungeschädigten Querschnitt)?

Lösung:

- Schwerpunkt und Hauptträgheitsmomente

$$\begin{aligned} \bar{y}_S &= 1,82 \text{ cm}, \quad \bar{z}_S = 3,71 \text{ cm} \\ I_y &= 26128 \text{ cm}^4, \quad I_z = 6980 \text{ cm}^4, \quad I_{yz} = -4845 \text{ cm}^4 \\ I_\eta &= 27284 \text{ cm}^4, \quad I_\zeta = 5824 \text{ cm}^4 \quad \text{mit} \quad \alpha = 13,42^\circ \end{aligned}$$

- Nulllinie

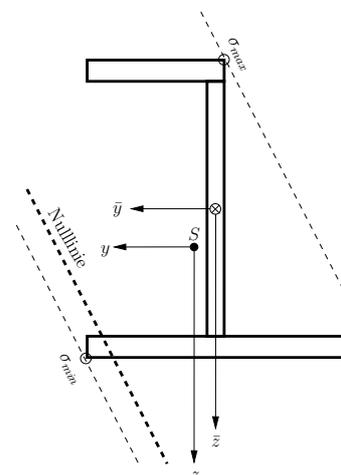
$$\begin{aligned} N &= 2000 \text{ kN}, \quad M_y = -7416,3 \text{ kNcm}, \\ M_z &= 3638,2 \text{ kNcm} \\ k &= -1,89, \quad d = -33,71 \text{ cm} \rightarrow z = -1,89 \cdot y + 33,71 \\ \sigma_x(y, z) &= 14,72 - 0,43 \cdot z - 0,82 \cdot y \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

- Spannungsextremwerte

$$\sigma_{\min} = -1,95 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma_{\max} = 25,76 \text{ kN/cm}^2$$

- Spannungsänderung durch Schädigung

Die maximale Zugspannung erhöht sich auf 216 %.



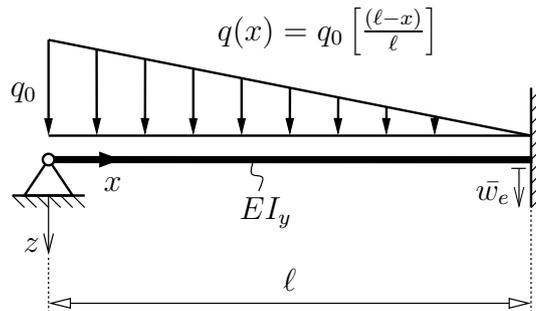
3. Kolloquium WS2014/2015

3. Beispiel: Biegebalken

Angabe:

Gegeben ist ein Balken mit Abmessungen, Art der Lagerung und Belastung gemäß der nachstehenden Abbildung. Weiters weist der Balken eine eingepreßte Vertikalverschiebung \bar{w}_e an der Einspannstelle auf.

$$\begin{aligned} \ell &= 8,00 \text{ m} \\ \bar{w}_e &= 2,00 \text{ cm} \\ q_0 &= 20,00 \text{ kN/m} \\ E &= 21000,00 \text{ kN/cm}^2 \\ I_y &= 8000,00 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$



Gesucht:

1. Ermitteln Sie die Funktion der Biegelinie $w(x)$ zufolge der gegebenen Belastung durch Integration der Differentialbeziehungen der Balkentheorie.
2. Berechnen Sie die Stelle x , an welcher das maximale Biegemoment M_y auftritt und werten Sie die Funktion $M_y(x)$ an dieser Stelle aus (numerisch).

Lösung:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) = q_0 \left[\frac{(\ell-x)}{\ell} \right] = q_0 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)$$

$$EI \frac{d^3 w}{dx^3} = -Q_z(x) = q_0 \left(x - \frac{x^2}{2\ell} \right) + C_1$$

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y(x) = q_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6\ell} \right) + C_1 x + C_2$$

$$EI \frac{dw}{dx} = EI \varphi(x) = q_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24\ell} \right) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI w(x) = q_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120\ell} \right) + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

$$C_1 = -\frac{11q_0\ell}{40} - \frac{3\bar{w}_e EI}{\ell^3}, C_3 = \frac{q_0\ell^3}{80} + \frac{3\bar{w}_e EI}{2\ell} \rightarrow w(x) = \frac{q_0}{EI} \left[\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120\ell} - \frac{11x^3\ell}{240} + \frac{x\ell^3}{80} \right] + \bar{w}_e \left[\frac{3x}{2\ell} - \frac{3x^3}{6\ell^3} \right]$$

An der Stelle des maximalen Biegemoments gilt

$$-Q_z = q_0 x - q_0 \frac{x^2}{2\ell} - q_0 \frac{11\ell}{40} - \frac{3\bar{w}_e EI}{\ell^3} = 0 \rightarrow x = 278 \text{ cm}$$

$$-M_y(x) = q_0 \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6\ell} \right) - q_0 \cdot \frac{11\ell x}{40} - \frac{3\bar{w}_e EI x}{\ell^3} \rightarrow M_y(x = 278 \text{ cm}) = 5946 \text{ kNcm}$$

Randbedingungen:

$$w(x=0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$M_y(x=0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$w(x=\ell) = \bar{w}_e$$

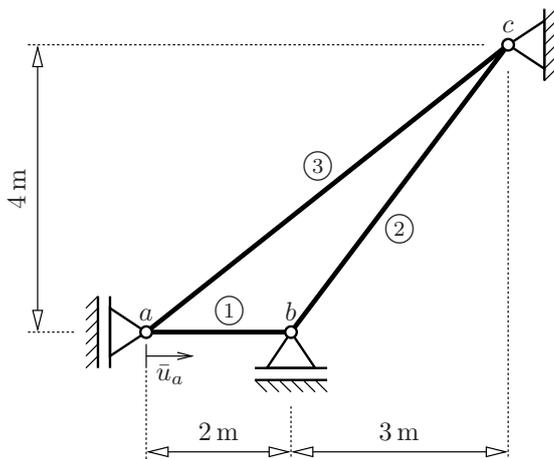
$$\varphi(x=\ell) = 0$$

Ersatzkolloquium WS2013/2014

3. Beispiel: Prinzipien der virtuellen Arbeiten

Angabe:

Gegeben ist ein ideales Fachwerk. Sämtliche Fachwerksstäbe weisen einen Elastizitätsmodul E , eine Querschnittsfläche A und einen linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten α_T auf (siehe Abbildung). Dem Auflager a ist eine Verschiebung $\bar{u}_a = 1 \text{ mm}$ aufgeprägt und das gesamte Fachwerk erfährt eine Erwärmung um 20 K .



$$E = 5000 \text{ kN/cm}^2$$

$$A = 12 \text{ cm}^2$$

$$\alpha_T = 3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

Gesucht:

1. Ermitteln Sie mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen die unbekanntene Knotenpunktverschiebungen und Stablängenänderungen.
2. Kontrollieren Sie die horizontale Verschiebungskomponente des Knotenpunktes b mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte.

Lösung:

Unbekannte Knotenpunktverschiebungen: u_b (\rightarrow) und v_a (\uparrow)

$$\text{Stabkräfte: } N_1 = \frac{EA}{2\text{m}} \Delta l_1 - EA\alpha_T \Delta T, \quad N_2 = \frac{EA}{5\text{m}} \Delta l_2 - EA\alpha_T \Delta T, \quad N_3 = \frac{EA}{\sqrt{41}\text{m}} \Delta l_3 - EA\alpha_T \Delta T$$

$$\text{Stablängenänderungen: } \Delta l_1 = -\bar{u}_a + u_b, \quad \Delta l_2 = -\frac{3}{5}u_b, \quad \Delta l_3 = -\frac{5}{\sqrt{41}}\bar{u}_a - \frac{4}{\sqrt{41}}v_a$$

$$\text{Virtuelle Stablängenänderungen: } \Delta \hat{l}_1 = \hat{u}_b, \quad \Delta \hat{l}_2 = -\frac{3}{5}\hat{u}_b, \quad \Delta \hat{l}_3 = -\frac{4}{\sqrt{41}}\hat{v}_a$$

$$\Rightarrow P \cdot v \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{143}{250\text{m}} & 0 \\ 0 & \frac{16}{41\text{m}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_b \\ v_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\alpha_T \Delta T + \frac{1}{2\text{m}}\bar{u}_a \\ -4\alpha_T \Delta T - \frac{20}{41\text{m}}\bar{u}_a \end{bmatrix} \Rightarrow u_b = 1,2937 \text{ mm}, \quad v_a = -7,4 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \Delta l_1 = 0,2937 \text{ mm}, \quad \Delta l_2 = -0,7762 \text{ mm}, \quad \Delta l_3 = 3,8419 \text{ mm} \text{ bzw. } N_1 = -27,1888 \text{ kN}, \quad N_2 = -45,3144 \text{ kN}, \quad N_3 = 0$$

$$\text{PvK: 1-fach statisch unbestimmtes Grundsystem, Weglassen von Stab 2: } \hat{N}_1 = \hat{B}_H, \quad \hat{N}_3 = 0, \quad \hat{A}_H = -\hat{B}_H \Rightarrow -\hat{B}_H \delta l_1 + \bar{u}_a \cdot (-\hat{B}_H) + u_b \cdot \hat{B}_H = 0 \Rightarrow u_b = \Delta l_1 + \bar{u}_a = 1,2937 \text{ mm} \checkmark$$

3. Kolloquium WS2013/2014

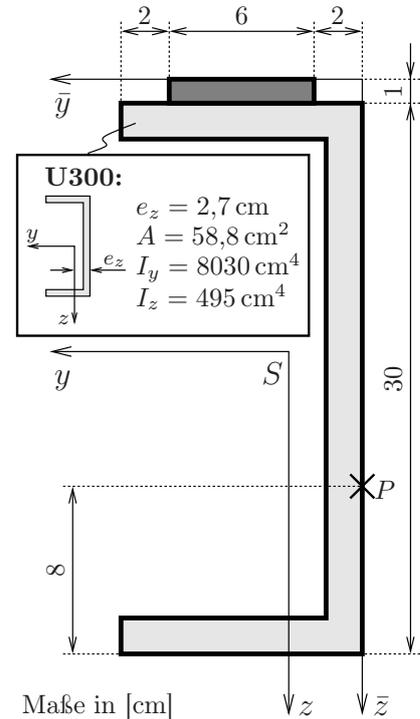
1. Beispiel: Normalspannungen

Angabe:
Gegeben ist ein zweiteiliger Querschnitt gemäß Abbildung. Die Querschnittswerte des Profils U300 sind ebenfalls der Abbildung zu entnehmen. Im Folgenden sind zwei voneinander unabhängige Lastfälle zu betrachten:

Lastfall I: $N = 0$
 $M_y = 800 \text{ kNcm}$
 $M_z = -190 \text{ kNcm}$

Lastfall II: $N = -80 \text{ kN}$

Anmerkungen: Der Querschnitt ist nicht maßstäblich dargestellt; der Schwerpunkt ist nicht maßstäblich eingezeichnet.



Gesucht:

1. Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente des gegebenen Querschnitts.
2. Ermitteln Sie für Lastfall I die Lage der Nulllinie und stellen Sie diese in einer maßstäblichen Skizze grafisch dar.
3. Berechnen Sie für Lastfall I die Extremwerte der resultierenden Biegenormalspannungsverteilung und kennzeichnen Sie deren Position auf dem Angabeblatt.
4. Es ist nun Lastfall II zu betrachten, wobei die Wirkungslinie der gegebenen Normalkraft durch den Punkt P verläuft (parallel zur x -Achse). Treten zufolge dieser Belastung nur Druckspannungen im Querschnitt auf, nur Zugspannungen, oder treten sowohl Druck- als auch Zugspannungen auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

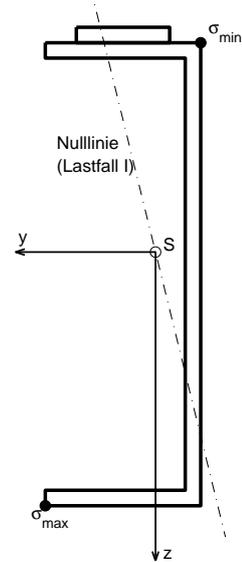
Koordinaten des Schwerpunktes: $\bar{y}_S = 2,91 \text{ cm}$, $\bar{z}_S = 14,56 \text{ cm}$

Flächenmomente 2. Ordnung: $I_y = 9338,53 \text{ cm}^4$, $I_z = 541,80 \text{ cm}^4$,
 $I_{yz} = -194,09 \text{ cm}^4$ bzw. $I_\eta = 9342,81 \text{ cm}^4$, $I_\zeta = 537,52 \text{ cm}^4$ mit $\alpha = 1,26^\circ$

Nulllinie für Lastfall I: $k = -4,20$, $\delta_y = -76,30^\circ$

Spannungsextremwerte für Lastfall I: $\sigma_{\min} = -2,39 \text{ kN/cm}^2$,
 $\sigma_{\max} = 4,26 \text{ kN/cm}^2$

Spannungsverteilung für Lastfall II: Koordinaten des Punktes P bezüglich der Hauptachsen mittels Transformationsmatrix: $\eta_P = y_P \cos \alpha + z_P \sin \alpha = -2,73 \text{ cm}$ und $\zeta_P = -y_P \sin \alpha + z_P \cos \alpha = 8,50 \text{ cm}$; Trägheitshaupttradien: $i_\eta = 12,01 \text{ cm}$ und $i_\zeta = 2,88 \text{ cm}$; Koordinaten der Schnittpunkte der entsprechenden Nulllinie mit den Hauptachsen: $\eta_P^{\text{NL}} = -\frac{(i_\zeta)^2}{\eta_P} = 3,04 \text{ cm}$ und $\zeta_P^{\text{NL}} = -\frac{(i_\eta)^2}{\zeta_P} = -16,97 \text{ cm}$ → NL zufolge Normalkraft in P schneidet Querschnitt → P liegt außerhalb des Kerns des Querschnitts → es treten sowohl Zug- als auch Druckspannungen auf

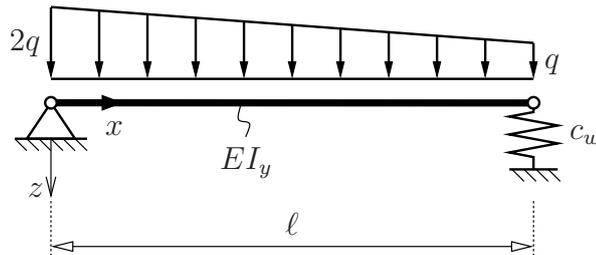


3. Kolloquium WS2013/2014

3. Beispiel: Biegelinie

Angabe:

Gegeben ist ein Balken mit Abmessungen und Belastung gemäß der nachstehenden Abbildung. Der Balken weist eine Biegesteifigkeit EI_y auf und ist einseitig elastisch gestützt, mit der Federkonstante c_w . Weiters ist der gegebene Balken als schubstarr anzunehmen und der Temperaturunterschied zwischen Ober- und Unterseite des Balkens beträgt $\Delta T = 0$.



Gesucht:

1. Ermitteln Sie die Biegelinie $w(x)$ zufolge der gegebenen Belastung durch Integration der Differentialbeziehungen der Balkentheorie.
2. Berechnen Sie die Stelle x , an welcher das maximale Biegemoment M_y auftritt, und werten Sie die Funktion $M_y(x)$ an dieser Stelle aus.

Hinweis: Die Lösung einer allgemeinen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, mit $a \neq 0$, lautet $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

Lösung:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) = q\left(2 - \frac{x}{\ell}\right)$$

$$EI \frac{d^3 w}{dx^3} = -Q_z(x) = q\left(2x - \frac{x^2}{2\ell}\right) + C_1$$

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y(x) = q\left(x^2 - \frac{x^3}{6\ell}\right) + C_1 x + C_2$$

$$EI \frac{dw}{dx} = EI \varphi(x) = q\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24\ell}\right) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI w(x) = q\left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120\ell}\right) + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} w(x=0) &= 0 && \rightarrow C_4 = 0 \\ M_y(x=0) &= 0 && \rightarrow C_2 = 0 \\ M_y(x=\ell) &= 0 && \rightarrow C_1 = -\frac{5q\ell}{6} \\ Q_z(x=\ell) &= -c_w w(x=\ell) && \rightarrow C_3 = \frac{2EIq}{3c_w} + \frac{23q\ell^3}{360} \end{aligned}$$

$$\rightarrow w(x) = \frac{q}{EI} \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120\ell} - \frac{5x^3\ell}{36} + \left(\frac{2EIq}{3c_w} + \frac{23q\ell^3}{360} \right) \cdot x \right]$$

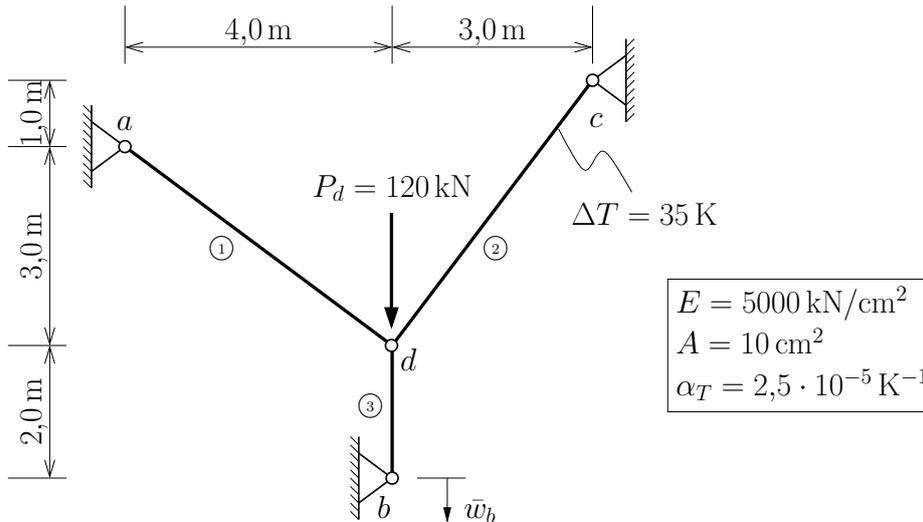
An der Stelle des maximalen Biegemoments gilt $Q_z = q\left(2x - \frac{x^2}{2\ell}\right) - \frac{5q\ell}{6} = 0 \rightarrow x(M_{\max}) = \left(2 - \sqrt{\frac{7}{3}}\right)\ell = 0,4725\ell \rightarrow M_{y,\max} = \left(1 - \frac{7\sqrt{21}}{27}\right)q\ell^2 = 0,1881 q\ell^2$

3. Kolloquium WS2012/2013

3. Beispiel: Prinzipien der virtuellen Arbeiten

Angabe:

Gegeben ist ein ideales Fachwerk. Die Fachwerkstäbe weisen einen Elastizitätsmodul E , eine Querschnittsfläche A und einen linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten α_T auf (siehe Abbildung). Das Fachwerk ist durch eine im Knotenpunkt d angreifende Einzellast P_d belastet. Weiters erfährt Stab ② eine Erwärmung um $\Delta T = 35 \text{ K}$ und der Knoten b eine eingeprägte vertikale Verschiebung $\bar{w}_b = 3 \text{ mm}$.



Gesucht:

1. Ermitteln Sie mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen alle Knotenpunktverschiebungen und Stabkräfte.
2. Kontrollieren Sie die vertikale Verschiebungskomponente des Knotenpunkts d mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte.

Lösung:

Das Fachwerk besitzt 2 Freiheitsgrade: u_d (\leftarrow) und v_d (\downarrow)

$$N_1 = EA \frac{\Delta l_1}{5}, N_2 = EA \left(\frac{\Delta l_2}{5} - \alpha_T \Delta T \right), N_3 = EA \frac{\Delta l_3}{2}$$

$$\Delta l_1 = -\frac{4}{5}u_d + \frac{3}{5}v_d, \Delta l_2 = \frac{3}{5}u_d + \frac{4}{5}v_d, \Delta l_3 = -v_d + \bar{w}_b$$

Durch Einsetzen ins PvV erhält man das folgende Gleichungssystem in u_d und v_d :

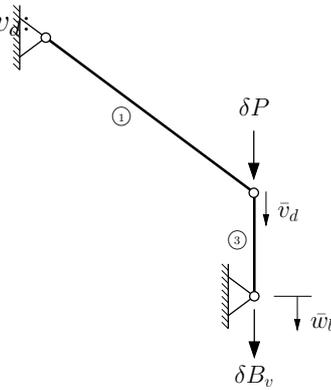
$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \cdot u_d &= \frac{3}{5} \alpha_T \Delta T \\ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) \cdot v_d &= \frac{4}{5} \alpha_T \Delta T + \frac{1}{2} \bar{w}_b + \frac{120}{EA} \end{aligned}$$

mit der Lösung: $u_d = 2,625 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $v_d = 6,571 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Daraus ergeben sich für die Stabkräfte: $N_1 = 18,43 \text{ kN}$, $N_2 = 24,57 \text{ kN}$, $N_3 = -89,29 \text{ kN}$.

Mit $\delta N_1 = \delta N_2 = 0$, $\delta N_3 = -\delta P$, $\delta B_v = -\delta P$ und durch Anwendung des PvK am reduzierten System erhält man $v_d = \bar{w}_b - \Delta l_3 = 6,571 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

reduziertes System zur Bestimmung von v_d



2. Kolloquium WS2012/2013

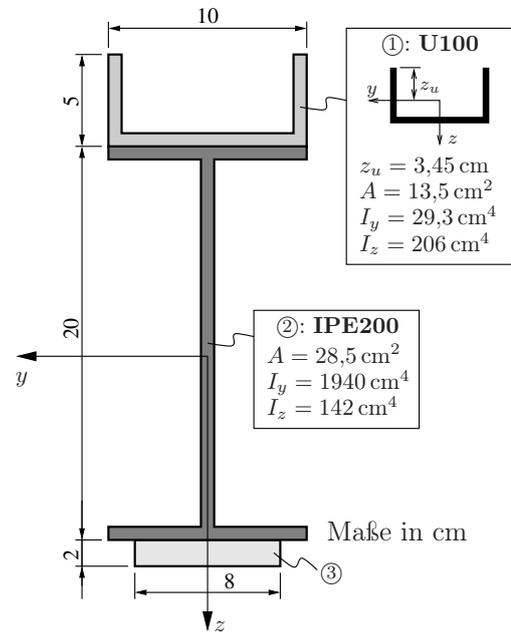
3. Beispiel: Querschnitt unter Normalkraftbeanspruchung

Angabe:

Gegeben ist ein dreiteiliger Querschnitt gemäß Abbildung. Die Querschnittswerte für die Querschnittsteile ① und ② sind in der Abbildung gegeben. Der Querschnitt ist belastet durch eine exzentrisch angreifende Normalkraft $N = -200 \text{ kN}$, wodurch die Biegemomente $M_y = 1400 \text{ kNcm}$ und $M_z = 1000 \text{ kNcm}$ hervorgerufen werden.

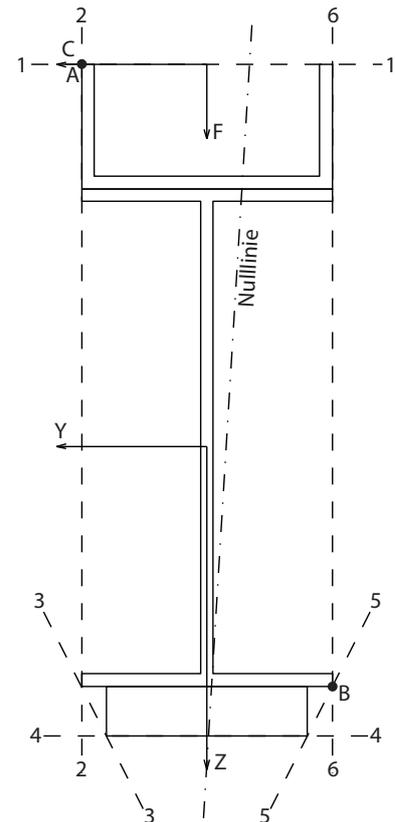
Gesucht:

1. Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente des gegebenen Querschnitts.
2. Berechnen Sie die Lage der Nulllinie und stellen Sie diese graphisch (maßstäblich!) dar.
3. Ermitteln Sie die Extremwerte der Normalspannungen und geben Sie deren Lage an.
4. Stellen Sie jene Tangenten an den Querschnitt graphisch dar, die für die Ermittlung des Querschnittskerns notwendig sind.



Lösung:

- Schwerpunkt: $\bar{y}_S = 0$, $\bar{z}_S = 15,35 \text{ cm}$,
- Hauptträgheitsmomente: $I_\eta (= I_y) = 5704,64 \text{ cm}^4$,
 $I_\zeta (= I_z) = 433,33 \text{ cm}^4$, $I_{\eta\zeta} (= I_{yz}) = 0$
- Nulllinie: $k = 9,40$, $d = 14,05 \text{ cm}$
- Extremwerte: $\sigma_{x,A} = -18,75 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_{x,B} = 10,46 \text{ kN/cm}^2$
- Querschnittskern: Tangenten 1-1 bis 4-4 notwendig, Tangenten 5-5 und 6-6 nicht notwendig (symmetrischer Querschnitt)



3. Kolloquium WS2011/2012

3. Beispiel: Prinzipien der virtuellen Arbeiten

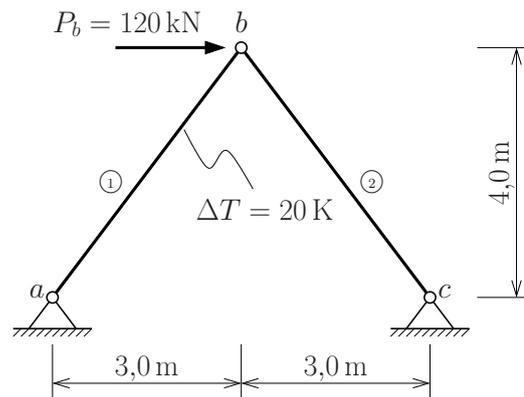
Angabe:

Gegeben ist ein ideales Fachwerk. Die Fachwerkstäbe weisen einen Elastizitätsmodul E , eine Querschnittsfläche A und einen linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten α_T auf (siehe Abbildung). Das Fachwerk ist durch eine im Knotenpunkt b angreifende Einzellast P_b belastet. Weiters erfährt Stab ① eine Erwärmung um $\Delta T = 20$ K.

$$E = 5000 \text{ kN/cm}^2$$

$$A = 10 \text{ cm}^2$$

$$\alpha_T = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$



Gesucht:

1. Ermitteln Sie mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen alle Knotenpunktverschiebungen und Stabkräfte.
2. Kontrollieren Sie die vertikale Verschiebungskomponente des Knotenpunktes b mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte.

Lösung:

Freiheitsgrade in den Knotenpunkten: u_b (\rightarrow) and v_b (\uparrow), Knoten a und c sind unverschieblich

$$\text{PvV: } -\left[\frac{EA}{5}\left(\frac{4}{5}v_b + \frac{3}{5}u_b\right) - EA\alpha_T\Delta T\right]\left(\frac{4}{5}\delta v_b + \frac{3}{5}\delta u_b\right) - \frac{EA}{5}\left(\frac{4}{5}v_b - \frac{3}{5}u_b\right)\left(\frac{4}{5}\delta v_b - \delta\frac{3}{5}u_b\right) + P_b\delta u_b = 0$$

$$\Rightarrow u_b = \frac{125}{18}\left(\frac{3}{5}\alpha_T\Delta T + \frac{P_b}{EA}\right) = 0,01875 \text{ m} = 1,875 \text{ cm}, v_b = \frac{125}{32} \cdot \frac{4}{5}\alpha_T\Delta T = 0,0015625 \text{ m} = 1,563 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \Delta l_1 = 0,0125 \text{ m}, \Delta l_2 = -0,01 \text{ m}; N_1 = 100 \text{ kN}, N_2 = -100 \text{ kN}$$

$$\text{Kontrolle von } v_b: (\sum H)_b = 0, (\sum V)_b = 0 \Rightarrow \delta N_1 = \delta N_2 = \frac{5}{8}\delta B_v$$

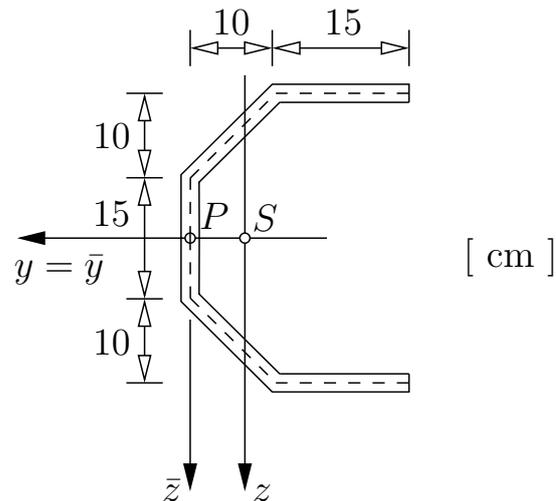
$$\text{PvK: } -\Delta l_1 \cdot \frac{5}{8}\delta B_v - \Delta l_2 \cdot \frac{5}{8}\delta B_v + \bar{v}_b\delta B_v = 0 \Rightarrow \bar{v}_b = \frac{5}{8}(\Delta l_1 + \Delta l_2) = 0,0015625 \text{ m} \checkmark$$

2. Kolloquium WS2011/2012

2. Beispiel: Normalspannungen

Angabe:

Gegeben ist ein Stabquerschnitt (siehe Abbildung), der durch eine im Querschnittsschwerpunkt angreifende Normalkraft $N = 200,0 \text{ kN}$ sowie durch die Biegemomente $M_y = 80,0 \text{ kNm}$ und $M_z = 120,0 \text{ kNm}$ belastet ist. Die Blechstärke beträgt $t = 2 \text{ cm}$ und sämtliche Abmessungen beziehen sich auf die Mittellinien.



Gesucht:

1. Berechnen Sie die Hauptflächenmomente 2. Ordnung des gegebenen Querschnitts.
2. Ermitteln Sie die Lage der Nulllinie und stellen Sie diese graphisch dar.
3. Berechnen Sie die Extremwerte der Biegenormalspannungen σ_x im Querschnitt und markieren Sie die zugehörigen Querschnittspunkte am Angabeblatt.
4. Liegt der Punkt P im Kern des Querschnitts?

Lösung:

Schwerpunkt: $\bar{y}_S = -9,09 \text{ cm}$

Hauptflächenmomente 2. Ordnung: $I_y = 28267,67 \text{ cm}^4$;

$I_z = 9275,15 \text{ cm}^4$ Nulllinie: $k = 4,505$; $d = -4,8215 \text{ cm}$

Extremwerte der Biegenormalspannungen:

$$A(10,09 / -7,5) \rightarrow \sigma_{x,A} = -13,81 \text{ kN/cm}^2$$

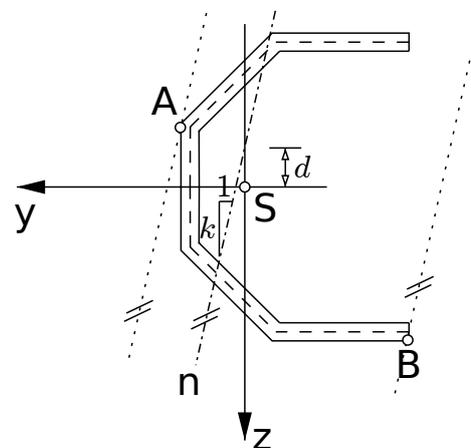
$$B(-15,91 / 18,5) \rightarrow \sigma_{x,B} = 27,18 \text{ kN/cm}^2$$

Der Punkt P liegt nicht im Kern des Querschnitts:

$$P(9,09 / 0) \rightarrow \bar{\eta}_k = -\frac{i_\zeta^2}{\eta_n} = -\frac{63,28}{\eta_n} = 9,09 \rightarrow \eta_n = -6,96 \text{ cm}$$

$$\bar{\zeta}_k = 0 \rightarrow \zeta_n = \infty$$

Die zum Punkt P zugehörige Nulllinie ist parallel zur z -Achse und schneidet den Querschnitt bei $y = -6,96 \text{ cm}$.



3. Kolloquium WS2009/2010

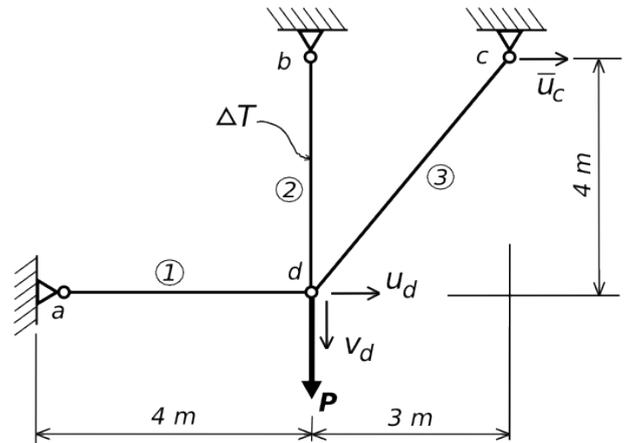
2. Beispiel: PvV für ideale Fachwerke

Angabe:

Gegeben ist ein ideales Fachwerk mit der Belastung $P = 100 \text{ kN}$. Alle Stäbe besitzen die gleiche Dehnsteifigkeit $EA = 10^5 \text{ kN}$. Zusätzlich wirkt auf Stab ② eine Temperaturdifferenz mit $\alpha\Delta T = 5 \cdot 10^{-4}$. Im Lager c ist eine Verschiebung $\bar{u}_c = 20 \text{ mm}$ eingepreßt.

Gesucht:

1. Ermitteln Sie die Verschiebungen u_d und v_d sowie alle Stabkräfte mittels des Prinzips der virtuellen Verschiebungen.
2. Überprüfen Sie die Verschiebungskomponente u_d mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte unter Anwendung des Reduktionsatzes.



Lösung:

- $N_1 = EA \frac{\Delta l_1}{l_1}$, $N_2 = EA \left(\frac{\Delta l_2}{l_2} - \alpha_T \Delta T \right)$, $N_3 = EA \frac{\Delta l_3}{l_3}$, $\Delta l_1 = u_d$, $\Delta l_2 = v_d$, $\Delta l_3 = \frac{3}{l_3} \bar{u}_c + \frac{4}{l_3} v_d - \frac{3}{l_3} u_d$. Durch Einsetzen ins PvV erhält man das folgende Gleichungssystem in u_d und v_d :

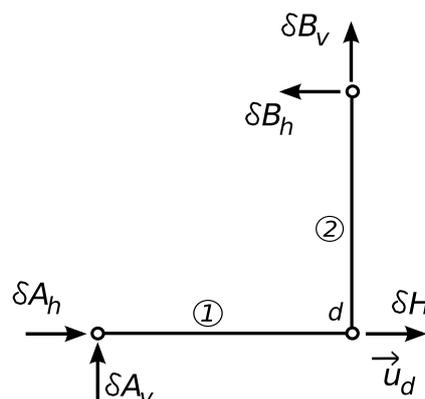
$$\frac{161}{500} \cdot u_d - \frac{12}{125} \cdot v_d = \frac{9}{125} \cdot \bar{u}_c$$

$$\frac{161}{4} \cdot u_d - 12 \cdot v_d = 9 \cdot \bar{u}_c$$

mit der Lösung: $u_d = 4.46 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $v_d = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, und den Stablängenänderungen: $\Delta l_1 = 4.46 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $\Delta l_2 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, $\Delta l_3 = 9.35 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Daraus ergeben sich für die Stabkräfte: $N_1 = 111.5 \text{ kN}$, $N_2 = -49.3 \text{ kN}$, $N_3 = 187 \text{ kN}$.

- Mit $\delta A_v = \delta B_v = \delta B_h = \delta N_2 = 0$, $\delta A_h = -\delta H$, $\Delta N_1 = \delta H$ und durch Anwendung des PvK am reduzierten System erhält man $u_d = \Delta l_1 = 4.46 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

reduziertes System zur Bestimmung von u_d

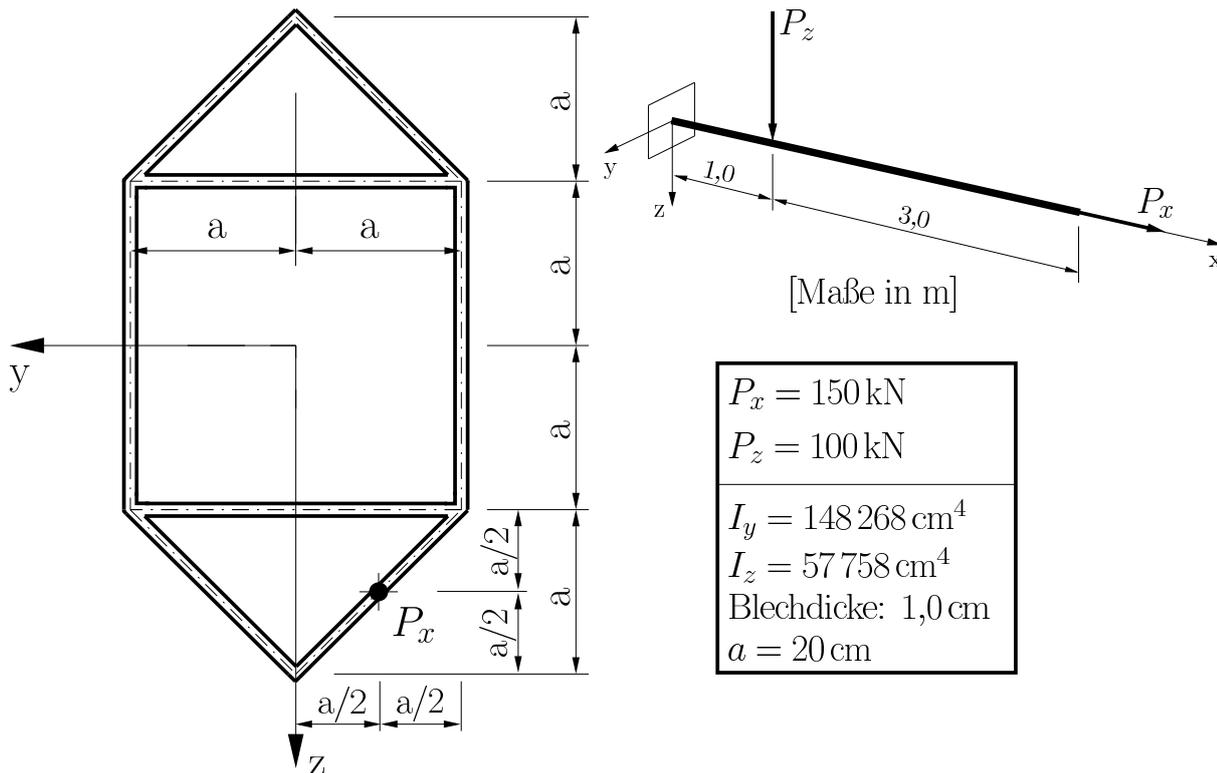


2. Kolloquium WS2009/2010

1. Beispiel: Träger unter Querkraft- und Normalkraftbeanspruchung

Angabe:

Gegeben ist ein dreizelliger Hohlkastenquerschnitt der durch eine Kraft $P_z = 100 \text{ kN}$ und eine Zugkraft $P_x = 150 \text{ kN}$ beansprucht wird. Die Blechdicke $t = 1,0 \text{ cm}$ ist über den gesamten Querschnitt konstant. Die Querschnittskennwerte des Trägers können der nebenstehenden Tabelle entnommen werden.



Gesucht:

1. Berechnen Sie an der Einspannstelle des Trägers für den gegebenen Querschnitt die Lage der Nulllinie und geben Sie diese als Funktion der y -Koordinate an.
2. Berechnen Sie an der Einspannstelle des Trägers für die gegebene Beanspruchung die größte Zug- bzw. Druckspannung und markieren Sie die zugehörigen Querschnittspunkte am Angabeblatt.
3. Berechnen Sie die Kernfläche des Querschnitts und tragen Sie die Koordinaten der Kernpunkte in einer Skizze ein.
4. Berechnen Sie den Schubspannungsverlauf im Querschnitt zufolge Querkraft und stellen Sie diesen sowohl qualitativ als auch quantitativ dar.

Lösung:

- Die Biegemomente M_y und M_z berechnen sich für unter der gegebenen Belastung zu:

$$M_y = -100 \cdot 100 + 150 \cdot 30 = -5500 \text{ kNcm} \quad M_z = 150 \cdot 10 = 1500 \text{ kNcm}$$

- Die Gleichung der Nulllinie berechnet sich gemäß Gleichung (16.26) des Übungsskriptums zu:

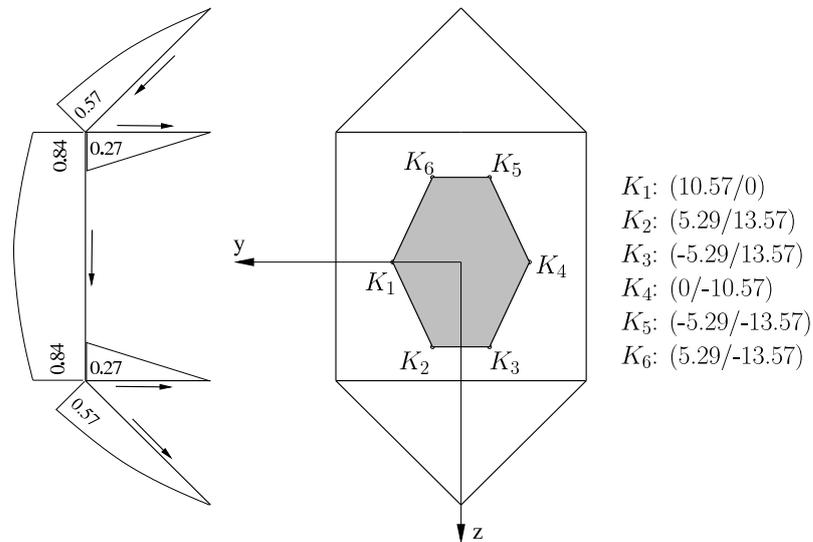
$$z = -0.70y + 14.80$$

mit $I_{yz} = 0$, $\tan \gamma_y = -0.27$ und der Querschnittsfläche $A = 273.14 \text{ cm}^2$.

- Unter Berücksichtigung der Zugkraft P_x berechnet sich die größte Druck- bzw. Zugspannung im untersten bzw. obersten Punkt des Querschnitts zu:

$$\text{Pkt. A (0/40): } \sigma_x = -0.93 \text{ kN/cm}^2 \quad \text{Pkt. B (0/-40): } \sigma_x = 2.03 \text{ kN/cm}^2$$

- Mit den Quadraten der Trägheitsradien $i_z^2 = 211.46 \text{ cm}^2$ und $i_y^2 = 542.83 \text{ cm}^2$ ergeben sich die Kernpunkte des Querschnitts zu (siehe Abbildung):
- Unter Ausnutzung der Symmetrie des Querschnitts ergeben sich die Schubspannungen zu- folge Querkraft wie folgt:



Korrektur der Grafik:

$$K_4 = (-10.57/0)$$

Der Wert der Schubspannungen im oberen horizontalen Blech beträgt $-0,27$.

3. Kolloquium WS2008/2009

2. Beispiel: Virtuelle Arbeitsprinzipien für Fachwerke

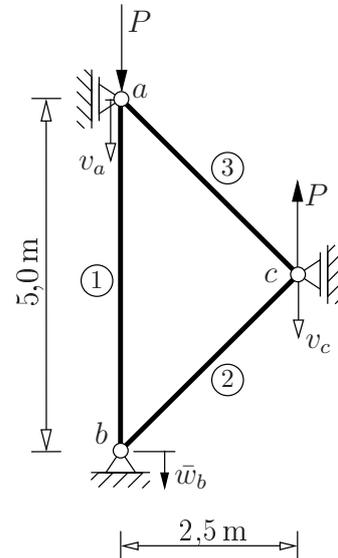
Angabe:

Gegeben ist ein ideales Fachwerk mit Einwirkungen laut Abbildung und Tabelle. Alle Stäbe besitzen die gleiche Dehnsteifigkeit EA .

P	$=$	200 kN
EA	$=$	100000 kN
\bar{w}_b	$=$	6 mm

Gesucht:

1. Ermitteln Sie die Verschiebungskomponenten v_a und v_c mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Berechnen Sie alle Stabkräfte.
2. Kontrollieren Sie die Verschiebungskomponente v_a mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte unter Anwendung des Reduktionssatzes.



Lösung:

1. Verschiebungskomponenten und Stabkräfte

$$\Delta l_1 = -v_a + \bar{w}_b, \quad \Delta l_2 = -\frac{v_c}{\sqrt{2}} + \frac{\bar{w}_b}{\sqrt{2}}, \quad \Delta l_3 = -\frac{v_a}{\sqrt{2}} + \frac{v_c}{\sqrt{2}}$$

$$v_a = 9,69 \text{ mm}, \quad v_c = 0,776 \text{ mm}$$

$$N_1 = -73,88 \text{ kN}, \quad N_2 = 104,48 \text{ kN}, \quad N_3 = -178,36 \text{ kN}$$

2. Kontrolle:

Das reduzierte System besteht lediglich aus dem Stab ①.

Abschnitt V

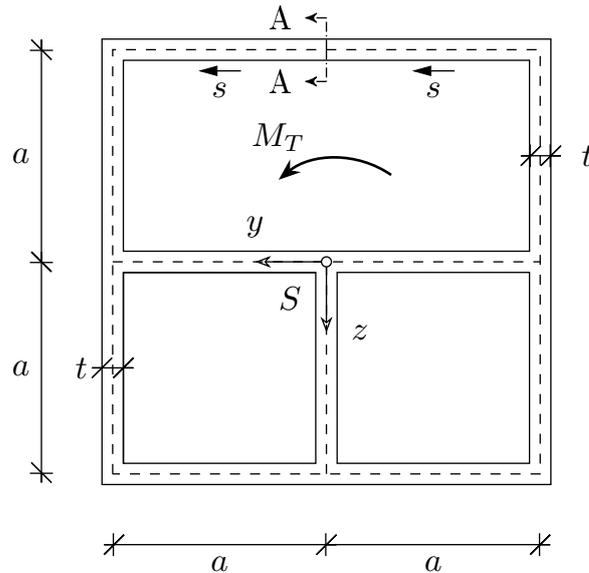
STABTHEORIE – QUERKRAFT UND TORSION

2. Kolloquium WS2020/2021

4. Beispiel: Schub zufolge Torsion – geschlossener Querschnitt

Angabe:

Gegeben ist ein dreizelliger Hohlquerschnitt mit einer konstanten Profildicke $t = 0,6 \text{ cm}$ sowie der Abmessung $a = 9 \text{ cm}$. Auf den Querschnitt wirkt ein Torsionsmoment $M_T = 1800 \text{ kNcm}$. Die Bemaßungen beziehen sich auf die Profilmittellinien.



Gesucht: Bestimmen Sie den Schubfluss F_τ in $[\text{kN/cm}]$ im Schnitt A. Die positive Wirkungsrichtung des gesuchten Schubflusses F_τ entspricht der Wirkungsrichtung der Laufvariable s .

Lösung:

Für den linken (2) und rechten (3) unteren Kastenquerschnitt gilt aufgrund der vorliegenden Symmetrie: $F_{\tau,2} = F_{\tau,3}$. Das Blech zwischen beiden Querschnitte überträgt damit keine Schubkraft und kann somit, da statisch nicht relevant, weggelassen werden. Aufgrund der dadurch entstandenen Symmetrie um die y -Achse gilt: $F_{\tau,oben} = F_{\tau,unten}$, damit trägt auch das mittlere horizontale Blech keine Schubbelastung. Damit ergibt sich der Schubfluss im Schnitt A-A zu:

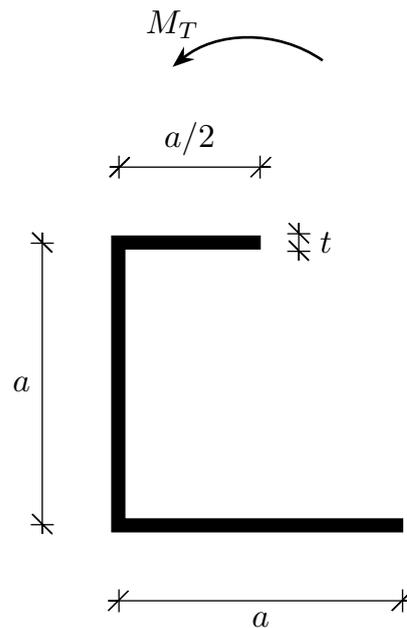
$$F_\tau = \frac{M_T}{2A_u} = \frac{M_T}{2(2a \cdot 2a)} = \frac{M_T}{8a^2} = \frac{1800 \text{ kNcm}}{8 \cdot (9 \text{ cm})^2} = 2,7778 \text{ kN/cm}$$

2. Kolloquium WS2020/2021

5. Beispiel: Schubspannungen zufolge Torsion – offener Querschnitt

Angabe:

Gegeben ist ein offener Querschnitt mit konstanter Blechdicke $t = 1,0 \text{ cm}$ und der Abmessung $a = 12,0 \text{ cm}$, welcher durch ein Torsionsmoment $M_T = 35,0 \text{ kNcm}$ belastet wird. Die Bemaßungen beziehen sich auf die Profilmittellinien.



Gesucht: Bestimmen Sie die maximale Schubspannung τ_{max} in $[\text{kN}/\text{cm}^2]$ im Querschnitt.

Lösung:

Der Drillwiderstand eines offenen Querschnitts ist gegeben zu:

$$I_T = \frac{1}{3} \sum l_i h_i^3 = \frac{5}{6} a \cdot t^3$$

Damit ergibt sich für die maximale Schubspannung am Rand des Querschnitts:

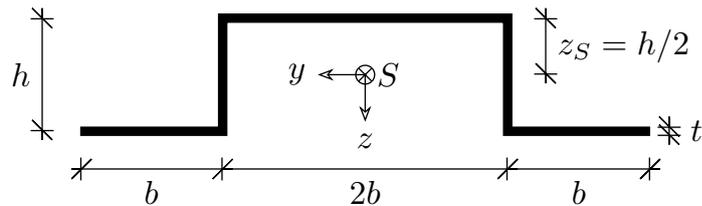
$$\tau_{max} = \frac{M_T}{I_T} \cdot t(s) = \frac{6M_T}{5at^2} = \frac{6 \cdot 35 \text{ kNcm}}{5 \cdot 12 \text{ cm} \cdot (1,0 \text{ cm})^2} = 3,5 \text{ kN}/\text{cm}^2$$

2. Kolloquium WS2020/2021

6. Beispiel: Schubmittelpunkt

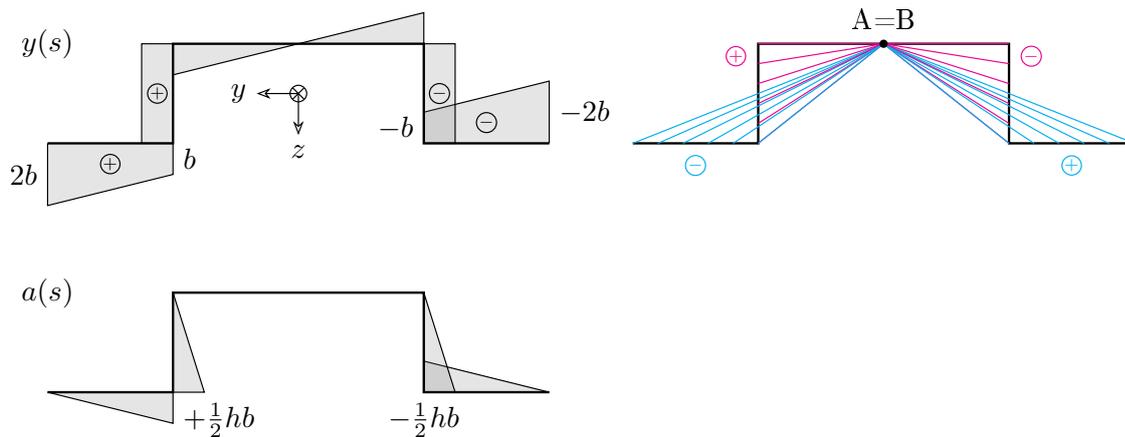
Angabe:

Gegeben ist ein offener Querschnitt mit konstanter Blechdicke $t = 1,2 \text{ cm}$ und den Abmessungen $b = 12 \text{ cm}$ und $h = 20 \text{ cm}$. Das Trägheitsmoment I_z kann berechnet werden zu: $I_z = t \left[\frac{16}{3} b^3 + 2hb^2 \right]$. Die Bemaßungen beziehen sich auf die Profilmittellinien.



Gesucht: Bestimmen Sie die Koordinate z_M des Schubmittelpunktes.

Lösung:



Der Schubmittelpunkt errechnet sich zu:

$$I_z = t \left[\frac{16}{3} b^3 + 2hb^2 \right] = 1,2 \text{ cm} \cdot \left[\frac{16}{3} \cdot (12 \text{ cm})^3 + 2 \cdot (20 \text{ cm}) \cdot (12 \text{ cm})^2 \right] = 17971,2 \text{ cm}^4$$

$$y_M = 0$$

$$z_M = z_S - \frac{2 \cdot 2}{I_z} t \left(\frac{1}{3} hb^3 + \frac{1}{4} h^2 b^2 \right) =$$

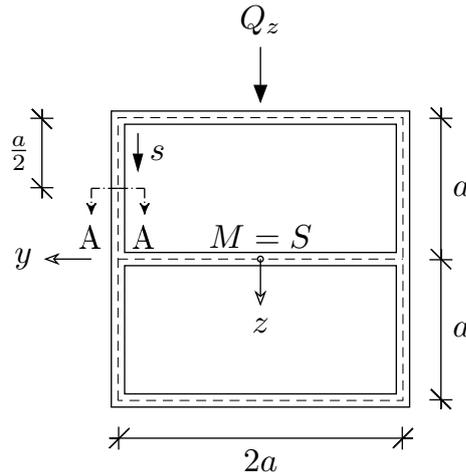
$$= -\frac{20 \text{ cm}}{2} - \frac{2 \cdot 2}{17971,2 \text{ cm}^4} 1,2 \text{ cm} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 20 \text{ cm} \cdot (12 \text{ cm})^3 + \frac{1}{4} \cdot (20 \text{ cm})^2 \cdot (12 \text{ cm})^2 \right) = -16,92 \text{ cm}$$

2. Kolloquium WS2020/2021

7. Beispiel: Schubspannungen zufolge Querkraft – geschlossener Querschnitt

Angabe:

Gegeben ist ein geschlossener Querschnitt mit konstanter Blechdicke $t = 1,0\text{ cm}$ und der Abmessung $a = 15\text{ cm}$, welcher durch eine Querkraft $Q_z = 70\text{ kN}$ belastet wird. Die Bemaßungen beziehen sich auf die Profilmittellinien.



Gesucht: Bestimmen Sie die Schubspannungen τ in $[\text{kN}/\text{cm}^2]$ im Schnitt A. Die positive Wirkungsrichtung der gesuchten Schubspannung τ entspricht der Wirkungsrichtung der Laufvariable s .

Lösung:

Das Trägheitsmoment I_y kann berechnet werden zu:

$$\begin{aligned} I_y &= \sum I_{eig,i} + \sum A_i (z_i - z_S)^2 \\ &= \frac{(2a+t)(2a+t)^3}{12} - 2 \frac{(2a-t)(a-t)^3}{12} - 2(2a-t)(a-t) \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(2 \cdot 15 + 1)^4}{12} - 2 \frac{(2 \cdot 15 - 1)(15 - 1)^3}{12} - 2(2 \cdot 15 - 1)(15 - 1) \left(\frac{15}{2}\right)^2 = 18022,4167\text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Die statischen Momente ergeben sich zu:

	A_i	z_i	$A_i z_i$	$S_y(s)$
1	$a \cdot t$	$-a$	$-a^2 \cdot t$	$-a^2 \cdot t$
2	$a/2 \cdot t$	$-\frac{3}{4}a$	$-\frac{3}{8}a^2 t$	$-\frac{11}{8}a^2 \cdot t$

Damit folgt die Schubspannung im Schnitt A zu:

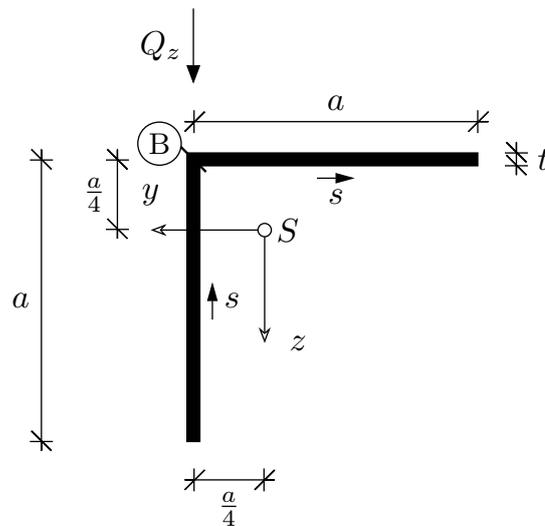
$$\tau_A = -\frac{Q_z}{I_y \cdot t} S_{y,2} = -\frac{70\text{ kN}}{18022,4167\text{ cm}^4 \cdot 1,0\text{ cm}} \cdot -\left(\frac{11}{8}\right) \cdot (15^2 \cdot 1,0)\text{ cm}^3 = 1,2016\text{ kN}/\text{cm}^2$$

2. Kolloquium WS2020/2021

8. Beispiel: Schubspannungen zufolge Querkraft – offener Querschnitt

Angabe:

Gegeben ist ein offener Querschnitt mit konstanter Blechdicke $t = 1,1 \text{ cm}$ und der Abmessung $a = 14 \text{ cm}$, welcher durch eine Querkraft $Q_z = 25 \text{ kN}$ belastet wird. Die Trägheitsmomente I_y und I_z lassen sich berechnen zu: $I_y, I_z = \frac{5}{24}a^3t$, das Deviationsmoment zu $I_{yz} = \frac{1}{8}a^3t$. Die Bemaßungen beziehen sich auf die Profilmittellinien.



Gesucht: Bestimmen Sie den Schubfluss $F_{\tau, B}$ in $[\text{kN}/\text{cm}]$ im Eckpunkt B. Die positive Wirkungsrichtung des gesuchten Schubflusses $F_{\tau, B}$ entspricht der Wirkungsrichtung der Laufvariable s .

Lösung:

Die statischen Momente ergeben sich zu: Damit folgt der Schubfluss im Eckpunkt B zu:

	A_i	z_i	y_i	$A_i z_i$	$A_i y_i$	$S_y(s)$	$S_z(s)$
1	$\frac{a}{2}t$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a^2}{4}t$	$\frac{a^2}{8}t$	$\frac{a^2}{4}t$	$\frac{a^2}{8}t$
2	$\frac{a}{2}t$	0	$\frac{a}{4}$	0	$\frac{a^2}{8}t$	$\frac{a^2}{4}t$	$\frac{a^2}{4}t$

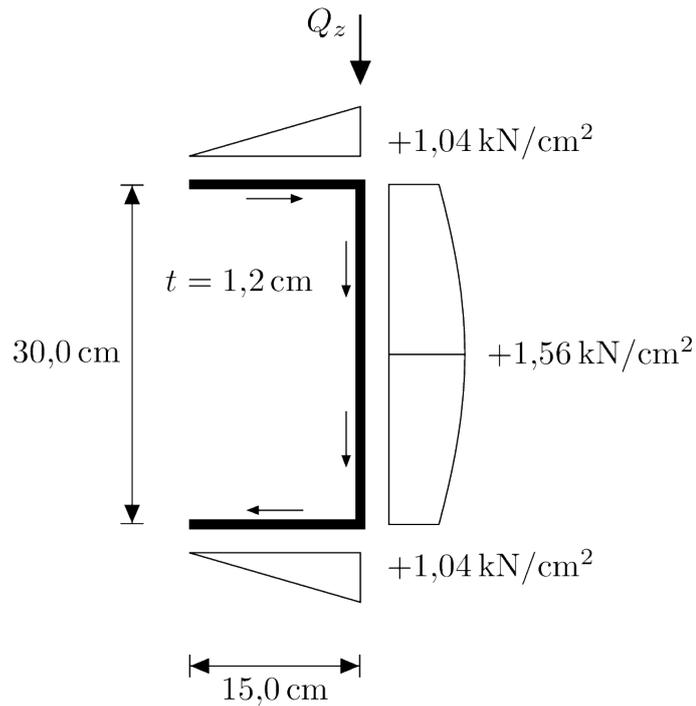
$$F_{\tau, B} = -\frac{Q_z I_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} S_y(s) + \frac{Q_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} S_z(s) = -\frac{3Q_z}{4a} = -\frac{3 \cdot 25 \text{ kN}}{4 \cdot 14 \text{ cm}} = -1,3393 \text{ kN/cm}$$

2. Kolloquium WS2020/2021

9. Beispiel: Schubspannungen zufolge Querkraft – Integration

Angabe:

Gegeben ist ein offener Querschnitt mit konstanter Blechdicke $t = 1,2 \text{ cm}$, welcher unter einer Querkraft Q_z den dargestellten Schubspannungsverlauf aufweist. Alle Bemaßungen beziehen sich auf die Profilmittellinien.



Gesucht: Berechnen Sie den Wert der Querkraft Q_z in kN, welche am U-Profil ($I_y = 10817,28 \text{ cm}^4$) den dargestellten Schubspannungsverlauf hervorruft.

Lösung:

Die Integration erfolgt mittels der Regel von Simpson:

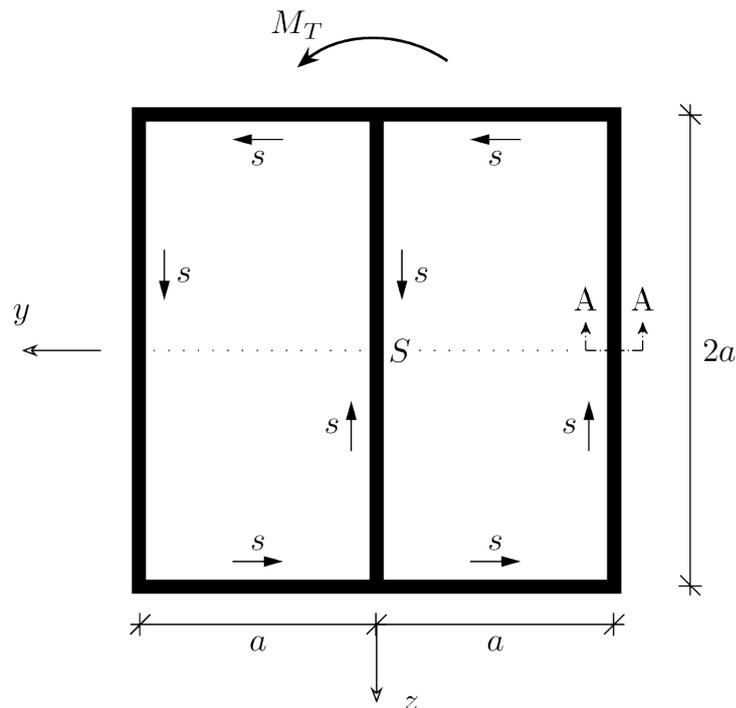
$$Q_z = t \int_h \tau = 1,2 \cdot \frac{30}{6} \cdot (1,04 + 4 \cdot 1,56 + 1,04) \approx 50 \text{ kN}$$

Ersatzkolloquium WS2020/2021

1. Beispiel: Schub zufolge Torsion – geschlossener Querschnitt

Angabe:

Gegeben ist ein zweizelliger Hohlquerschnitt mit einer konstanten Profildicke $t = 1,0\text{ cm}$ sowie der Abmessung $a = 15\text{ cm}$. Auf den Querschnitt wirkt ein Torsionsmoment M_T , welches im Schnitt A-A eine Schubspannung von $\tau_A = 5\text{ kN/cm}^2$ hervorruft (die positive Wirkungsrichtung entspricht der Laufkoordinate s). Die Bemaßungen beziehen sich auf die Profilmittellinien.



Gesucht ist das Torsionsmoment M_T in [kNcm].

Lösung:

Für den linken (1) und rechten (2) Kastenquerschnitt gilt aufgrund der vorliegenden Symmetrie: $F_{\tau,1} = F_{\tau,2}$. Das Blech zwischen beiden Hohlkästen überträgt damit keine Schubkraft und kann somit, da statisch nicht relevant, weggelassen werden. Das Torsionsmoment ergibt sich zu:

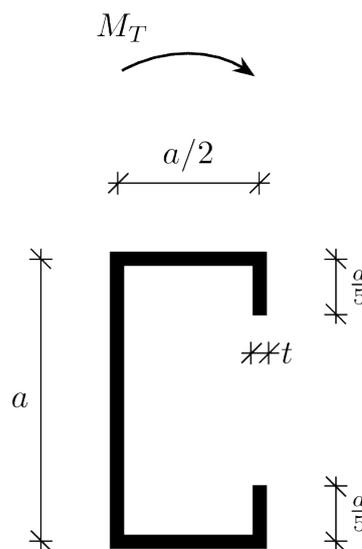
$$M_T = \tau_A 2A_u t = \tau_A 8a^2 t = 5\text{ kN/cm} \cdot 8 \cdot (15\text{ cm})^2 \cdot 1,0\text{ cm} = 9000\text{ kNcm}$$

Ersatzkolloquium WS2020/2021

2. Beispiel: Schubspannungen zufolge Torsion – offener Querschnitt

Angabe:

Gegeben ist ein offener Querschnitt mit konstanter Blechdicke $t = 0,8 \text{ cm}$ und der Abmessung $a = 22 \langle a \rangle \text{ cm}$, welcher durch ein Torsionsmoment $M_T = 80 \text{ kNcm}$ belastet wird. Die Bemaßungen beziehen sich auf die Profilmittellinien.



Gesucht ist die maximale Schubspannung τ_{max} in $[\text{kN}/\text{cm}^2]$ im Querschnitt.

Lösung:

Der Drillwiderstand eines offenen Querschnitts ist gegeben zu:

$$I_T = \frac{1}{3} \sum l_i h_i^3 = 0,8 a \cdot t^3$$

Damit ergibt sich für die maximale Schubspannung am Rand des Querschnitts:

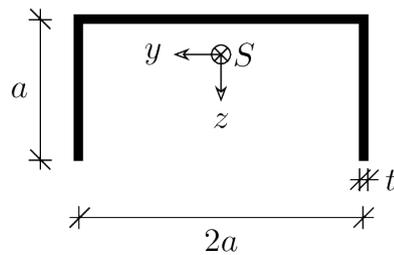
$$\tau_{max} = \frac{M_T}{I_T} \cdot t(s) = \frac{M_T}{0,8 a t^2} = \frac{80 \text{ kNcm}}{0,8 \cdot 22 \text{ cm} \cdot (0,8 \text{ cm})^2} = 7,1023 \text{ kN}/\text{cm}^2$$

Ersatzkolloquium WS2020/2021

3. Beispiel: Schubmittelpunkt

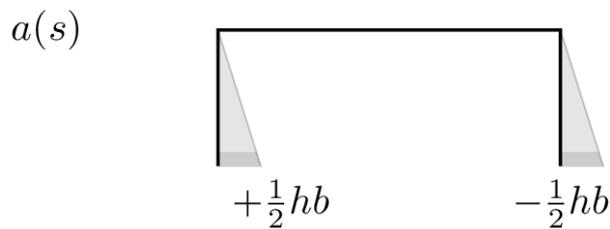
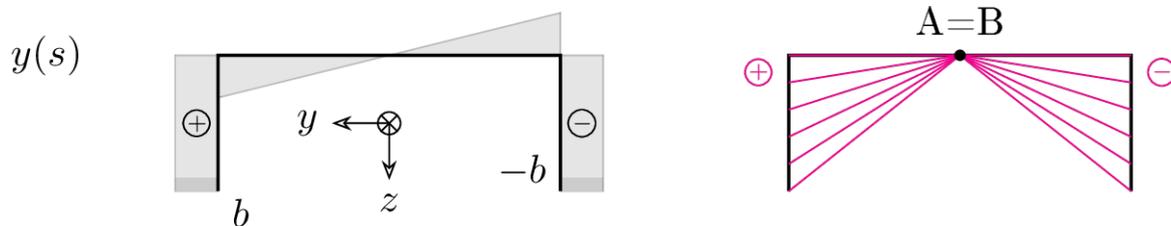
Angabe:

Gegeben ist ein offener Querschnitt mit konstanter Blechdicke $t = 1,2 \text{ cm}$ und der Abmessungen $a = 30 \text{ cm}$. Die Bemaßungen beziehen sich auf die Profilmittellinien.



Gesucht ist die Koordinate z_M des Schubmittelpunktes.

Lösung:



Das Trägheitsmoment und der Schubmittelpunkt errechnen sich zu:

$$I_z = 2ta^3 + \frac{2}{3}ta^3 = \frac{8}{3}ta^3$$

$$y_M = 0$$

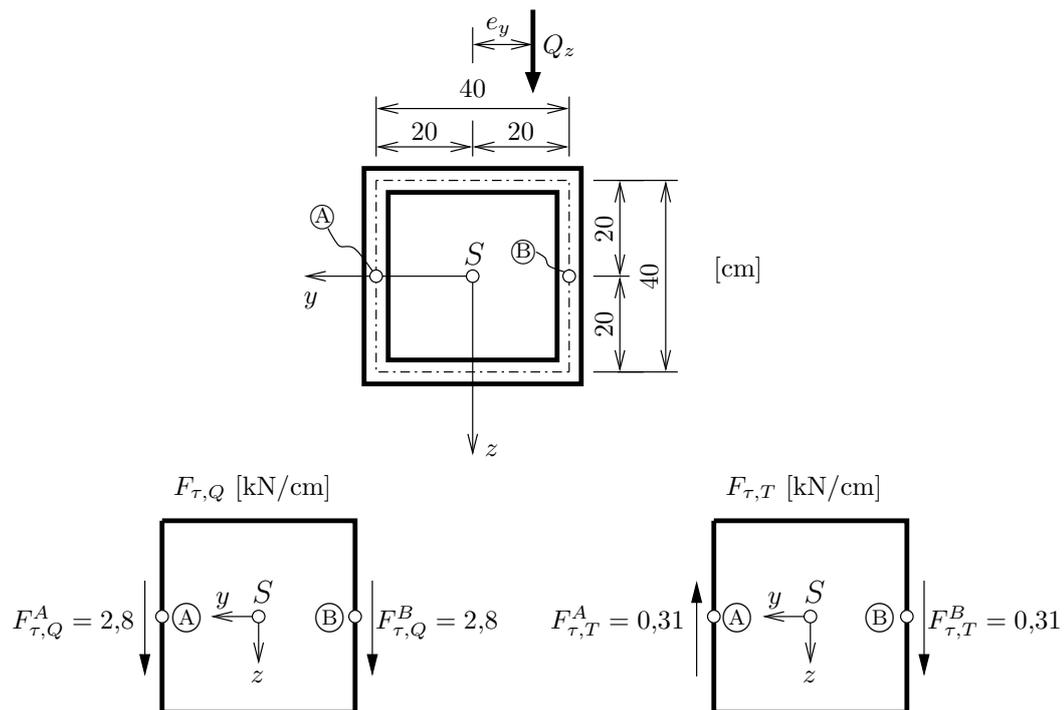
$$z_M = -z_S - \frac{2}{I_y}t \left(2\frac{a}{2} \frac{1}{2}a^2 \right) = -\frac{5a}{8} = -\frac{5 \cdot 30 \text{ cm}}{8} = -18,75 \text{ cm}$$

Ersatzkolloquium WS2018/2019

1. Beispiel: Schubspannungen zufolge Querkraft und Torsion

Angabe:

Gegeben ist ein Querschnitt, der durch eine exzentrisch angreifende Querkraft Q_z belastet wird. In den zwei Punkten (A) und (B) des Querschnitts ist die Größe und Richtung des Schubflusses zufolge Querkraft bzw. Torsion bekannt (siehe Abbildung). Die Querschnittsabmessungen sind der nachstehenden Abbildung zu entnehmen. Die Profildicke ist in allen Querschnittsteilen konstant mit $t = 2\text{ cm}$. *Hinweis:* Beachten Sie die Symmetrieeigenschaften des Querschnitts.



Gesucht:

- Berechnen Sie die Querschnittswerte I_y , I_z und I_{yz} .
- Bestimmen Sie die Querkraft Q_z .
- Bestimmen Sie das Torsionsmoment M_T und die daraus resultierende Exzentrizität e_y des Angriffspunktes der Querkraft Q_z zum Schubmittelpunkt.
- Stellen Sie den Schubflussverlauf des *gesamten* Profils
 - zufolge der Querkraft Q_z ,
 - zufolge des Torsionsmomentes M_T und
 - zufolge der Überlagerung der Querkraft Q_z mit dem Torsionsmoment M_T dar.

Lösung:

a. $I_y = I_z = \frac{(42 \text{ cm})^4}{12} - \frac{(38 \text{ cm})^4}{12} = 85\,546,6 \text{ cm}^4$

$$I_{yz} = 0$$

b. Anwenden von Symmetriebedingungen führt zu $F_{\tau, Q_z}(y = 0, z = \pm 20 \text{ cm}) = 0 \Leftrightarrow S_y = 0$ und somit zu einem offenen Querschnitt.

$$S_y^{A,B} = -20 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} - 20 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = -1200 \text{ cm}^3$$

$$F_{\tau, Q_z} = -\frac{S_y Q_z}{I_y} \Rightarrow Q_z = -\frac{F_{\tau, Q_z} I_y}{S_y^{A,B}} = -\frac{2,8 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \cdot 85\,546,6 \text{ cm}^4}{-1200 \text{ cm}^3} \approx 199,609 \text{ kN}$$

c. $\widetilde{M}_T(\odot) = 2 A_u F_{\tau, T}(\odot) = 2 (40 \text{ cm})^2 \cdot 0,31 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} = 992 \text{ kNcm}$

$$M_T(\ominus) = -\widetilde{M}_T(\odot) = -992 \text{ kNcm}$$

$$|e_y| = \frac{|M_T|}{|Q_z|} \approx 4,96972 \text{ cm}$$

d. • $F_{\tau, Q_z}(y = 0, z = \pm 20 \text{ cm}) = 0$

$$|F_{\tau, Q_z}(y = \pm 20 \text{ cm}, z = \pm 20 \text{ cm})| = 1,86 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$$

horizontale Profilbleche: linearer Schubflussverlauf (weg von der Symmetrieachse)

vertikale Profilbleche: quadratischer Schubflussverlauf (nach unten, in z-Richtung)

(Skizze nicht dargestellt)

• $F_{\tau, T} = \text{const} = 0,31 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}(\odot)$

(Skizze nicht dargestellt)

• $F_{\tau}(y = 0, z = -20 \text{ cm}) = 0,31 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$ (gegen die y-Richtung)

$$F_{\tau}(y = +20 \text{ cm}, z = \pm 20 \text{ cm}) = 1,556 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \text{ (in mathematisch positive Dreh-Richtung)}$$

$$F_{\tau}^A(y = +20 \text{ cm}, z = 0) = 2,49 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \text{ (in z-Richtung)}$$

$$F_{\tau}(y = 0, z = +20 \text{ cm}) = 0,31 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \text{ (in y-Richtung)}$$

$$F_{\tau}(y = -20 \text{ cm}, z = \pm 20 \text{ cm}) = 2,176 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \text{ (im Uhrzeigersinn)}$$

$$F_{\tau}^B(y = -20 \text{ cm}, z = 0) = 3,11 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \text{ (in z-Richtung)}$$

(Skizze nicht dargestellt)

e. Punkt (B)

$$\tau_{max} = \frac{2,8 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} + 0,31 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}}{0,2 \text{ cm}} = 1,555 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$$

die Schubspannungen sind über die Dicke konstant

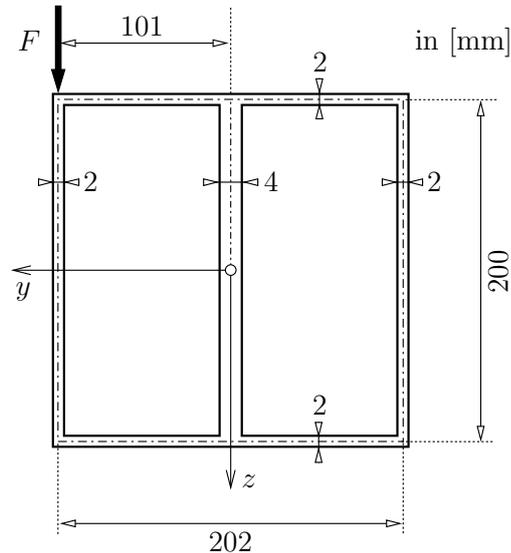
(Skizze nicht dargestellt)

2. Kolloquium WS2018/2019

2. Beispiel: Schubspannungen zufolge Querkraft und Torsion

Angabe:

Gegeben ist ein rechteckiges Hohlkastenprofil ($I_y = \frac{4000}{3} \text{ cm}^4$) mit einer Belastung $F = 40 \text{ kN}$ (siehe Abbildung).



Gesucht:

- Zeichnen Sie den Schwerpunkt S und den Schubmittelpunkt M am Angabebblatt ein.
- Bestimmen Sie den Schubflussverlauf und stellen Sie diesen für das gesamte Profil grafisch dar. *Hinweis:* Beachten Sie die Symmetrieeigenschaften des Querschnitts.
- Beweisen Sie durch Integration der Schubspannungen, dass die Querkraft Q_z die Schubspannungsresultante ist.
- Markieren Sie jene Stelle im Querschnitt, an welcher die betragsmäßig größte Schubspannung auftritt und bezeichnen Sie diesen Punkt mit \textcircled{A} . Stellen Sie die zugehörige Schubspannungsverteilung entlang des Schnittes normal zur Profilmittellinie dar.

Lösung:

a) $S = M = (0/0)$ (Schnittpunkt der Symmetrieachsen)

b) Schubflussverlauf:

1. Schubfluss zufolge Querkraft: (bei Ausnutzung der Symmetrie kann der bereits $F/4 = 10 \text{ kN}$ halbierte Querschnitt nochmals halbiert werden und man erhält einen offenen Querschnitt)

$$I_y^{\text{viertel}} = \frac{1000}{3} \text{ cm}^4$$

Punkt ①:

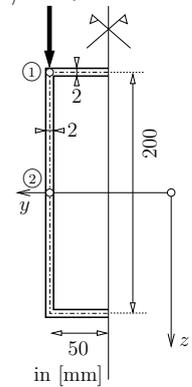
$$S_{y,①} = \int z(s) t ds = 10 \text{ cm} \cdot 0,2 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}^3$$

$$F_{\tau,Q①} = -\frac{Q_z^{\text{viertel}} S_{y,①}}{I_y^{\text{viertel}}} = -\frac{10 \text{ kN} \cdot 10 \text{ cm}^3}{\frac{1000}{3} \text{ cm}^4} = 0,3 \text{ kN/cm}$$

Punkt ②:

$$S_{y,②} = \int z(s) t ds = 10 \text{ cm} \cdot 0,2 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} \cdot 0,2 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm}^3$$

$$F_{\tau,Q②} = -\frac{Q_z^{\text{viertel}} S_{y,②}}{I_y^{\text{viertel}}} = -\frac{10 \text{ kN} \cdot 20 \text{ cm}^3}{\frac{1000}{3} \text{ cm}^4} = \frac{3}{5} \text{ kN/cm} = 0,6 \text{ kN/cm}$$

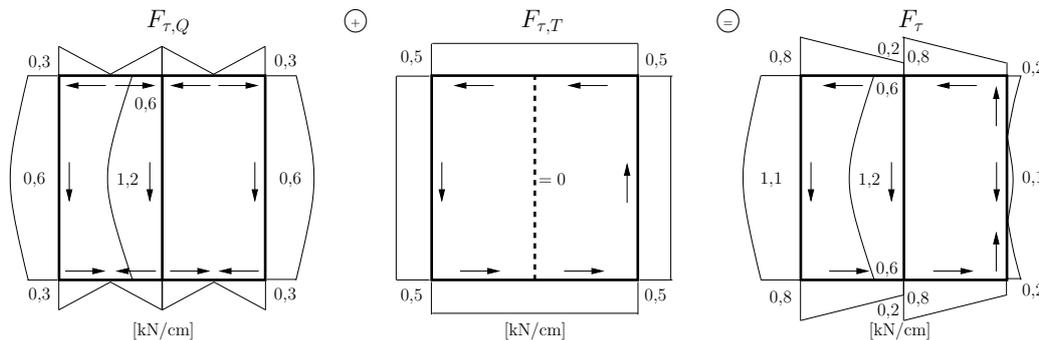


2. Schubfluss zufolge Torsion: (aus Antimetrie Gründen ist der Schubfluss im Mittelblech gleich 0, daher erfolgt die Berechnung für einen geschlossenen einzelligen Hohlquerschnitt)

$$M_T = 2 \cdot (\sum_i A_{u,i} \cdot F_{\tau,i}) = 2 \cdot (10,1 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} \cdot F_{\tau,\text{links}} + 10,1 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} \cdot F_{\tau,\text{rechts}})$$

mit $F_{\tau,\text{links}} = F_{\tau,\text{rechts}} = F_{\tau,T}$ folgt:

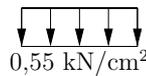
$$40 \text{ kN} \cdot 10,1 \text{ cm} = 808 \text{ cm}^2 \cdot F_{\tau,T} \quad \Rightarrow \quad F_{\tau,T} = \frac{1}{2} \text{ kN/cm} = 0,5 \text{ kN/cm}$$



$$c) \int \tau_{xz} h ds = \int F_{\tau} ds = 2 \frac{20}{6} (0,3 + 4 \cdot 0,6 + 0,3) + \frac{20}{6} (0,6 + 4 \cdot 1,2 + 0,6) = 40 \text{ kN}$$

$$d) \textcircled{A} = (10,2 \text{ cm} \leq y \leq 10,0 \text{ cm}, z = 0)$$

$$\tau_{\textcircled{A}} = \tau_{xz} = \frac{F_{\tau,Q②} + F_{\tau,T}}{t} = \frac{1,1}{0,2} = 0,55 \text{ kN/cm}^2$$

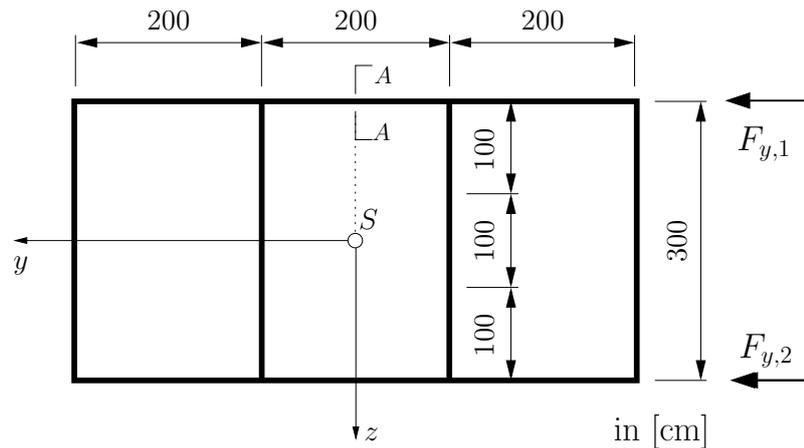


Ersatzkolloquium WS2017/2018

2. Beispiel: Schubfluss zufolge Querkraft und Torsion

Angabe:

Gegeben ist ein dreizelliger Stahlquerschnitt mit einer Blechstärke von $t = 2,5 \text{ cm}$, der durch zwei Kräfte $F_{y,1} = 10 \text{ MN}$ und $F_{y,2} = 5 \text{ MN}$ beansprucht wird (siehe Skizze). Die Abmessungen sind auf die Profilmittellinien bezogen.



QS-Werte
$I_y = 9,0 \cdot 10^7 \text{ cm}^4$
$I_z = 24,0 \cdot 10^7 \text{ cm}^4$

Gesucht:

- Berechnen Sie den Schubflussverlauf zufolge Querkraft entlang der Blechmittellinien und stellen Sie diesen unter Verwendung eines geeigneten Maßstabs grafisch dar.
- Berechnen Sie den Schubflussverlauf zufolge Torsion entlang der Blechmittellinien und stellen Sie diesen unter Verwendung eines geeigneten Maßstabs grafisch dar.
- Berechnen Sie den Schubflussverlauf zufolge Überlagerung von Querkraft und Torsion entlang der Blechmittellinien und stellen Sie diesen unter Verwendung eines geeigneten Maßstabs grafisch dar.

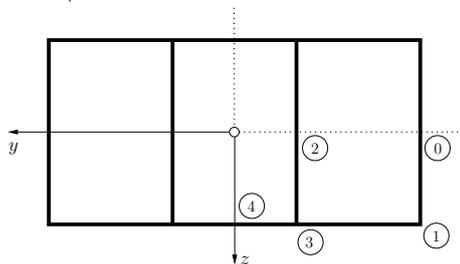
Lösung:

Lastaufteilung: $Q_y = 15 \text{ MN} = 15000 \text{ kN}$, und $M_T = 10 \cdot 150 - 5 \cdot 150 = 750 \text{ MNcm} = 750000 \text{ kNcm}$

a.

$F_0 = 0$ wegen Symmetrien.

	$S_z \text{ [cm}^3\text{]}$	$F_{\tau,Q} \text{ [kN/cm]}$
0	0	0
1	-112500	7,03
2	0	0
3r	-212500	13,28
3o	-37500	2,34
3l	-250000	15,63
4	-262500	16,41



b.

$$A_1 = A_2 = A_3 = 60000 \text{ cm}^2.$$

$$f_{C_1} = f_{C_2} = f_{C_3} = 400$$

$$\int_{C_{1,2}} = \int_{C_{2,3}} = 120$$

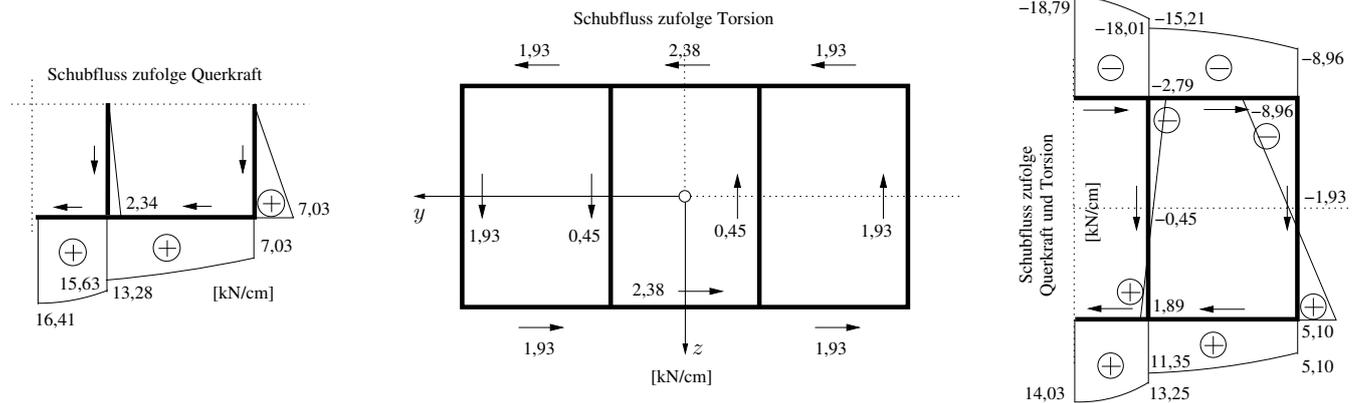
Lineares Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{10}{3} & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{10}{3} & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{10}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{\tau,1} \\ F_{\tau,2} \\ F_{\tau,3} \\ 1000G\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit $F_{\tau,1} = F_{\tau,3} = 1,93 \text{ kN/cm}$, $F_{\tau,2} = 2,38 \text{ kN/cm}$
und $1000G\vartheta = 4,06746 \text{ kN/cm}$

c.

Überlagerung von a. und b.



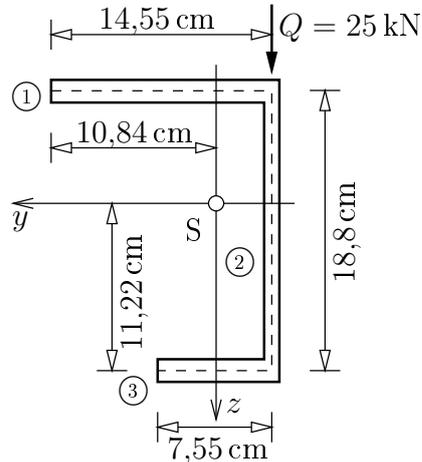
2. Kolloquium WS2017/2018

2. Beispiel: Schubmittelpunkt und Schubspannungen

Angabe:

Gegeben ist ein durch eine Querkraft belasteter Querschnitt und dessen Querschnittswerte laut Abbildung und Tabelle. Die Abmessungen sind auf die Profilmittellinien bezogen.

Profildicken
$t_{(1)} = 1,2 \text{ cm}$
$t_{(2)} = 0,9 \text{ cm}$
$t_{(3)} = 1,2 \text{ cm}$



Querschnittswerte	
A	$= 43,44 \text{ cm}^2$
I_y	$= 2701,3 \text{ cm}^4$
I_z	$= 807,0 \text{ cm}^4$
I_{yz}	$= -579,5 \text{ cm}^4$

Gesucht:

- Ermitteln Sie die Koordinaten des Schubmittelpunkts y_M und z_M .
- Ermitteln Sie den Verlauf des Schubflusses entlang der Profilmittellinie des Flansches (1) und stellen Sie ihn grafisch dar.
- Ermitteln Sie den Verlauf der Schubspannungen entlang des Schnittes des Flansches (1) mit der z -Achse und stellen Sie diesen grafisch dar.

Lösung:

a. Schubmittelpunkt:

mit $y_B = -3,71$ cm und $z_B = -7,58$ cm

$$\int_L z(s) a(s) t(s) ds = -3607,16 \text{ cm}^5$$

$$\int_L y(s) a(s) t(s) ds = -425,44 \text{ cm}^5 \Rightarrow y_M = -7,13 \text{ cm}, z_M = -4,07 \text{ cm}$$

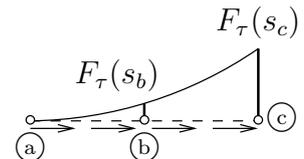
b. Schubfluss im Flansch:

$$Q_z = 25 \text{ kN}, I_y = 2701,3 \text{ cm}^4, I_z = 807,0 \text{ cm}^4, I_{yz} = -579,5 \text{ cm}^4$$

$$F_\tau(s) = -0,01094 \cdot S_y(s) - 0,00786 \cdot S_z(s)$$

$$S_y(s_b) = -66,17 \text{ cm}^3, S_z(s_b) = 62,88 \text{ cm}^3 \Rightarrow F_\tau(s_b) = 0,23 \text{ kN/cm}$$

$$S_y(s_c) = -132,34 \text{ cm}^3, S_z(s_c) = 62,24 \text{ cm}^3 \Rightarrow F_\tau(s_c) = 0,96 \text{ kN/cm}$$



c. Schubspannung im Schnitt der z -Achse mit dem Flansch

$$S_y(s_z) = -98,60 \text{ cm}^3, S_z(s_z) = 70,50 \text{ cm}^3 \Rightarrow F_\tau(s_z) = 0,52 \text{ kN/cm}$$

$$\tau^Q = \frac{F_\tau(s_z)}{1,2} = 0,44 \text{ kN/cm}^2 \text{ (positiver Wert nach rechts zeigend)}$$

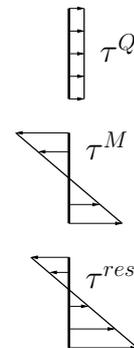
$$M_T = Q_z \cdot e = 25 \cdot 3,42 = 85,5 \text{ kNcm (positiv im GUZS)}$$

$$I_T = 17,298 \text{ cm}^4$$

$$\tau^M = \frac{M_T}{I_T} \cdot 1,2 = 5,93 \text{ kN/cm}^2 \text{ (zeigt oben nach links, unten nach rechts)}$$

$$\tau_{\text{oben}}^{\text{res}} = \tau^M - \tau^Q = 5,49 \text{ kN/cm}^2 \text{ (Wirkungsrichtung nach links)}$$

$$\tau_{\text{unten}}^{\text{res}} = \tau^M + \tau^Q = 6,37 \text{ kN/cm}^2 \text{ (Wirkungsrichtung nach rechts)}$$

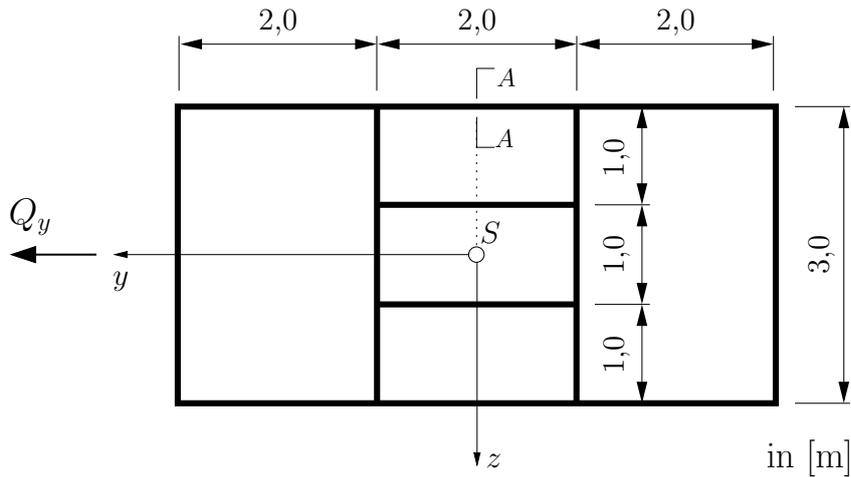


Ersatzkolloquium WS2016/2017

3. Beispiel: Schubfluss und Schubspannungen

Angabe:

Gegeben ist ein fünfzelliger Stahlquerschnitt mit einer Blechstärke von $t = 25 \text{ mm}$, der durch eine Querkraft $Q_y = 15 \text{ MN}$ beansprucht wird (siehe Skizze). Die Abmessungen sind auf die Profilmittellinien bezogen.



QS-Werte
$I_y = 9,3 \cdot 10^7 \text{ cm}^4$
$I_z = 24,3 \cdot 10^7 \text{ cm}^4$

Gesucht:

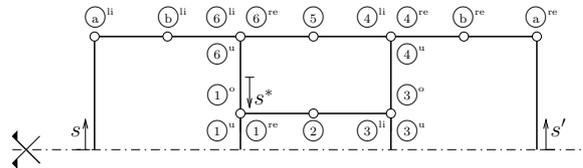
- Berechnen Sie den Schubflussverlauf entlang der Blechmittellinien und stellen Sie diesen (unter Berücksichtigung der physikalischen Wirkungsrichtung) grafisch dar.
- Ermitteln Sie den Schubspannungsverlauf im Schnitt A-A und stellen Sie diesen maßstäblich dar.

Lösung:

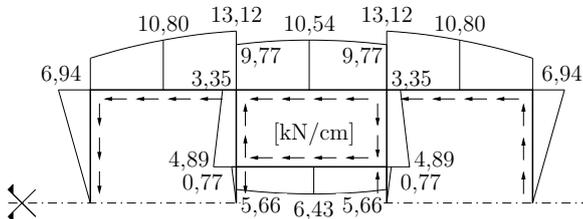
$$F_{\tau}^{Q_y} = -\frac{Q_y}{I_z} \cdot S_z(s) = -6,173 \cdot 10^{-5} \cdot S_z(s_i) \text{ kN/cm}$$

	A_i cm ²	y_i cm	$S_{z,i}$ cm ³	$\Sigma S_{z,i}$ cm ³	$F_{\tau}^{Q_y}(s_i)$ kN/cm
Ⓐ ^{li}	375	300	112 500	112 500	-6,94
Ⓑ ^{li}	250	250	62 500	175 000	-10,80
Ⓒ ^{li}	250	150	37 500	212 500	-13,12

	A_i cm ²	y_i cm	$S_{z,i}$ cm ³	$\Sigma S_{z,i}$ cm ³	$F_{\tau}^{Q_y}(s_i^*)$ kN/cm	$F_{\tau}^{Q_y}(s_i)$ kN/cm
① ^o	125	100	12 500	12 500	-0,77	-4,89
① ^u	125	100	12 500	12 500	-0,77	-0,77
① ^{re}				25 000	-1,54	-5,66
②	250	50	12 500	37 500	-2,31	-6,43
③ ^{li}	250	-50	-12 500	25 000	-1,54	-5,66
③ ^u	125	-100	-12 500	-12 500	0,77	0,77
③ ^o				12 500	-0,77	-4,89
④ ^u	250	-100	-25 000	-12 500	0,77	-3,35
④ ^{re}				-212 500	13,12	13,12
④ ^{li}				-225 000	13,89	9,77
⑤	250	-50	-12 500	-237 500	14,66	10,54
⑥ ^{re}	250	50	12 500	-225 000	13,89	9,77
⑥ ^{li}				212 500	-13,12	-13,12
⑥ ^u				-12 500	0,77	-3,35
⊛	250	100	12 500	0	0	-4,12

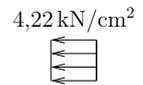


a. Schubflussverlauf zufolge Querkraft



b. Schubspannungsverlauf im Schnitt A - A

$$\tau_{A-A}^{Q_y} = \frac{10,54}{2,5} = 4,22 \text{ kN/cm}^2$$



Berechnung der Integrationskonstanten

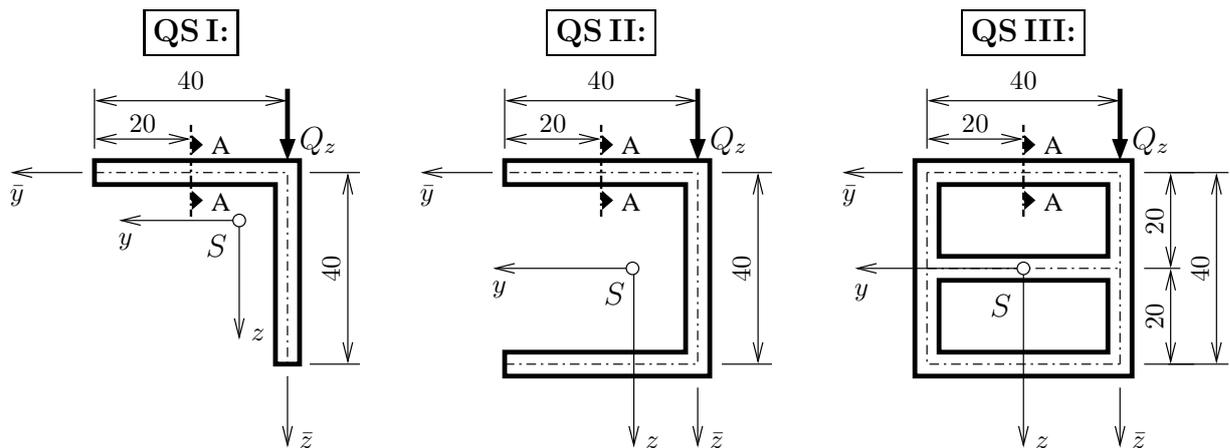
$$F_{\tau,0} = -\frac{\oint \frac{F_{\tau}^*(s_i)}{h(s)} ds}{\oint \frac{1}{h(s)} ds} = -\frac{200 \cdot (-2 \cdot 1,54 - 4 \cdot 2,31 + 2 \cdot 13,89 + 4 \cdot 14,66)}{2 \cdot (100 + 200)} = -\frac{2469,13}{600} = -4,12 \text{ kN/cm}$$

3. Kolloquium WS2016/2017

1. Beispiel: Schubspannungen

Angabe:

Gegeben sind drei Querschnitte (QSI, QSII und QSIII), welche jeweils durch eine Querkraft von $Q_z = 100 \text{ kN}$ beansprucht werden. Die Abmessungen in [cm] sind der nachstehenden Abbildung zu entnehmen. Die Profildicke ist in allen Querschnitten bzw. Querschnittsteilen konstant mit $t = 2 \text{ cm}$. Die Querschnittswerte von QSI und QSIII sind in der unten angeführten Tabelle ersichtlich.



	\bar{y}_S [cm]	\bar{z}_S [cm]	I_y [cm ⁴]	I_z [cm ⁴]	I_{yz} [cm ⁴]
QSI	10	10	26 693,33	26 693,33	-16 000
QSII					
QSIII	20	20	85 413,33	96 053,33	0

Gesucht:

1. Berechnen Sie die Querschnittswerte von QSII.
2. Bestimmen Sie die Schubmittelpunkte von QSI, QSII und QSIII und zeichnen Sie diese in die obige Abbildung ein.
3. Ermitteln Sie die Schubspannungsverteilungen in den Schnitten A-A von QSI, QSII und QSIII, und stellen Sie diese grafisch dar.

Lösung:

1. Querschnittswerte von QS II

$$\bar{y}_S = 13,33 \text{ cm}; \quad \bar{z}_S = 20 \text{ cm}; \quad I_y = 74720 \text{ cm}^4; \quad I_z = 42693,33 \text{ cm}^4; \quad I_{yz} = 0 \text{ cm}^4$$

2. Schubmittelpunkte

$$y_M^{\text{QSI}} = -10 \text{ cm}; \quad z_M^{\text{QSI}} = -10 \text{ cm} \quad (\text{Schnittpunkt der Profilmittellinien})$$

$$y_M^{\text{QSII}} = y_B + \frac{2}{I_y} \int_L z(s)a(s)t(s) ds = -30,46 \text{ cm} \quad (\text{Verläufe lt. Abbildung}); \quad z_M^{\text{QSII}} = 0 \text{ cm} \quad (\text{auf Symmetrieachse})$$

$$y_M^{\text{QSIII}} = 0 \text{ cm}; \quad z_M^{\text{QSIII}} = 0 \text{ cm} \quad (= \text{Schwerpunkt - Doppelsymmetrie!})$$

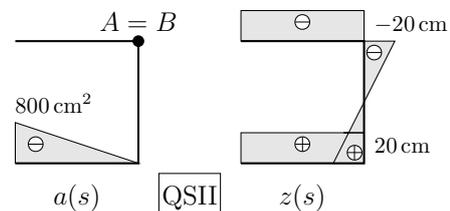
3. Resultierende Schubspannungen

$$M_T^{\text{QSI}} = 0 \text{ kNcm} \quad \rightarrow \quad \tau_{M_T}^{\text{QSI}} = 0 \text{ kN/cm}^2$$

$$S_y(\text{A-A}) = -400 \text{ cm}^3; \quad S_z(\text{A-A}) = 800 \text{ cm}^3$$

$$F_{\tau}(\text{A-A}) = -\frac{Q_z I_z S_y(\text{A-A}) - Q_z I_{yz} S_z(\text{A-A})}{I_y I_z - I_{yz}^2} = -0,465 \text{ kN/cm}$$

$$\tau_{\text{res}}^{\text{QSI}}(\text{A-A}) = 0,232 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{positiver Wert nach links zeigend})$$



$$M_T = Q_z \cdot (y_B - y_M) = 1713 \text{ kNcm} \quad (\text{positiv im GUZS})$$

$$I_T = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 40 \cdot 2^3 = 320 \text{ cm}^4$$

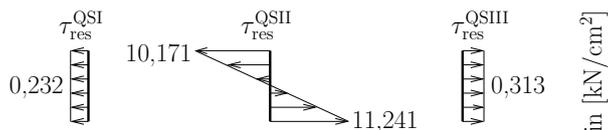
$$\tau_{M_T}^{\text{QSII, Rand}}(\text{A-A}) = \frac{M_T}{I_T} \cdot t = \frac{1713}{320} \cdot 2 = 10,706 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{Q_z}^{\text{QSII}}(\text{A-A}) = -\frac{Q_z S_y(\text{A-A})}{I_y t} = -\frac{(100) \cdot (-800)}{74720 \cdot 2} = 0,535 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{positiver Wert nach rechts zeigend})$$

$$\tau_{\text{res}}^{\text{QSII, oben}}(\text{A-A}) = 10,171 \text{ kN/cm}^2; \quad \tau_{\text{res}}^{\text{QSII, unten}}(\text{A-A}) = 11,241 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{Q_z}^{\text{QSIII}}(\text{A-A}) = 0 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{zufolge Symmetrie}); \quad M_T^{\text{QSIII}} = Q_z \cdot 20 = 2000 \text{ kNcm} \quad (\text{positiv im GUZS})$$

$$\tau_{\text{res}}^{\text{QSIII}}(\text{A-A}) = \tau_{M_T}^{\text{QSIII}}(\text{A-A}) = \frac{M_T}{2A_u t} = 0,313 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{positiver Wert nach rechts zeigend})$$

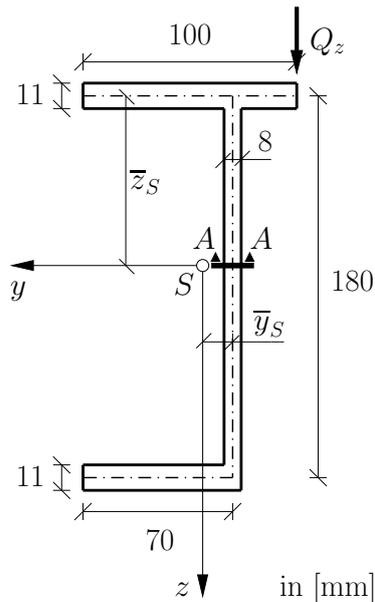


Ersatzkolloquium WS2015/2016

1. Beispiel: Schubspannungen – offener Querschnitt

Angabe:

Gegeben: Der dargestellte offene, dünnwandige Querschnitt ist durch eine hinsichtlich des Schubmittelpunktes *exzentrisch* wirkende Querkraft $Q_z = 100 \text{ kN}$ belastet. Die Querschnittsabmessungen bzw. Querschnittswerte sind der Abbildung bzw. der Tabelle zu entnehmen.



$A = 33,1 \text{ cm}^2$
$\bar{y}_S = 1,48 \text{ cm}$
$\bar{z}_S = 8,10 \text{ cm}$
$I_y = 1878,7 \text{ cm}^4$
$I_z = 189,8 \text{ cm}^4$
$I_{yz} = 88,5 \text{ cm}^4$

Gesucht:

1. Ermitteln Sie die Koordinaten des Schubmittelpunktes $M(y_M/z_M)$.
Hinweis: Beziehen Sie sich bei Ihren Berechnungen auf die Profilmittellinien.
2. Berechnen Sie den resultierenden Schubspannungsverlauf über die Profildicke im Schnitt A – A zufolge der gegebenen Belastung und stellen Sie diesen in physikalisch positiver Wirkungsrichtung maßstäblich dar.

Lösung:

1.1 Koordinaten des Schubmittelpunkts y_M und z_M

$$I_y = 1878,7 \text{ cm}^4; \quad I_z = 189,8 \text{ cm}^4; \quad I_{yz} = 88,5 \text{ cm}^4$$

$$\frac{2 \cdot I_y}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} = 1,077 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-4}; \quad \frac{2 \cdot I_z}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} = 1,088 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-4}; \quad \frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} = 5,075 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-4}$$

$$\int y(s) \cdot a(s) \cdot t(s) \, ds = \frac{1}{6} \cdot (-63) \cdot (2 \cdot 5,52 - 1,48) \cdot 1,1 \cdot 7 = -772,93 \text{ cm}^5$$

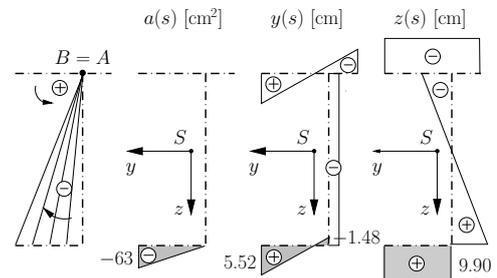
$$\int z(s) \cdot a(s) \cdot t(s) \, ds = \frac{1}{2} \cdot (-63) \cdot 9,9 \cdot 1,1 \cdot 7 = -2401,25 \text{ cm}^5$$

$$y_M = y_B + \frac{2 \cdot I_z}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \cdot \int z(s) \cdot a(s) \cdot t(s) \, ds - \frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \cdot \int y(s) \cdot a(s) \cdot t(s) \, ds =$$

$$= -1,48 + 1,088 \cdot 10^{-3} \cdot (-2401,25) - 5,075 \cdot 10^{-4} \cdot (-772,93) = -3,70 \text{ cm}$$

$$z_M = z_B - \frac{2 \cdot I_y}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \cdot \int y(s) \cdot a(s) \cdot t(s) \, ds + \frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \cdot \int z(s) \cdot a(s) \cdot t(s) \, ds =$$

$$= -8,1 - 1,077 \cdot 10^{-2} \cdot (-772,93) + 5,075 \cdot 10^{-4} \cdot (-2401,25) = -0,99 \text{ cm}$$



1.2 Resultierender Schubspannungsverlauf im Schnitt A - A

$$S_y(S) = (7 \cdot 1,1) \cdot 9,9 + (9,9 \cdot 0,8) \cdot 4,95 = 115,43 \text{ cm}^3; \quad S_z(S) = (7 \cdot 1,1) \cdot 2,02 + (9,9 \cdot 0,8) \cdot (-1,48) = 3,83 \text{ cm}^3$$

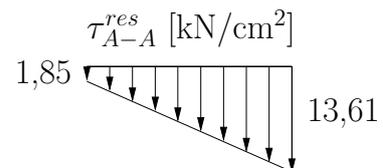
$$\tau_{A-A}^{Q_z} = \frac{Q_z}{(I_y \cdot I_z - I_{yz}^2) \cdot t(S)} \cdot (-I_z \cdot S_y(S) + I_{yz} \cdot S_z(S)) = \frac{100}{348745 \cdot 0,8} \cdot (-189,9 \cdot 115,43 + 88,5 \cdot 3,83) = -7,73 \text{ kN/cm}^2 \uparrow$$

$$M_T = Q_z \cdot e = 100 \cdot (-0,78) = -78 \text{ kNm}; \quad I_T = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^N l_i \cdot t_i^3 = \frac{1}{3} \cdot (10 \cdot 1,1^3 + 18 \cdot 0,8^3 + 7 \cdot 1,1^3) = 10,614 \text{ cm}^4$$

$$\tau_{A-A}^{M_T} = \frac{M_T}{I_T} \cdot t(S) = \frac{-78}{10,614} \cdot 0,8 = -5,88 \text{ kN/cm}^2 \text{ (entg. pos. Wirkungsrichtung)}$$

$$\tau_{A-A,li}^{res} = |\tau_{A-A}^{Q_z}| - |\tau_{A-A}^{M_T}| = 1,85 \text{ kN/cm}^2 \text{ (in pos. Wirkungsrichtung)}$$

$$\tau_{A-A,re}^{res} = |\tau_{A-A}^{Q_z}| + |\tau_{A-A}^{M_T}| = 13,61 \text{ kN/cm}^2 \text{ (in pos. Wirkungsrichtung)}$$



3. Kolloquium WS2015/2016

1. Beispiel:

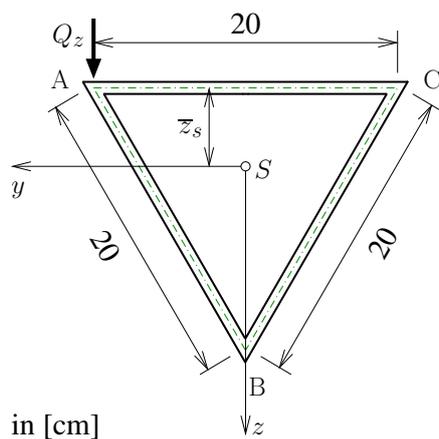
Schubspannungen in geschlossenen Hohlquerschnitten

Angabe:

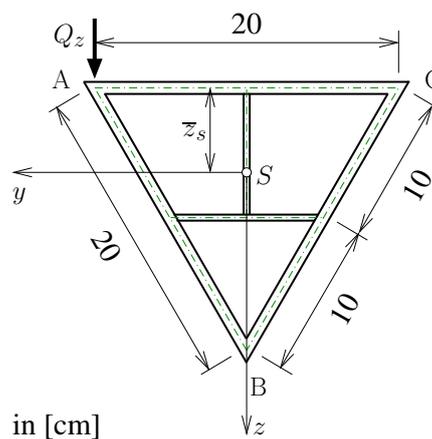
Gegeben: Die beiden dargestellten dünnwandigen Hohlquerschnitte weisen die Form eines gleichseitigen Dreiecks auf, wobei Querschnitt 2 zusätzlich durch Bleche verstärkt ist. Die Dicke der äußeren Bleche beträgt 0,8 cm, jene der Verstärkungsbleche 0,4 cm. Die auf die Profilmittellinien bezogenen Abmessungen bzw. Querschnittswerte sind der Abbildung bzw. der Tabelle zu entnehmen. Beide Querschnitte sind jeweils durch eine hinsichtlich des Schubmittelpunktes *exzentrisch* wirkende Querkraft $Q_z = 100 \text{ kN}$ belastet.

Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie der Querschnitte und beziehen Sie sich bei den Berechnungen stets auf die Profilmittellinien.

Querschnitt 1



Querschnitt 2



QS 1

$$\begin{aligned} \bar{z}_s &= 5,774 \text{ cm} \\ A &= 48,00 \text{ cm}^2 \\ I_y &= 1600,89 \text{ cm}^4 \\ I_z &= 1600,00 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

QS 2

$$\begin{aligned} \bar{z}_s &= 5,892 \text{ cm} \\ A &= 55,46 \text{ cm}^2 \\ I_y &= 1662,37 \text{ cm}^4 \\ I_z &= 1633,38 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Gesucht:

- Bestimmen Sie die Schubspannungen zufolge *Querkraft* und *Torsion* für den gesamten **Querschnitt 1** und stellen Sie den resultierenden Schubspannungsverlauf (inklusive der physikalischen Wirkungsrichtungen) entlang der Profilmittellinien maßstäblich dar.
- Um wieviel Prozent kann man die Verwindung ϑ durch das Anschweißen der Verstärkungsbleche (siehe **Querschnitt 2**) im Vergleich zum unverstärkten Querschnitt (**Querschnitt 1**) verringern?

Lösung:

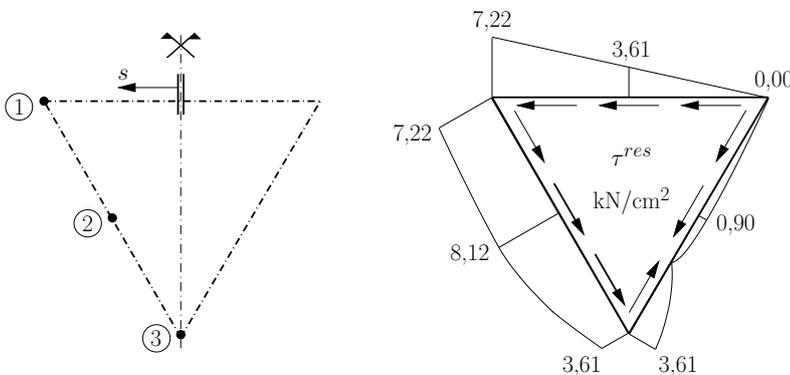
$$M_T = Q_z \cdot 10 = 1000 \text{ kNcm}$$

1. Schubspannungen zufolge Querkraft und Torsion (Querschnitt 1)

Aus Symmetriegründen gilt hier $F_{\tau,0} = 0 \text{ kN/cm}$, wenn die Laufkoordinate s in die Symmetrieachse gesetzt wird.

	A_i cm ²	z_i cm	$S_y(s_i)$ cm ³	$\Sigma S_y(s_i)$ cm ³	$\tau_i^{Q_z}$ kN/cm ²
①	8	-5,774	-46,19	-46,19	3,61
②	8	-1,444	-11,55	-57,74	4,51
③	8	7,216	57,73	≈0	0 ✓

$$\tau^{M_T} = \frac{M_T}{2 \cdot A_u \cdot h(s)} = \frac{1000}{2 \cdot 173,21 \cdot 0,8} = 3,61 \text{ kN/cm}^2$$



$$I_T = \frac{4 \cdot A_u^2}{\oint ds/h(s)} = \frac{4 \cdot 173,21^2}{75} = 1600 \text{ cm}^4 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_{QS1} = \frac{M_T}{G \cdot I_T} = \frac{0,625}{G} \text{ rad/cm}$$

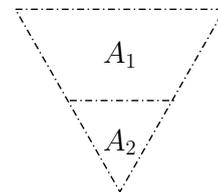
2. Prozentuale Verringerung der Verwindung ϑ durch die Aussteifung

Aus Symmetriegründen ist der resultierende Schubfluss im vertikalen Verstärkungsblech = 0, daher erfolgt die Berechnung für einen zweizelligen Hohlquerschnitt (siehe Abbildung).

$$A_1 = \frac{(10+20) \cdot 8,66}{2} = 129,9 \text{ cm}^2; \quad A_2 = \frac{10 \cdot 8,66}{2} = 43,3 \text{ cm}^2; \quad \oint_{C_1} = \frac{40}{0,8} + \frac{10}{0,4} = 75; \quad \oint_{C_2} = \frac{20}{0,8} + \frac{10}{0,4} = 50; \quad \int_{C_{1,2}} = \frac{10}{0,4} = 25$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 129,90 & 2 \cdot 43,30 & 0 \\ 75 & -25 & -2 \cdot 129,9 \\ -25 & 50 & -2 \cdot 43,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{\tau,1} \\ F_{\tau,2} \\ G \cdot \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vartheta_{QS2} = \frac{0,617}{G} \text{ rad/cm} \quad \Rightarrow \quad \frac{\vartheta_{QS2}}{\vartheta_{QS1}} = \frac{0,617}{0,625} = 0,987 \quad \Rightarrow \quad \approx 1,3 \%$$

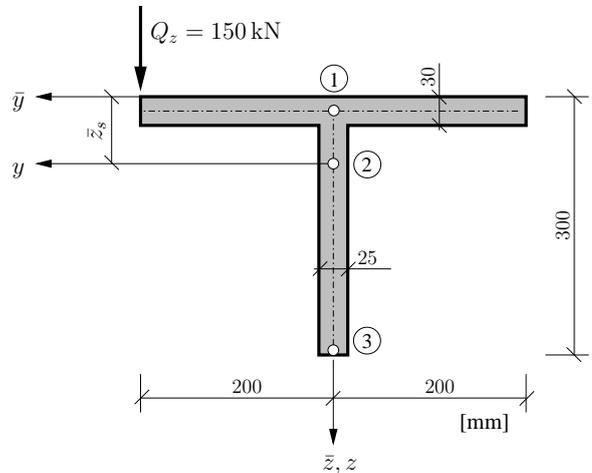


Ersatzkolloquium WS2014/2015

3. Beispiel: Normal- und Schubspannungen

Angabe:

Gegeben ist ein dünnwandiger, offener Querschnitt gemäß der nebenstehenden (nicht maßstäblichen) Abbildung. Die Profilgeometrie ist der Abbildung zu entnehmen. Der Querschnitt ist durch ein Biegemoment $M_y = -80 \text{ kNm}$, durch eine Normalkraft $N = 200 \text{ kN}$ (wirkt im Schwerpunkt), sowie durch eine Querkraft $Q_z = 150 \text{ kN}$ (Wirkungslinie gemäß Abbildung) belastet.



Gesucht:

1. Berechnen Sie die die Schwerpunktskoordinate \bar{z}_s des Querschnitts sowie dessen Hauptträgheitsmomente.
2. Ermitteln Sie die Stelle und den Wert der maximalen Druckspannung.
3. Ermitteln Sie den Schubfluss für die in der Skizze markierten Punkte ① bis ③ und stellen Sie diesen grafisch dar. Beziehen Sie sich dabei auf die Querschnittsmittellinien.
4. Stellen Sie die Schubspannungsverteilung entlang eines Schnittes normal zur Profilmittellinie im Punkt ② grafisch dar.

Lösung:

exakt: $\bar{z}_s = 6,9 \text{ cm}$

Profilmittellinien: $\bar{z}_s = 6,80882 \text{ cm}$

$I_y = 13910,6 \text{ cm}^4$, $I_z = 16035,2 \text{ cm}^4$, $I_{yz} = 0 \text{ cm}^4$

Maximale Druckspannung im Punkt ③:

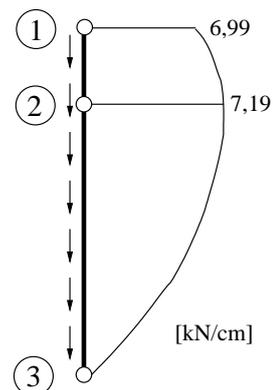
$$\sigma_{\min} = \frac{200}{187,5} - \frac{8000}{13910,6} \cdot (30 - 6,9) = -12,22 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_\tau(s) = -\frac{Q_z}{I_y} \cdot S_y(s)$$

$$S_y(s_1) = -648 \text{ cm}^3 \rightarrow F_\tau(s_1) = 6,99 \text{ kN/cm}^2$$

$$S_y(s_2) = -667 \text{ cm}^3 \rightarrow F_\tau(s_2) = 7,19 \text{ kN/cm}^2$$

$$S_y(s_3) = 0 \text{ cm}^3 \rightarrow F_\tau(s_3) = 0 \text{ kN/cm}^2$$



3. Kolloquium WS2014/2015

2. Beispiel: Schubspannungen

Angabe:

Gegeben ist ein dünnwandiger, offener Querschnitt mit abschnittsweise konstanter Profildicke gemäß Skizze, der durch eine Querkraft $Q_y = -50 \text{ kN}$ (Wirkungslinie verläuft durch den Schubmittelpunkt) und ein Torsionsmoment $M_T = 105 \text{ kNm}$ belastet wird.

Querschnittswerte:

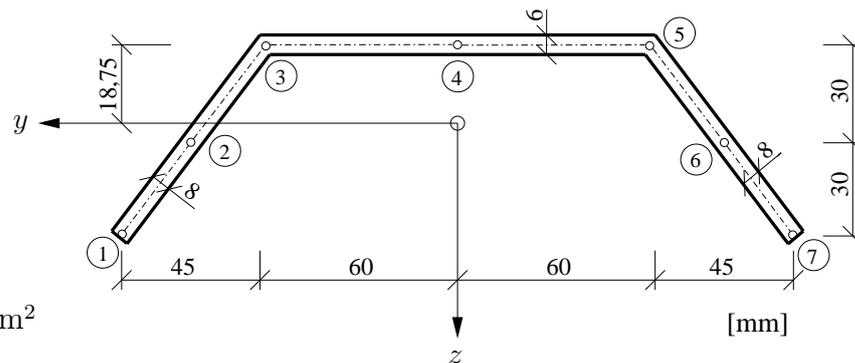
$$\begin{aligned} A &= 19,20 \text{ cm}^2 \\ I_y &= 76,72 \text{ cm}^4 \\ I_z &= 923,40 \text{ cm}^4 \\ I_{yz} &= 0,00 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Materialkennwerte:

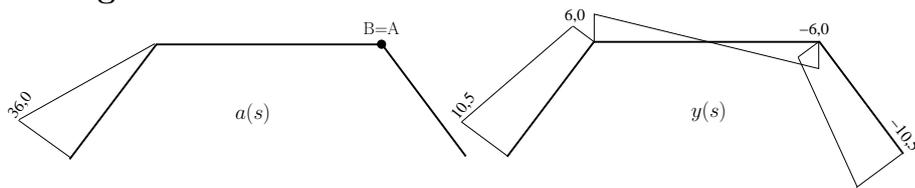
$$\begin{aligned} E &= 21000,00 \text{ kN/cm}^2 \\ \nu &= 0,30 \end{aligned}$$

Gesucht:

1. Ermitteln Sie die Koordinaten des Schubmittelpunkts des Querschnitts im y, z -Koordinatensystem.
2. Ermitteln Sie den Schubfluss für die in der Skizze markierten Punkte ① bis ⑦ und stellen Sie diesen grafisch dar. Beziehen Sie sich dabei auf die Querschnittsmittellinien. Beweisen Sie durch Integration der Schubspannungen, dass die Querkraft Q_y die Schubspannungsergebnante ist.
3. Markieren Sie jene Stelle im Querschnitt, an welcher die betragsmäßig größte Schubspannung auftritt und geben Sie diese an. Stellen Sie die zugehörige Schubspannungsverteilung entlang eines Schnittes normal zur Profilmittellinie grafisch dar.
4. Berechnen Sie die Verwindung ϑ des Querschnitts. Durch das Anschweißen eines zusätzlichen Bleches soll diese reduziert werden. Wie könnte ein solcher Querschnitt aussehen? Argumentieren Sie!



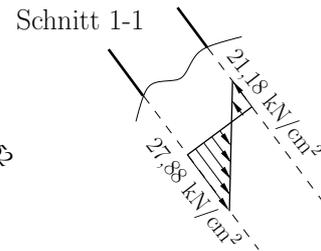
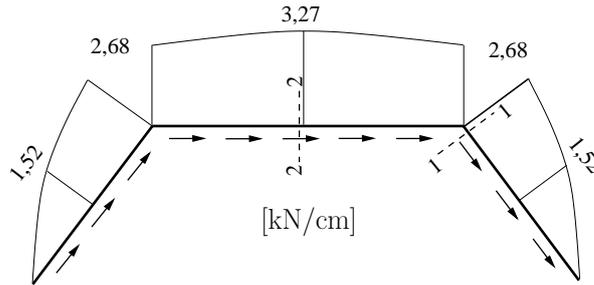
Lösung:



$$\int_L y(s) a(s) t(s) ds = 0,8 \cdot \left[\frac{7,5}{6} \cdot 36(6 + 2 \cdot 10,5) \right] = 972 \text{ cm}^5$$

$$z_M = -1,875 - \frac{2}{923,40} \cdot 972 = -3,98 \text{ cm} \rightarrow \text{Koordinaten Schubmittelpunkt M (0/ -3,95 cm)}$$

$$F_T(s) = -\frac{Q_y}{I_z} \cdot S_z(s)$$



Bei offenen Querschnitten: Kein Schubfluss zufolge Torsion!

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} dA = - \int_{s_0}^{s_7} \tau_{xs} t ds = -2 \cdot \frac{4,5}{6} \cdot (2,68 + 4 \cdot 1,52) - \frac{12}{6} \cdot (2 \cdot 2,68 + 4 \cdot 3,27) = -50 \text{ kN} \checkmark$$

$$I_T = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 7,5 \cdot 0,8^3 + 12 \cdot 0,6^3) = 3,424 \text{ cm}^4$$

Um festzustellen, an welcher Stelle die größte Schubspannung auftritt, sind Schnitt 1-1 und 2-2 zu untersuchen.

$$\text{Schnitt 1-1: } \tau_{max}^{M_T} = \frac{105}{3,424} \cdot 0,8 = 24,53 \text{ kN/cm}^2, \tau^Q = \frac{2,68}{0,8} = 3,35 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Schnitt 2-2: } \tau_{max}^{M_T} = \frac{105}{3,424} \cdot 0,6 = 18,40 \text{ kN/cm}^2, \tau^Q = \frac{3,27}{0,6} = 5,44 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{max} = 24,53 + 3,35 = 27,88 \text{ kN/cm}^2 \text{ (Punkte ③ und ⑤ auf der Innenseite des Querschnitts)}$$

$$G = \frac{21000}{2 \cdot (1+0,3)} = 8077 \text{ kN/cm}^2, \vartheta = \frac{105}{8077 \cdot 3,424} = 379,67 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm}$$

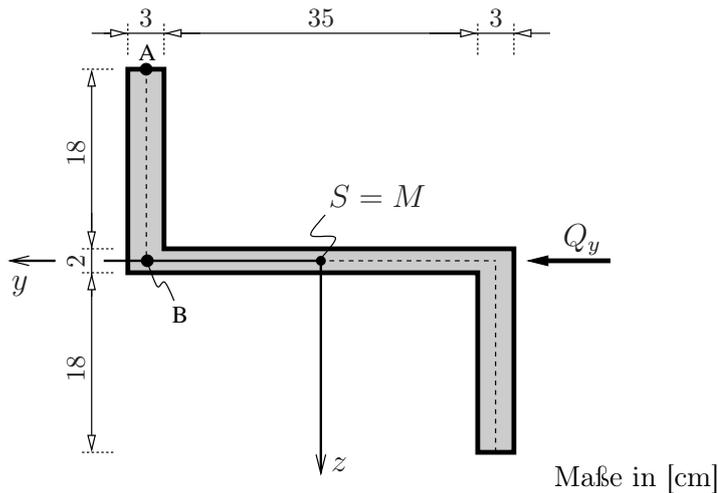
Wird ein Blech zwischen Punkte ① und ⑦ angeschweißt, handelt es sich um einen geschlossenen Querschnitt, dessen Drillwiderstand I_T um ein vielfaches größer ist als jener des offenen Querschnitts.

Ersatzkolloquium WS2013/2014

2. Beispiel: Normal- und Schubspannungen

Angabe:

Gegeben ist ein dünnwandiger, offener Querschnitt gemäß der nachstehenden (nicht maßstäblichen) Abbildung. Der Querschnitt ist durch ein Biegemoment $M_y = 75 \text{ kNm}$, durch eine Normalkraft $N = 10 \text{ kN}$, sowie durch eine Querkraft $Q_y = 45 \text{ kN}$ belastet. Die Flächenmomente 2. Ordnung I_y und I_z sind ebenfalls der Abbildung zu entnehmen.



$$I_y = 13743 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 50556 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = ?$$

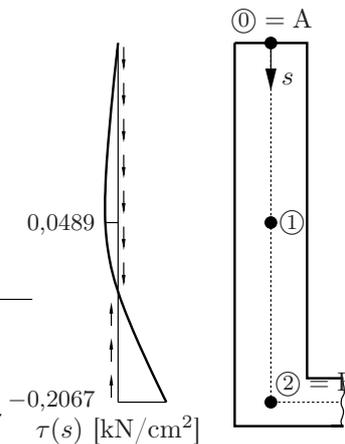
Gesucht:

1. Ermitteln Sie die Stelle und den Wert der maximalen Druckspannung.
2. Ermitteln Sie den Schubspannungsverlauf entlang der Profilmittellinie zwischen den Punkten A und B und stellen Sie diesen grafisch dar.

Lösung:

$I_{yz} = -2 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 9 = -20520 \text{ cm}^4$, $k = -0,4059$,
 $d = -3,7994 \text{ cm} \Rightarrow$ Punkt $(17,5 \text{ cm} / -19 \text{ cm})$
 maßgeblich: maximale Druckspannung
 $\sigma_x = -0,1122 \text{ kN/cm}^2$

Pkt.	S_y [cm ³]	S_z [cm ³]	F_τ [kN/cm]	τ [kN/cm ²]
0	0	0	0	0
1	-406,13	541,5	0,1466	0,0489
2	-541,5	1083,0	-0,6201	-0,2067

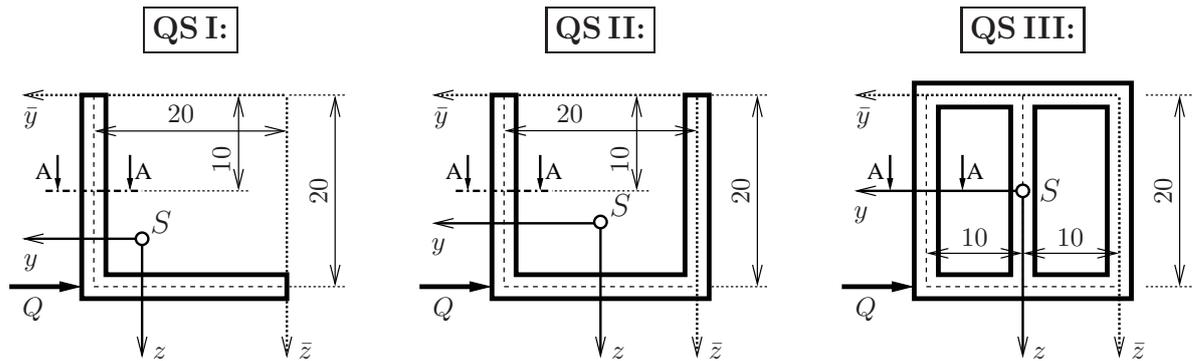


3. Kolloquium WS2013/2014

2. Beispiel: Schubspannungen

Angabe:

Gegeben sind drei Querschnitte (QS I, QS II und QS III), deren Abmessungen (in cm), Flächenmomente 2. Ordnung und Belastungen der nachstehenden Abbildung bzw. Tabelle zu entnehmen sind. Die Profildicke ist in allen Querschnitten bzw. Querschnittsteilen konstant, $t = 1$ cm.



	\bar{y}_S [cm]	\bar{z}_S [cm]	I_y [cm ⁴]	I_z [cm ⁴]	I_{yz} [cm ⁴]	Q [kN]
QS I	15	15	1668,33	1668,33	-1000	50
QS II	10	13,33	2668,33	4670,00	0	50
QS III	10	10	6003,33	5338,33	0	50

Gesucht: Ermitteln Sie die Schubspannungsverteilungen in den Schnitten A-A von QS I, QS II und QS III, und stellen Sie diese grafisch dar.

Lösung:

Querschnitt I:

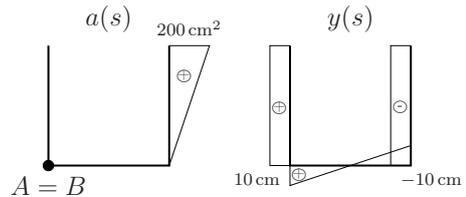
Wirkungslinie von Q durch Schubmittelpunkt, d.h. $M_T = 0$; $F_\tau(s) = \frac{Q_y I_{yz} S_y(s) - Q_y I_y S_z(s)}{I_y I_z - I_{yz}^2}$, $Q_y = -50 \text{ kN}$, $S_y(A-A) = -100 \text{ cm}^3$, $S_z(A-A) = 50 \text{ cm}^3 \rightarrow F_\tau(A-A) = -0,4650 \text{ kN/cm} \rightarrow \tau^Q(A-A) = 0,4650 \text{ kN/cm}^2$ (positiver Wert nach oben zeigend); $\tau(A-A) = \tau^Q(A-A)$

Querschnitt II:

Schubmittelpunkt (z.B. $A = B$ im unteren Eckpunkt):

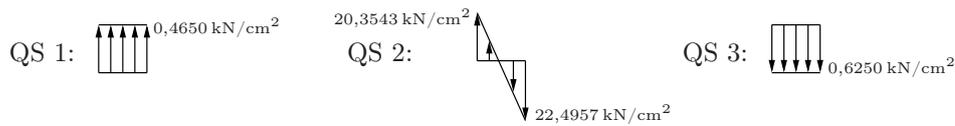
$$y_M = 0, z_M = z_B - \frac{2}{I_z} \int_L y(s) a(s) t(s) ds = 6,67 - \frac{2}{4670} \cdot 1 \cdot \frac{20}{2} \cdot 200 \cdot (-10) = 15,24 \text{ cm}$$

$$M_T = Q \cdot (z_M - z_B) = 423,5 \text{ kNcm (positiv im Uhrzeigersinn); } I_T = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 20 \cdot 1^3 = 20 \text{ cm}^4 \rightarrow \tau^{T, \text{Rand}}(A-A) = \frac{423,5}{20} \cdot 1 = 21,175 \text{ kN/cm}^2; \tau^Q(A-A) = -\frac{Q_y S_z(s)}{I_z t} = -\frac{(-50) \cdot 100}{4670 \cdot 1} = 1,0707 \text{ kN/cm}^2 \text{ (positiver Wert nach unten zeigend); } \tau(A-A) = \tau^Q(A-A) + \tau^T(A-A)$$



Querschnitt III:

Schubmittelpunkt im Schnittpunkt der beiden Symmetrieachsen; $\tau^Q(A-A) = 0$ (zufolge Symmetrie); $M_T = Q \cdot 10 = 500 \text{ kNcm}$ (positiv im Gegenuhrzeigersinn), $\tau^T(A-A) = \frac{M_T}{2A_{ut}} = 0,6250 \text{ kN/cm}^2$ (positiver Wert nach unten zeigend); $\tau(A-A) = \tau^T(A-A)$

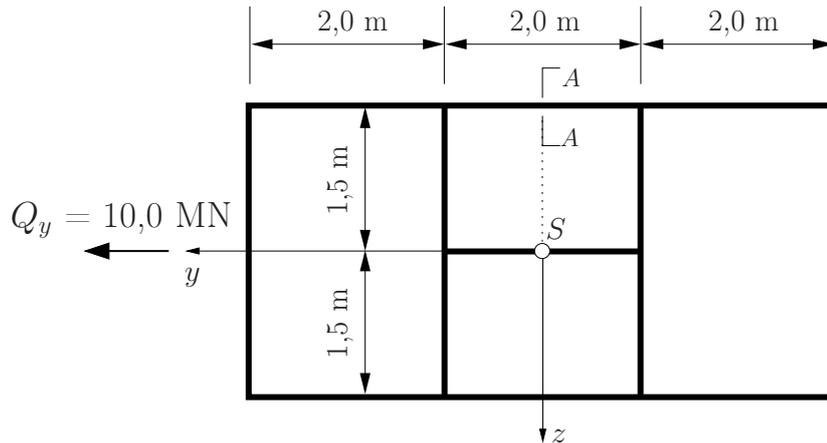


Ersatzkolloquium WS2012/2013

3. Beispiel: Schubspannungen zufolge Querkraft

Angabe:

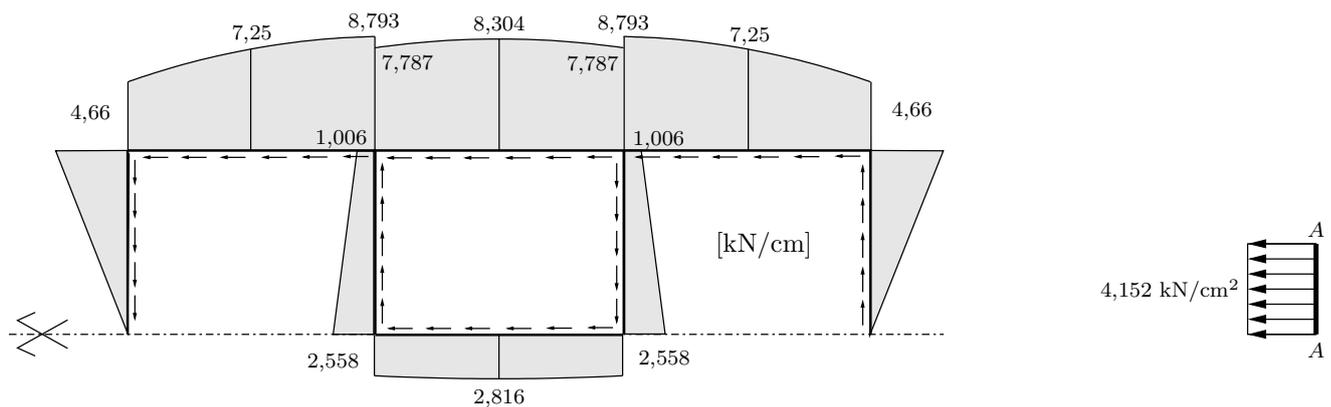
Gegeben ist ein vierzelliger Stahlquerschnitt mit einer Blechstärke $t = 20 \text{ mm}$, der durch eine Querkraft Q_y beansprucht wird. Das Flächenmoment 2. Ordnung um die z -Achse beträgt $I_z = 1,93 \times 10^8 \text{ cm}^4$.



Gesucht:

1. Berechnen Sie den Schubflussverlauf entlang aller Blechmittellinien und stellen Sie ihn graphisch dar.
2. Berechnen Sie den Schubspannungsverlauf entlang des Schnitts A – A und stellen Sie ihn graphisch dar.

Lösung:



3. Kolloquium WS2012/2013

1. Beispiel: Torsion offener dünnwandiger Querschnitte

Angabe:

Gegeben ist ein Stabquerschnitt, der durch eine Querkraftkomponente Q_z belastet ist (siehe Abbildung).

- Die Koordinaten des Querschnittsschwerpunkts lauten im \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystem $S(10,00/6,33)$ [cm]

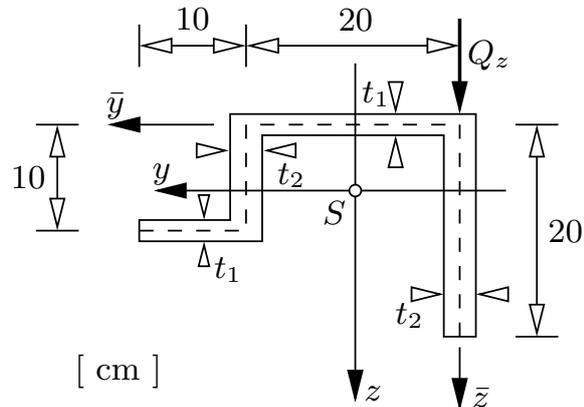
Die Flächenmomente 2. Ordnung lauten:

$$I_y = 5\,003 \text{ cm}^4, \quad I_z = 15\,077 \text{ cm}^4$$

$$\text{und } I_{yz} = -1\,500 \text{ cm}^4$$

Für die Querkraft Q_z gilt: $Q_z = 50 \text{ kN}$

Weiters gilt: $t_1 = 2 \text{ cm}$ und $t_2 = 3 \text{ cm}$.



Gesucht:

- Ermitteln Sie die Koordinaten des Schubmittelpunkts des Querschnitts im y - z -Koordinatensystem.
- Markieren Sie jene Querschnittsteile, in denen die maximalen Torsionsschubspannungen auftreten und stellen Sie den Verlauf der Torsionsschubspannungen entlang eines Schnittes normal zur Profilmittellinie in so einem Querschnittsteil maßstäblich dar.

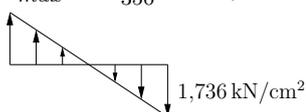
Lösung:

Die Koordinaten des Schubmittelpunkts lauten: $y_M = -5,95 \text{ cm}$, $z_M = -11,597 \text{ cm}$

Die maximalen Torsionsschubspannungen treten in den beiden vertikalen Querschnittsteilen auf:

$$M_T = (-10 + 5,95) \cdot Q_z = -202,5 \text{ kNcm}; \quad I_T = \frac{1}{3} \sum l_i h_i^3 = \frac{1}{3} 30 \cdot 2^3 + \frac{1}{3} 30 \cdot 3^3 = 350 \text{ cm}^4$$

$$\tau_{max}^{Rand} = \frac{202,5}{350} 3 = 1,736 \text{ kN/cm}^2$$

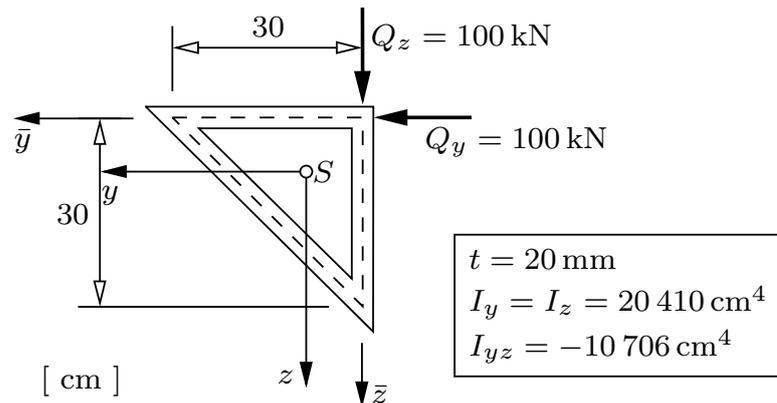


3. Kolloquium WS2012/2013

2. Beispiel: Schubspannungen in geschlossenen Querschnitten

Angabe:

Gegeben ist ein Stabquerschnitt, der durch zwei Querkraftkomponenten Q_y und Q_z belastet ist (siehe Abbildung). Der Abstand des Querschnittsschwerpunkts vom Ursprung des \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystems beträgt $\bar{y}_S = \bar{z}_S = 10,61$ cm.



Gesucht:

1. Berechnen Sie die Schubspannungen und stellen Sie den Schubflussverlauf entlang der Mittellinien graphisch dar.

Lösung:

Der Querschnitt und auch die Belastung sind symmetrisch. Dadurch ergibt sich $M_T = 0$. Weiters folgt daraus, dass der Schubflussverlauf im schrägen Querschnittsteil linear und in den beiden anderen Querschnittsteilen quadratisch sein muss.

Wählt man die eingeschlitzte Stelle des geschlossenen Profils und damit den Ursprung der Laufkoordinate s an einem Schnittpunkt mit der Symmetrieachse, so ergibt sich aufgrund der Symmetrie von Anordnung und Belastung: $T_0 = 0$

$$S_y(s_1) = 30,0 \cdot (-3,11) = -93,3 \text{ cm}^3$$

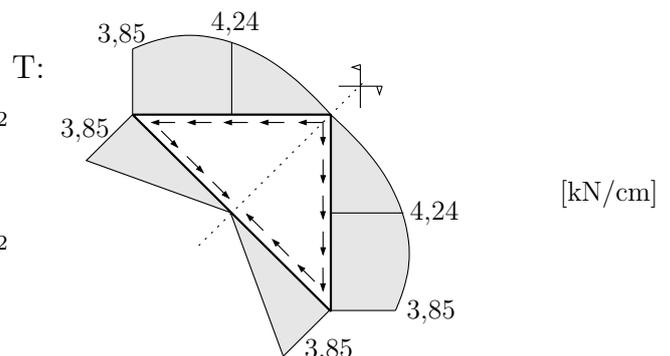
$$S_z(s_1) = 30,0 \cdot (-10,61) = -318,3 \text{ cm}^3$$

$$\rightarrow T(s_1) = 4,24 \text{ kN/cm} \rightarrow \tau(s_1) = 2,12 \text{ kN/cm}^2$$

$$S_y(s_2) = -93,3 + 30,0 \cdot 11,89 = 263,4 \text{ cm}^3$$

$$S_z(s_2) = -318,3 + 30,0 \cdot (-10,61) = -636,6 \text{ cm}^3$$

$$\rightarrow T(s_2) = 3,85 \text{ kN/cm} \rightarrow \tau(s_2) = 1,92 \text{ kN/cm}^2$$



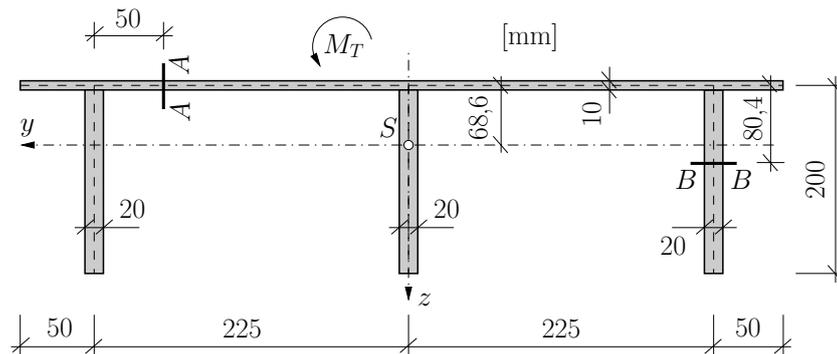
3. Kolloquium WS2011/2012

2. Beispiel: Schubspannungen zufolge Torsion

Angabe:

Gegeben ist ein geschweißtes Stahlprofil (siehe Abbildung), mit der Querschnittsfläche A und den Hauptflächenmomenten 2. Ordnung I_y und I_z (siehe Tabelle). Die Profilabmessungen in der Abbildung sind in Millimeter angegeben und beziehen sich auf die Profilmittellinien. Im betrachteten Querschnitt wirkt ein Torsionsmoment mit $M_T = 15 \text{ kNm}$ (siehe Abbildung).

$A =$	175 cm^2
$I_y =$	$7776,0 \text{ cm}^4$
$I_z =$	$54404,6 \text{ cm}^4$



Gesucht:

- Bestimmen Sie die Koordinaten des Schubmittelpunkts (y_M/z_M).

Hinweis: Es ist günstig, die Punkte B und A so zu wählen, dass bei der Berechnung der Integrale möglichst wenig Flächen zu überlagern sind (Symmetrieachse und/oder Schnittpunkt möglichst vieler Mittellinien).

- Stellen Sie den Verlauf der Torsionsschubspannungen in den Schnitten A-A bzw. B-B grafisch dar.

Lösung:

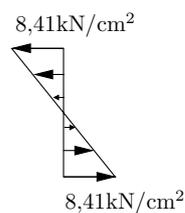
Schubmittelpunkt: $y_M = 0 \text{ cm}$ (Symmetrie), $z_M = -14,30 \text{ cm}$

$$I_T = \frac{1}{3} \sum l_i h_i^3 = \frac{1}{3} (55 \cdot 1^3 + 3 \cdot 20 \cdot 2^3) = 178,33 \text{ cm}^4$$

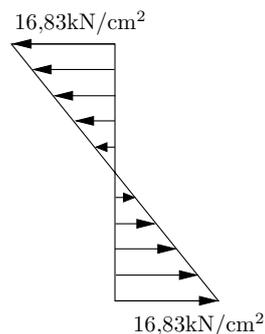
$$\tau_{A-A} = \frac{1500}{178,33} \cdot 1 = 8,41 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{B-B} = \frac{1500}{178,33} \cdot 2 = 16,83 \text{ kN/cm}^2$$

A-A:



B-B:

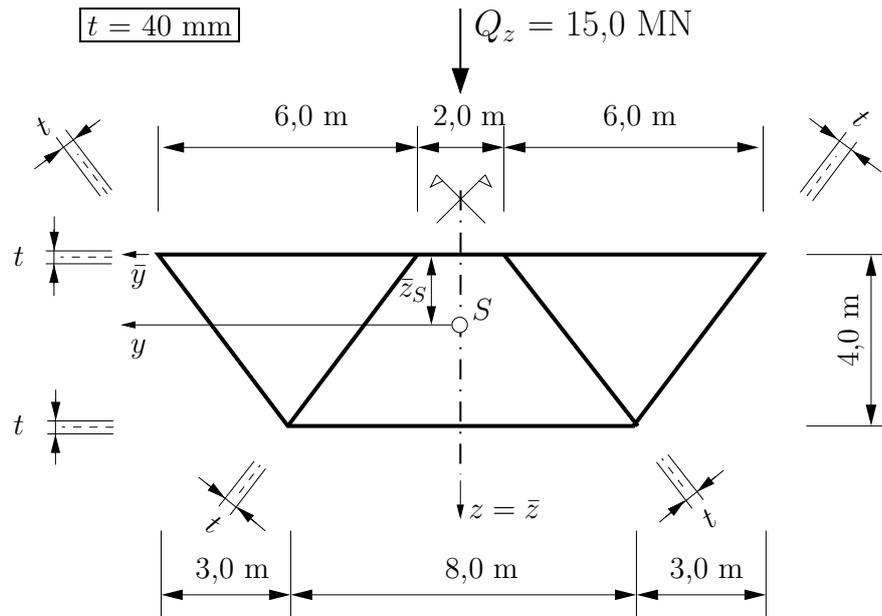


2. Kolloquium WS2011/2012

3. Beispiel: Schubspannungen zufolge Querkraft

Angabe:

Gegeben ist der Querschnitt eines Brückenträgers, der durch eine Querkraft Q_z beansprucht wird. Der Abstand des Schwerpunkts vom Ursprung des \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystems beträgt $\bar{z}_S = 1,7143$ m.



Gesucht:

Berechnen Sie die Querkraftschubspannungen und stellen Sie den Schubflussverlauf entlang der Mittellinien graphisch dar.

Lösung:

Einwirkende Schnittgröße: $Q_z = 15000$ kN

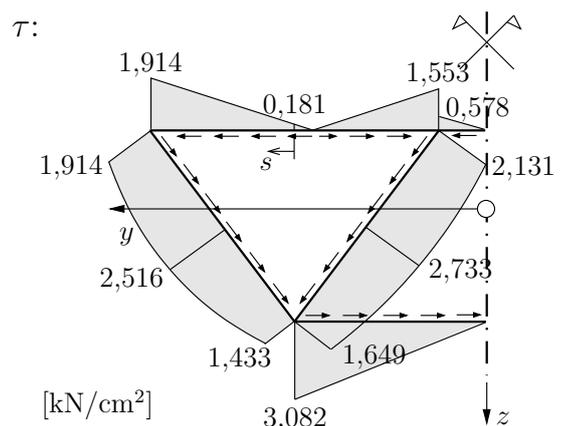
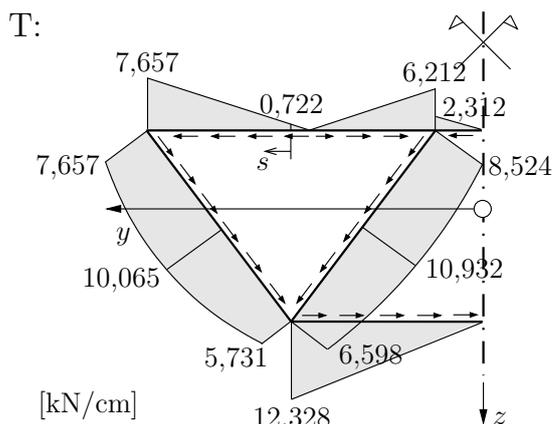
Trägheitsmoment: $I_y = 4,4497 \text{ m}^4 = 4,4497 \cdot 10^8 \text{ cm}^4$

Statisch unbestimmter Schubfluss:

$$\oint \frac{T^*(s)}{h(s)} ds = -288,875 \text{ kN/cm}$$

$$\oint \frac{1}{h(s)} ds = 400$$

$$\rightarrow T_0 = 0,722 \text{ kN/cm}$$

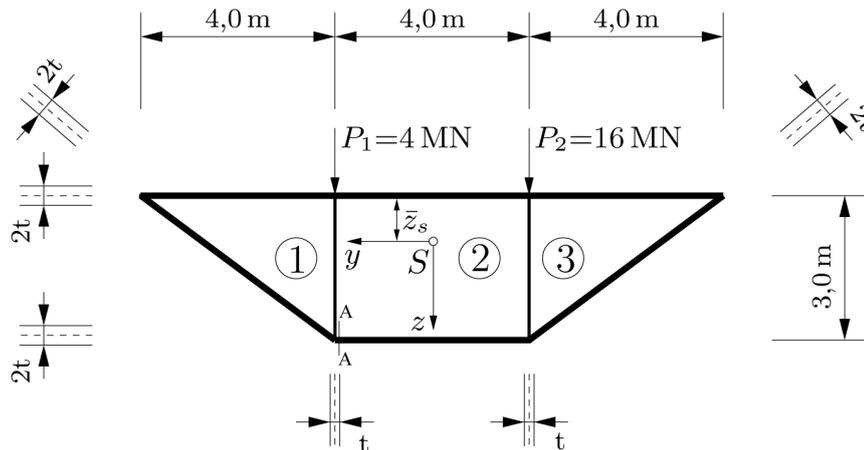


Ersatzkolloquium WS2010/2011

2. Beispiel: Schubspannungen

Angabe:

Gegeben ist der dargestellte Brückenquerschnitt, der durch zwei Einzelkräfte P_1 und P_2 beansprucht wird ($E=210000 \text{ N/mm}^2$, $\nu=0,3$, $P_1=4 \text{ MN}$, $P_2=16 \text{ MN}$, $t=3,0 \text{ cm}$, $\bar{z}_s=108,65 \text{ cm}$, $I_y=2,4268 \cdot 10^8 \text{ cm}^4$). Die Bemessungen beziehen sich auf die Mittellinien der Bleche.



Gesucht:

1. Berechnen Sie den resultierenden Schubspannungsverlauf im **Schnitt A**.
2. Ermitteln Sie die Blechdicke für einen Querschnitt ohne aussteifende Bleche (Bleche mit Wandstärke t), sodass bei gegebener Belastung dieselbe Verwindung wie für den gegebenen Querschnitt entsteht.

Lösung:

1. Schubspannungsverlauf im Schnitt A

$$Q_z = 20 \text{ MN}, \quad M_T = 24 \text{ MNm} \quad (\text{pos. Drehrichtung: im Uhrzeigersinn})$$

Schubfluss zufolge Q_z :

$$A_i = 1200 \text{ cm}^2, \quad S_{y_i} = 229620 \text{ cm}^3, \quad T^{Q_z} = -18,92 \text{ kN/cm}$$

Schubflüsse zufolge M_T :

$$T_1^{M_T} = T_3^{M_T} = 432,43 \text{ kN/m}, \quad T_2^{M_T} = 567,57 \text{ kN/m}; \quad \vartheta = 5,2981 \text{ rad/m}$$

Resultierende Schubspannung (konstant über Dicke):

$$\tau_A = \tau_Q + \tau_{M_T} = -3,15 + 0,95 = -2,20 \text{ kN/cm}^2 \quad \boxed{\leftarrow} = 2,20 \text{ kN/cm}^2 \quad \boxed{\rightarrow}$$

2. Blechstärke für einzelligen Querschnitt mit $\vartheta = 5,2981 \text{ rad/m}$

$$\vartheta = \frac{M_T}{G I_T} \quad \text{mit} \quad I_T = \frac{4 A_u^2}{\oint \frac{ds}{h(s)}} \quad \rightarrow \quad h = 6,329 \text{ cm}$$

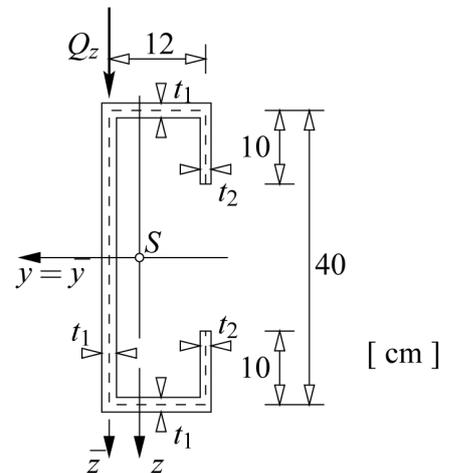
2. Kolloquium WS2010/2011

3. Beispiel: Ermitteln der Lage des Schubmittelpunktes

Angabe:

Gegeben ist ein Stabquerschnitt, der durch eine Querkraftkomponente Q_z belastet ist (siehe Abbildung).

- Die Koordinaten des Querschnittsschwerpunkts lauten im \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystem $S(-4,1/\pm 0,0)$ [cm]
- Das Flächenmoment 2. Ordnung um die y -Achse ist zu $I_y = 37\,023\text{ cm}^4$ gegeben.
- Für die Querkraft Q_z gilt: $Q_z = 50\text{ kN}$
- Weiters gilt: $t_1 = 2\text{ cm}$ und $t_2 = 1,5\text{ cm}$.



Gesucht sind

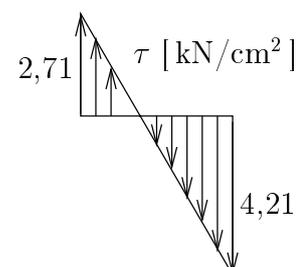
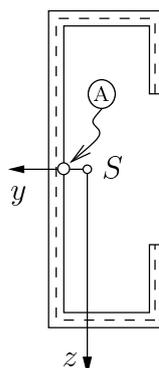
1. die Koordinaten des Schubmittelpunktes des Querschnitts im y - z -Koordinatensystem.
2. Geben Sie die Koordinaten jenes Querschnittspunkts an, an dem die maximale Schubspannung auftritt. Bezeichnen Sie diesen Punkt mit \textcircled{A} .
3. Stellen Sie den Verlauf der Schubspannungen entlang jenes Schnittes normal zur Profilmittellinie maßstäblich dar, der durch den Punkt \textcircled{A} geht.

Lösung:

1. Koordinaten des Schubmittelpunktes: $M(10,78\text{ cm}/0\text{ cm})$

2. Punkt mit der maximalen Schubspannung:

3. Verlauf der Schubspannungen entlang des Schnittes durch \textcircled{A}

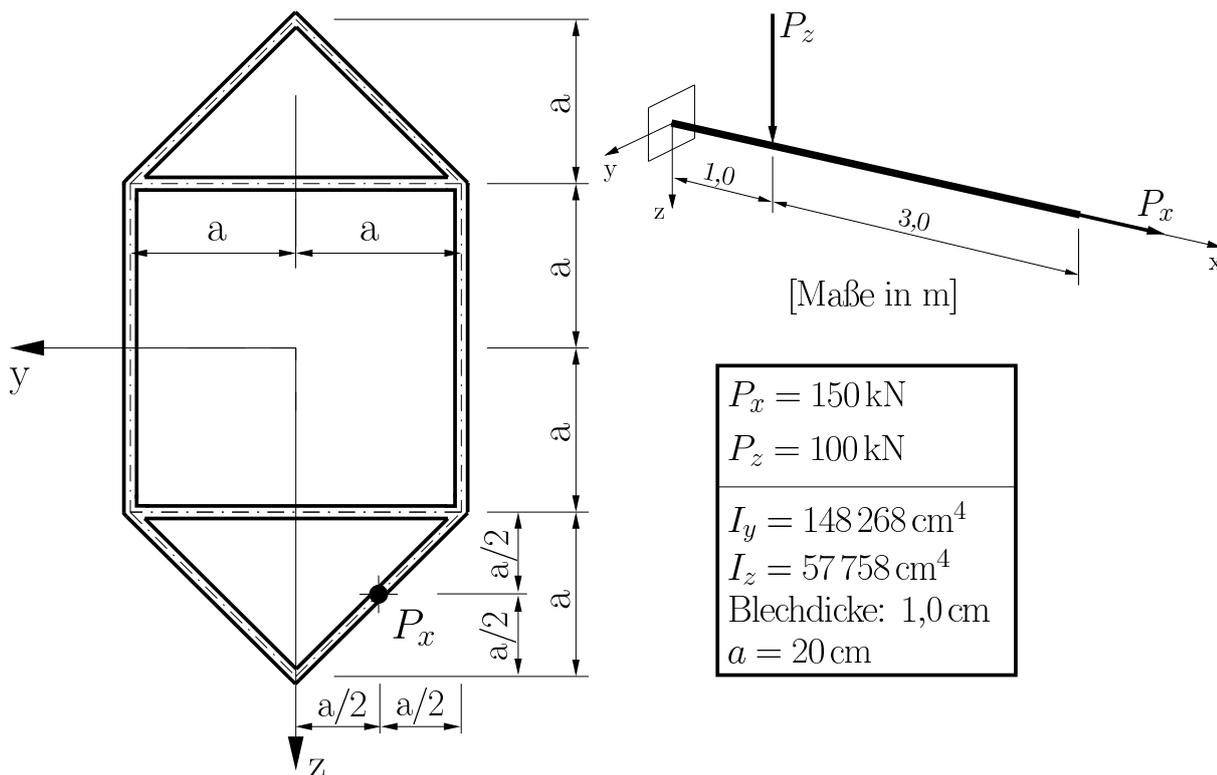


2. Kolloquium WS2009/2010

1. Beispiel: Träger unter Querkraft- und Normalkraftbeanspruchung

Angabe:

Gegeben ist ein dreizelliger Hohlkastenquerschnitt der durch eine Kraft $P_z = 100 \text{ kN}$ und eine Zugkraft $P_x = 150 \text{ kN}$ beansprucht wird. Die Blechdicke $t = 1,0 \text{ cm}$ ist über den gesamten Querschnitt konstant. Die Querschnittskennwerte des Trägers können der nebenstehenden Tabelle entnommen werden.



Gesucht:

1. Berechnen Sie an der Einspannstelle des Trägers für den gegebenen Querschnitt die Lage der Nulllinie und geben Sie diese als Funktion der y -Koordinate an.
2. Berechnen Sie an der Einspannstelle des Trägers für die gegebene Beanspruchung die größte Zug- bzw. Druckspannung und markieren Sie die zugehörigen Querschnittspunkte am Angabeblatt.
3. Berechnen Sie die Kernfläche des Querschnitts und tragen Sie die Koordinaten der Kernpunkte in einer Skizze ein.
4. Berechnen Sie den Schubspannungsverlauf im Querschnitt zufolge Querkraft und stellen Sie diesen sowohl qualitativ als auch quantitativ dar.

Lösung:

- Die Biegemomente M_y und M_z berechnen sich für unter der gegebenen Belastung zu:

$$M_y = -100 \cdot 100 + 150 \cdot 30 = -5500 \text{ kNcm} \quad M_z = 150 \cdot 10 = 1500 \text{ kNcm}$$

- Die Gleichung der Nulllinie berechnet sich gemäß Gleichung (16.26) des Übungsskriptums zu:

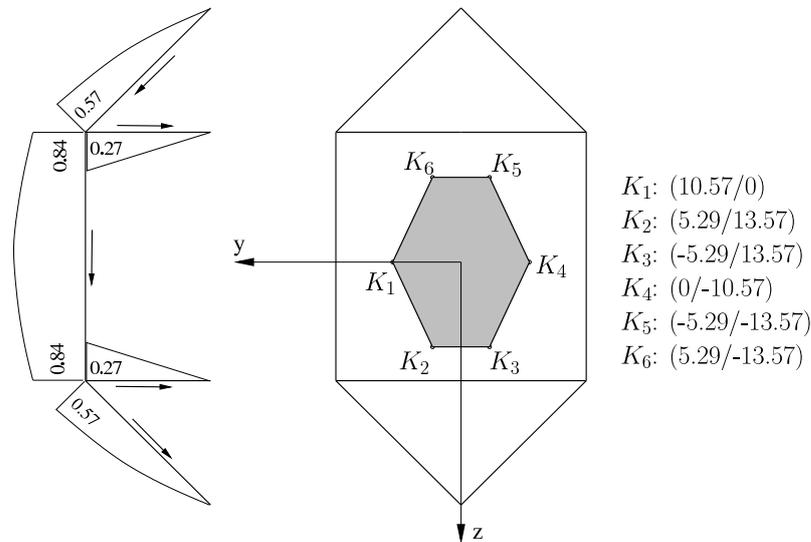
$$z = -0.70y + 14.80$$

mit $I_{yz} = 0$, $\tan \gamma_y = -0.27$ und der Querschnittsfläche $A = 273.14 \text{ cm}^2$.

- Unter Berücksichtigung der Zugkraft P_x berechnet sich die größte Druck- bzw. Zugspannung im untersten bzw. obersten Punkt des Querschnitts zu:

$$\text{Pkt. A (0/40): } \sigma_x = -0.93 \text{ kN/cm}^2 \quad \text{Pkt. B (0/-40): } \sigma_x = 2.03 \text{ kN/cm}^2$$

- Mit den Quadraten der Trägheitsradien $i_z^2 = 211.46 \text{ cm}^2$ und $i_y^2 = 542.83 \text{ cm}^2$ ergeben sich die Kernpunkte des Querschnitts zu (siehe Abbildung):
- Unter Ausnutzung der Symmetrie des Querschnitts ergeben sich die Schubspannungen zu- folge Querkraft wie folgt:



Korrektur der Grafik:

$$K_4 = (-10.57/0)$$

Der Wert der Schubspannungen im oberen horizontalen Blech beträgt -0,27.

Lösung:

- Das einwirkende Torsionsmoment berechnet sich zu $M_T = 20 \cdot 40 + 15 \cdot 20 = 1100 \text{ kNm}$.
- Die drei Formänderungsbedingungen für die drei Zellen lauten:

$$\begin{aligned} T_1 \cdot \int_{C_1} \frac{ds}{h(s)} - T_2 \cdot \int_{C_{1,2}} \frac{ds}{h(s)} &= 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot A_1 \\ - T_1 \cdot \int_{C_{1,2}} \frac{ds}{h(s)} + T_2 \cdot \int_{C_2} \frac{ds}{h(s)} - T_3 \cdot \int_{C_{2,3}} \frac{ds}{h(s)} &= 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot A_2 \\ - T_2 \cdot \int_{C_{2,3}} \frac{ds}{h(s)} + T_3 \cdot \int_{C_3} \frac{ds}{h(s)} &= 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot A_3 \end{aligned}$$

- Mit $\int_{C_1} \frac{ds}{h(s)} = \int_{C_3} \frac{ds}{h(s)} = 96.57$, $\int_{C_2} \frac{ds}{h(s)} = 160.0$, $\int_{C_{1,2}} \frac{ds}{h(s)} = \int_{C_{2,3}} \frac{ds}{h(s)} = 40.0$, $A_1 = A_3 = 40\,000 \text{ mm}^2$ und $A_2 = 160\,000 \text{ mm}^2$ folgt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 96.57 & -40.0 & 0 & -2G \cdot 40\,000 \\ -40.0 & 160.0 & -40.0 & -2G \cdot 160\,000 \\ 0 & -40.0 & 96.57 & -2G \cdot 40\,000 \\ 80\,000 & 320\,000 & 80\,000 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.1 \cdot 10^7 \end{pmatrix},$$

aus dem sich die gesuchten Schubfluß sowie die Querschnittsverwindung wie folgt berechnen:

$$T_1 = T_3 = 17.56 \text{ N/mm} \quad T_2 = 25.59 \text{ N/mm} \quad \text{sowie} \quad \vartheta = 1.0507 \cdot 10^{-7} \text{ rad/mm}$$

- Der Drillwiderstand ist $I_T = 130865.138 \text{ cm}^4$

Querschnitt 2: Umformen der Gleichung ($I_T = (4 \cdot Au)^2 \cdot t^2 / (4 \cdot a \cdot (1 + \sqrt{(2)}))$) für den Drillwiderstand für den einzelligen geschlossenen Querschnitt führt auf $h_{erf}^{QS2} = 10.97 \text{ mm}$.

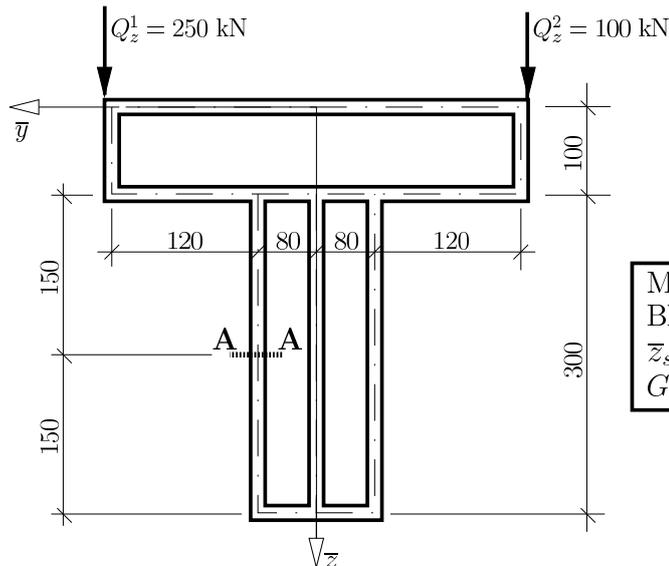
Querschnitt 3: Umformen der Gleichung für den Drillwiderstand für den offenen Querschnitt ($I_T = 1/3 \cdot (4 \cdot a \cdot (1 + \sqrt{(2)}) \cdot t^3)$) führt auf $h_{erf}^{QS3} = 126.68 \text{ mm}$.

2. Kolloquium WS2008/2009

3. Beispiel: Schubspannungen in einem mehrzelligen Hohlquerschnitt

Angabe:

Gegeben ist ein dünnwandiger dreizelliger Hohlquerschnitt gemäß Abbildung. Der Querschnitt wird am linken Rand durch die Querkraftkomponente $Q_z^1 = 250 \text{ kN}$ und am rechten Rand durch eine Querkraft $Q_z^2 = 100 \text{ kN}$ belastet.



Maße in $[mm]$!
Blechdicke $b=12 \text{ mm}$ im gesamten Querschnitt
 $\bar{z}_s = 16.46 \text{ cm}$
 $G = 81000 \text{ MPa}$ ($1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$)

Gesucht:

1. Berechnen Sie die Schubspannung zufolge Querkraft im **Schnitt A**.
2. Berechnen Sie die Schubspannung zufolge Torsionsmoment im **Schnitt A**.

Lösung:

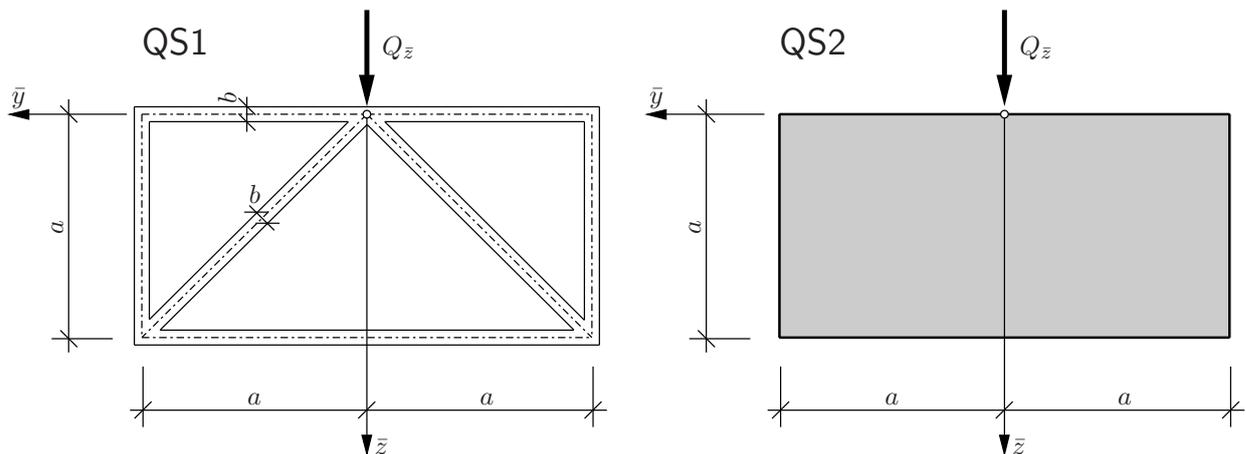
3.
 - Einwirkende Schnittgrößen: $Q = 350 \text{ kN}$ $M_T = 3090 \text{ kNcm}$
 - Trägheitsmoment: $I_y = 44989,6 \text{ cm}^4$
 - Statisch unbestimmter Schubfluss: $T_0 = -0,39 \text{ kN/cm}$
 - Schubfluss zufolge Querkraft im Schnitt A-A: $T_A = -3,52 \text{ kN/cm}$
 - Schubspannung zufolge Querkraft im Schnitt A-A: $\tau_A = 2,93 \text{ kN/cm}^2$
 - Schubflüsse zufolge Torsionsmoment:
 $T_1 = 1,56 \text{ kN/cm}$ und $T_2 = T_3 = 1,91 \text{ kN/cm}$
 - Schubspannung zufolge Torsionsmoment im Schnitt A-A: $\tau_A = 1,60 \text{ kN/cm}^2$.

2. Kolloquium WS2007/2008

2. Beispiel: Schubspannungen zufolge Querkraft

Angabe:

Gegeben ist ein dreizelliger Hohlquerschnitt (QS1) mit einer konstanten Profildicke ($b = 2 \text{ cm}$) und ein Vollquerschnitt (QS2) gemäß Abbildung ($a = 30 \text{ cm}$). Auf beide Querschnitte wirkt in der \bar{z} -Achse eine Querkraft $Q_{\bar{z}} = 100 \text{ kN}$.

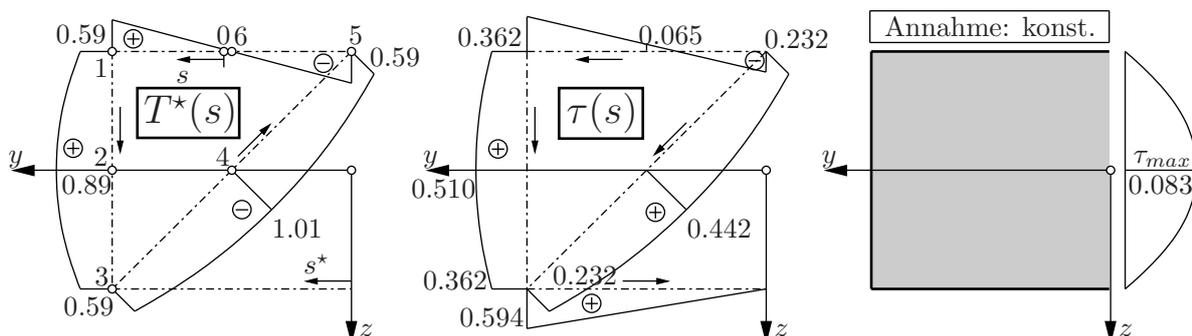


Gesucht:

1. Geben Sie für beide Querschnitte (QS1 und QS2) die Koordinaten des Schwerpunkts im \bar{y} - \bar{z} System an.
2. Stellen Sie den Schubspannungsverlauf für beide Querschnitte (QS1 und QS2) graphisch dar. Es kann angenommen werden, dass sich die Schubspannungen konstant über die Breite verteilen.
3. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse (QS1 und QS2) durch Bestimmung der Querkraft $Q_{\bar{z}}$ aus den berechneten Schubspannungen.

Lösung:

2.
 - $S_1(\bar{y}, \bar{z}) = S_2(\bar{y}, \bar{z}) = S(0, 15)$
 - $I_y = 75808 \text{ cm}^4$; symmetrisch, aufschneiden: $T_0 = -(-6.656)/51.213 = +0.130 \text{ kN/cm}$
 - QS1: $2 \cdot 2.0 \left[\frac{30}{6} (0.362 + 4 \cdot 0.510 + 0.362) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{30\sqrt{2}}{6} (0.232 + 4 \cdot 0.442 + 0.232) \right] \approx 100 \text{ kN}$
 QS2: $Q_z = \int_A \tau_{xz} dA = 60 \frac{30}{6} (0 + 4 \cdot 0.083 + 0) = 100 \text{ kN}$

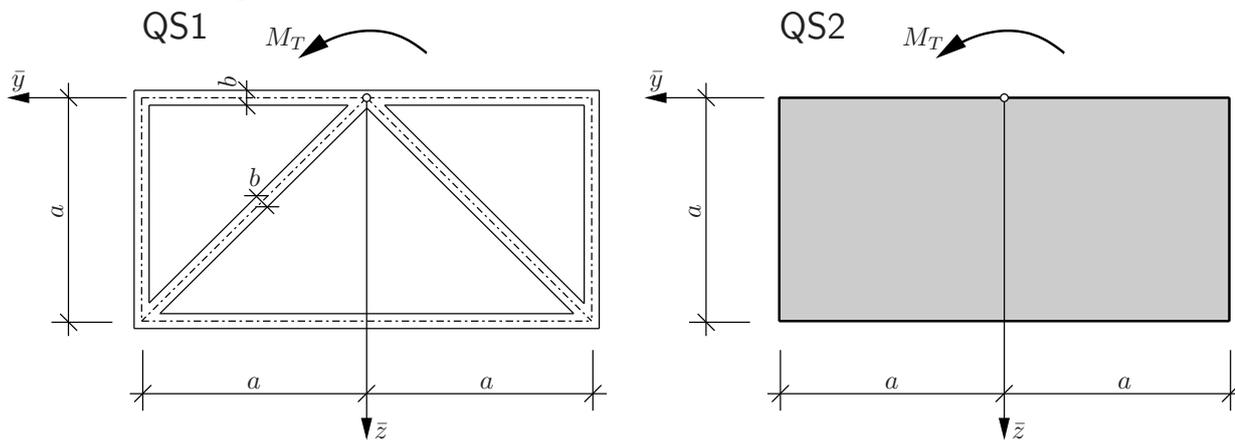


2. Kolloquium WS2007/2008

3. Beispiel: Schubspannungen zufolge Torsion

Angabe:

Gegeben ist ein dreizelliger Hohlquerschnitt (QS1) mit einer konstanten Profildicke ($b = 2 \text{ cm}$) und ein Vollquerschnitt (QS2) gemäß Abbildung ($a = 30 \text{ cm}$). Auf beide Querschnitte wirkt ein Torsionsmoment $M_T = 30 \text{ kNm}$.



Gesucht:

1. Stellen Sie den Schubspannungsverlauf für den Hohlquerschnitt (QS1) graphisch dar.
2. Bestimmen Sie die maximalen Schubspannungen für beide Querschnitte (QS1 und QS2) und markieren Sie in den Abbildungen, wo diese auftreten.
3. Die gemessene gegenseitige Verdrehung des Anfangs- und Endquerschnitts eines 2 m langen Stabes beträgt $1/10^\circ$. Bestimmen Sie den Schubmodul der beiden Querschnitte (QS1 und QS2).

Lösung:

3.
 - $A_1 = A_3 = 450 \text{ cm}^2 \Rightarrow T_1 = T_3$; $A_2 = 2 A_1$
Gleichungssystem aus Gleichgewichtsbedingung und 2 Verträglichkeitsbedingungen:
 $T_1 = 0.737 \text{ kN/cm}$, $T_2 = 0.930 \text{ kN/cm}$, $2 G \theta A_1 = 18.028 \text{ kN/cm}$
 - QS1: $\tau_{max} = 0.465 \text{ kN/cm}^2$ am unteren Flansch
QS2: $\tau_{max} = 0.226 \text{ kN/cm}^2$ Schnittpunkte der horizontalen Erzeugenden mit z -Achse
 - $\vartheta = \chi/x = 8.7266 \cdot 10^{-6} \text{ rad/cm}$
QS1: aus $2 G \theta A_1 \Rightarrow G = 2295.4 \text{ kN/cm}^2$; QS2: $I_T = 370980 \text{ cm}^4$, $G = 926.7 \text{ kN/cm}^2$

Abschnitt VI

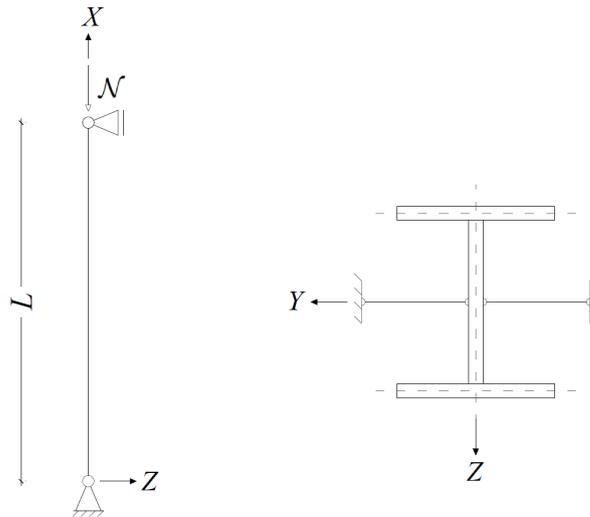
STABTHEORIE – KNICKSTÄBE UND STABILITÄT

2. Kolloquium WS2020/2021

10. Beispiel: Knickstab – Versagensarten

Angabe:

Gegeben ist eine Stahlstütze mit einer Länge L und einem I-förmigen Querschnitt, welche durch eine Normalkraft $\mathcal{N} = 2500 \text{ kN}$ belastet wird (siehe Skizze). Die Stütze kann als *perfekter* EULER-Stab 2 modelliert werden. Die Querschnittsfläche $A = 114 \text{ cm}^2$, die Stablänge $L = 900 \text{ cm}$, $I_y = 8466 \text{ cm}^4$, die Materialparameter für Stahl sind gegeben mit: $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ und $f_y = 23,5 \text{ kN/cm}^2$.



Gesucht:

- Bestimmen Sie die Versagensart der Stahlstütze, also ob unter den gewählten Annahmen Stabilitäts- und/oder Materialversagen eintritt.
 - Es tritt Materialversagen auf.
 - Es tritt Stabilitätsversagen auf.*
 - Es tritt weder Material- noch Stabilitätsversagen auf.
 - Es tritt sowohl Material- als auch Stabilitätsversagen auf.

Lösung:

- Damit es zu keinem **Stabilitätsversagen** kommt, muss gelten $|\mathcal{N}| \leq |\mathcal{N}_{cr}|$.
Für $L = 900 \text{ cm}$ erhalten wir:

$$|\mathcal{N}_{cr}| = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \cdot 8466}{900^2} = 2166,2685 \text{ kN} \leq 2500 \text{ kN} = \mathcal{N}$$

Es kommt also zu einem Stabilitätsversagen.

- Damit es zu keinem **Materialversagen** kommt, muss gelten $|\pi_{xx}| \approx |\sigma_{xx}| \leq f_y$.

$$|\pi_{xx}| = \frac{\mathcal{N}}{A} = \frac{2500}{114} = 21,9298 \approx |\sigma_{xx}| \leq 23,5 = f_y$$

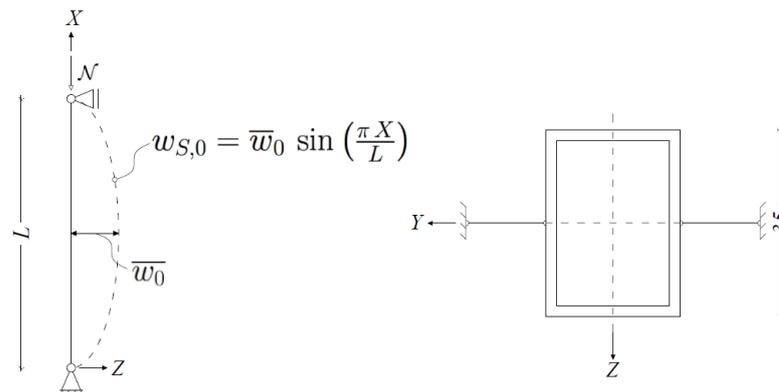
Es kommt also zu keinem Materialversagen.

2. Kolloquium WS2020/2021

11. Beispiel: Knickstab – Maximales Biegemoment

Angabe:

Gegeben ist eine Stahlbetonstütze mit Länge L und einem „Rechteckrohr“-Querschnitt, welche durch eine Normalkraft $\mathcal{N} = 1800 \text{ kN}$ belastet wird (siehe Skizze). Die Stütze kann als *imperfekter* EULER-Stab 2 mit Vorverformung ident zur Knickform und $\bar{w}_0 = 1,5 \text{ cm}$ modelliert werden. Die Querschnittsfläche $A = 116 \text{ cm}^2$, die Stablänge $L = \langle 500 \rangle \text{ cm}$, $I_y = 20443,67 \text{ cm}^4$, die Materialparameter sind gegeben mit: $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$, und $f_y = 23,5 \text{ kN/cm}^2$.



Gesucht ist das maximale Biegemoment \mathcal{M}_y in [kNcm].

Lösung:

Das Biegemoment ermittelt man wie folgt:

$$\mathcal{M}_y = -\frac{d^2 w_{S,f}(X)}{dX^2} \cdot EI_y$$

$$w_{S,f}(X) = w_{S,0} \frac{\beta}{1-\beta} = \bar{w}_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi X}{L}\right) \cdot \frac{\beta}{1-\beta}$$

$$\frac{d^2 w_{S,f}(X)}{dX^2} = -\bar{w}_0 \sin\left(\frac{\pi X}{L}\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot \frac{\beta}{1-\beta}$$

$$\mathcal{M}_y = \bar{w}_0 \sin\left(\frac{\pi X}{L}\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot \frac{\beta}{1-\beta} \cdot EI_y$$

mit $\beta = |\mathcal{N}|/|\mathcal{N}_{cr}|$ und $|\mathcal{N}_{cr}| = (\pi^2 EI_y)/L^2 \Rightarrow \beta = \frac{1800 \text{ kN} \cdot (500 \text{ cm})^2}{\pi^2 \cdot 21000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 20443,67 \text{ cm}^4} = 0,1062$

Das maximale Biegemoment tritt bei $\mathbf{X} = \mathbf{L}/2$ auf und wir erhalten¹:

$$\mathcal{M}_y = \bar{w}_0 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot \frac{\beta}{1-\beta} \cdot EI_y = 1,5 \cdot \left(\frac{\pi}{500 \text{ cm}}\right)^2 \cdot \frac{\beta}{1-\beta} \cdot EI_y =$$

$$= 1,5 \cdot \left(\frac{\pi}{500 \text{ cm}}\right)^2 \cdot \frac{0,1062}{1-0,1062} \cdot 21000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 20443,67 \text{ cm}^4 = 3020,7398 \text{ kNcm}$$

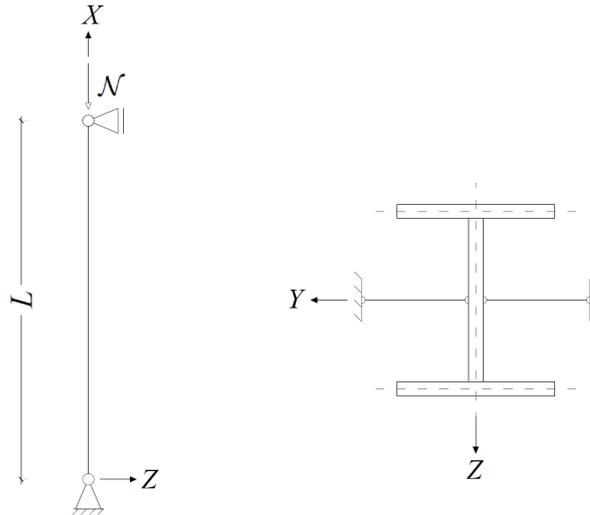
¹mit $\sin(\pi/2) = 1$

Ersatzkolloquium WS2020/2021

9. Beispiel: Max. Normalkraft – kein Stabilitätsversagen

Angabe:

Gegeben ist eine Stahlstütze mit einer Stablänge L und einem I-förmigen Querschnitt, welche durch eine Normalkraft \mathcal{N} belastet wird (siehe Skizze). Die Stütze kann als *perfekter* EULER-Stab 2 modelliert werden. Die Stablänge beträgt $L = 350 \text{ cm}$, $I_y = 8466 \text{ cm}^4$, die Materialparameter für Stahl sind gegeben mit: $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$, und $f_y = 23,5 \text{ kN/cm}^2$.



Gesucht: Bestimmen Sie die betragsmäßig maximale Normalkraft $|\mathcal{N}_{max}|$ in [kN], bei der kein Stabilitätsversagen eintritt.

Lösung:

Damit es zu keinem **Stabilitätsversagen** kommt, muss gelten $|\mathcal{N}| \leq |\mathcal{N}_{cr}|$.

$$|\mathcal{N}_{cr}| = |\mathcal{N}_{max}| = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 8466 \text{ cm}^4}{(350 \text{ cm})^2} = 14323,8979 \text{ kN}$$

2. Kolloquium WS2017/2018

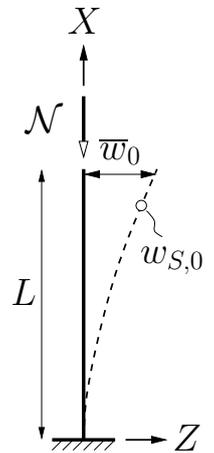
3. Beispiel: Knickstab

Angabe:

Gegeben ist eine unten eingespannte, 250 cm hohe Stahlstütze mit kreisrundem Hohlquerschnitt (Außendurchmesser $d = 8,89$ cm, Querschnittsfläche $A = 13,2$ cm² und Trägheitsmoment $I = 116$ cm⁴). Die Belastung beträgt $\mathcal{N} = 75$ kN. Der Elastizitätsmodul beträgt $E = 21000$ kN/cm².

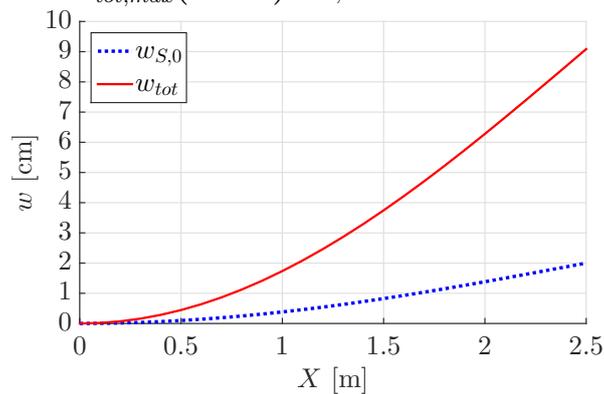
Gesucht:

- Bestimmen Sie die Knicklast der Stütze. Kommt es bei der gegebenen Belastung zu einem Knickversagen? Bestimmen Sie jene Stablänge L , bei der die Belastung exakt der Knicklast entspricht.
- Bestimmen Sie bei einer Vorverformung ident zur Knickform des EULER-Falls 1 (siehe Skizze), mit $\bar{w}_0 = 2,0$ cm, die betragsmäßig maximale Spannung $\max|\pi_{xx}|$.
- Zeichnen Sie die Position der betragsmäßig maximalen Spannung $\max|\pi_{xx}|$ in der Skizze am Angabeblatt ein. Stellen Sie an dieser Position den Verlauf von π_{xx} im Querschnitt grafisch dar.
- Bestimmen Sie für die gegebene Belastung die maximale Verformung quer zur Stabachse und stellen Sie den Verlauf der Vorverformung $w_{S,0}$ und der Gesamtverformung w_{tot} in einer Skizze *maßstäblich* dar.
- Bestimmen Sie die Maximalwerte von Biegemoment und Querkraft und stellen Sie den Verlauf des Biegemoments \mathcal{M} und der Querkraft \mathcal{Q} in einer Skizze *maßstäblich* dar.



Lösung:

- a. Knicklast $\mathcal{N}_{cr} = 96,17 \text{ kN} \geq 75 \text{ kN}$, es kommt zu keinem Knickversagen
maximale Stablänge $L_{max} = 283,08 \text{ cm}$
- b. $\mathcal{M} = -EI \cdot \bar{w}_0 \cdot \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cdot \frac{\beta}{1-\beta} = -681,43 \text{ kNcm}$ an der Einspannstelle und somit
 $\max|\pi_{xx}| = |\mathcal{N}|/A + |\mathcal{M}|/I \cdot (d/2) = 31,79 \text{ kN/cm}^2$
- c. Position: an der Einspannstelle, π_{xx} verläuft linear mit
 $\pi_{xx}(Z = -d/2) = 20,43 \text{ kN/cm}^2$ und $\pi_{xx}(Z = d/2) = -31,79 \text{ kN/cm}^2$
- d. $w_{S,0,max}(X = L) = 2,00 \text{ cm}$ und $w_{tot,max}(X = L) = 9,09 \text{ cm}$



- e. \mathcal{M}_{max} siehe Punkt b,
 $\mathcal{Q}_{max} = \mathcal{N} \cdot \bar{w}_0 \cdot \left(\frac{\pi}{2L}\right) \cdot \frac{\beta}{1-\beta} = -3,34 \text{ kNcm}$

