LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton’schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke’sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

Technische Mechanik 1&2

Newton II

Technische Mechanik 1: Statik

$$\Sigma F = m \cdot a \quad a = 0 \quad \boxed{\Rightarrow \Sigma F = 0} \quad v = konst.$$

$$\Sigma M = J \cdot \alpha \quad \alpha = 0 \quad \boxed{\Rightarrow \Sigma M = 0} \quad \omega = konst.$$

Technische Mechanik 2: Dynamik

$$\Sigma F = m \cdot a$$

$$\Sigma M = J \cdot \alpha$$

Translation	Rotation
$F: Kraft\ [N]$	$M: Drehmoment\ [N \cdot m]$
$m: Masse\ [kg]$	$J: Trägheitsmoment\ [kg \cdot m^2]$
$a: Beschleunigung\ [m/s^2]$	$\alpha: Winkelbeschleunigung\ [Rad/s^2]$
$v: Geschwindigkeit\ [m/s]$	$\omega: Winkelgeschwindigkeit\ [Rad/s]$

TM1(Statik)=Newton II ohne Dynamik

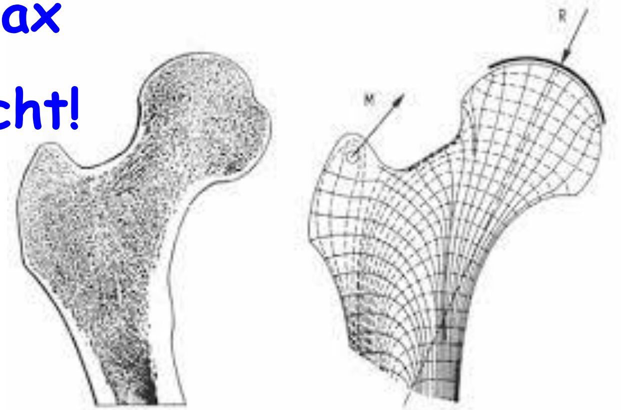
$$\boldsymbol{TM1 = \frac{Physik1}{2}\,!}$$

Technische Mechanik 1

- Koordinatensystem
- Winkel
- Länge
- Kraft
- Moment
- Spannung
- Material
- Festigkeit
- Steifigkeit

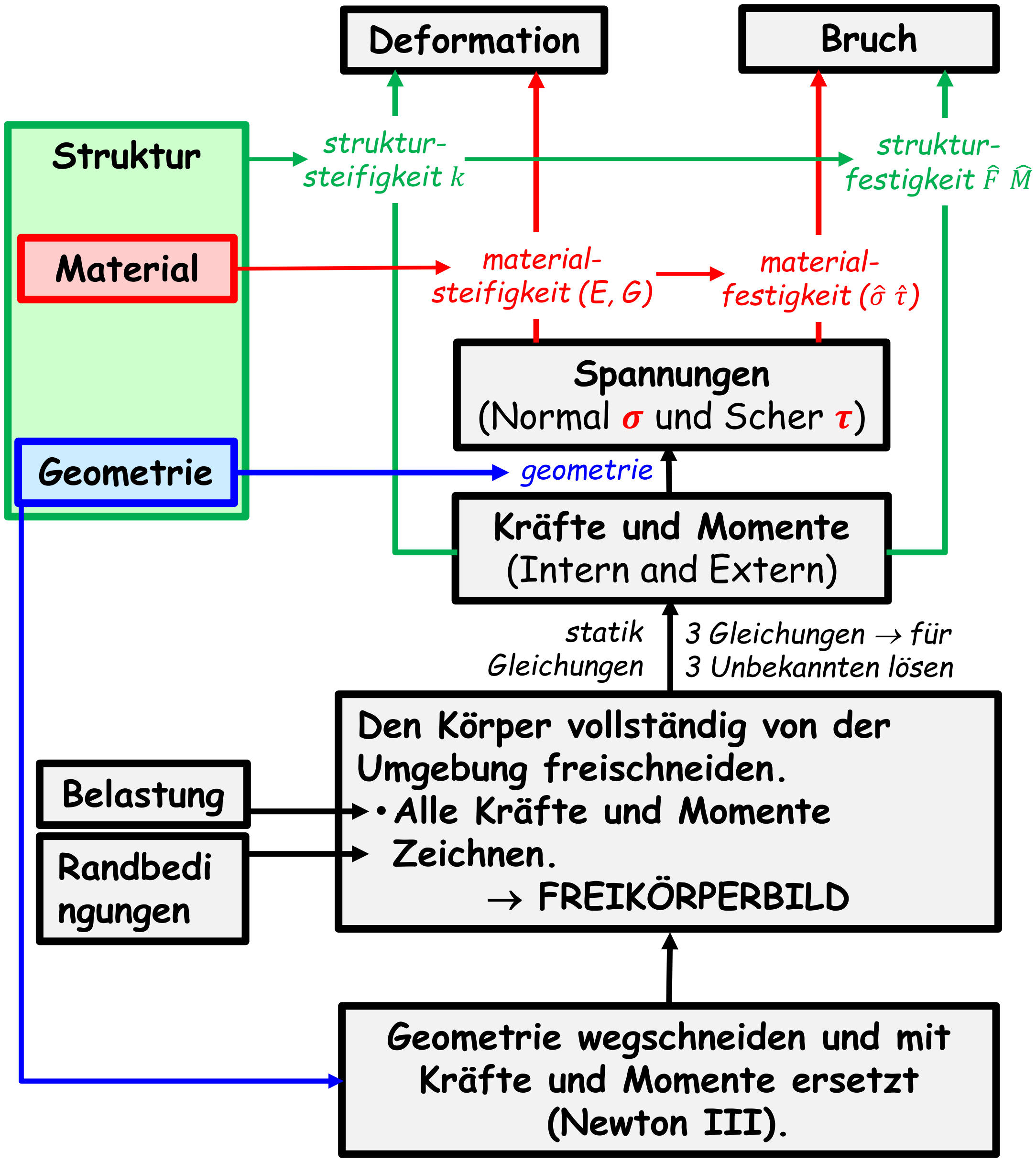
- Frage stellen
- Wie groß ?
- Welchen Material ?
- Welchen Belastung ?
- Wie Teuer ?
- Wie Leicht ?
- Max Festigkeit/Min Gewicht!

- Funktion → Form
- Bone (Organisch): Max Festigkeit/Min Gewicht!
- → Beautiful!



Frage ?

Gegeben: ?



Frage: Wird die Stiftspitze abbrechen?

Gegeben: Geometrie
Material
Stift Masse (gemessen)
Fingerkräfte (gemessen)

Deformation

Bruch

Struktur

struktur-steifigkeit k

struktur-festigkeit $\hat{F}$ $\hat{M}$

Material

material-steifigkeit (E, G)

material-festigkeit ($\hat{\sigma}$ $\hat{\tau}$)

Spannungen (Normal σ und Scher τ)

Geometrie

geometrie

Kräfte und Momente (Intern und Extern)

statik Gleichungen

3 Gleichungen → für 3 Unbekannten lösen

Belastung

Randbedingungen

Den Körper vollständig von der Umgebung freischneiden.
- Alle Kräfte und Momente Zeichnen.

→ FREIKÖRPERBILD

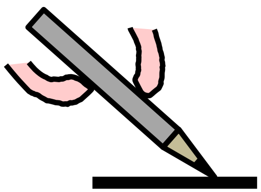
Geometrie wegschneiden und mit Kräfte und Momente ersetzt (Newton III).

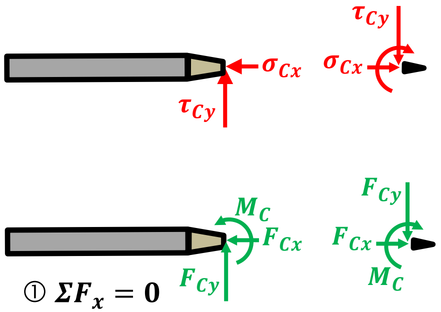
$$\left.\begin{matrix} F_C > \hat{F} \\ M_C > \hat{M} \end{matrix}\right\} \text{Bruch!}$$

$$\left.\begin{matrix} \sigma_{Cx} > \hat{\sigma} \\ \tau_{Cy} > \hat{\tau} \end{matrix}\right\} \text{Bruch!}$$

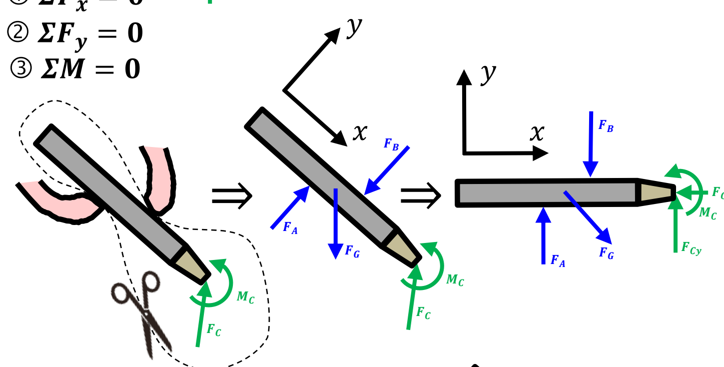
$\sigma = F/A$

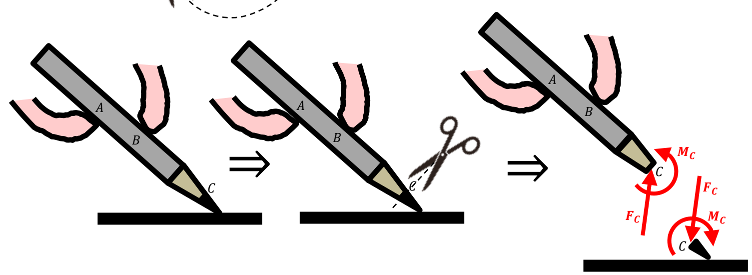
$\tau = F/A$





① $\Sigma F_x = 0$
② $\Sigma F_y = 0$
③ $\Sigma M = 0$





Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

Signifikanten Stellen

Aufgabe: Signifikanten Stellen (SS)

Gegeben: 12345,6789	Gegeben: 9876,5432	Gegeben: 0,0095927025
Gesucht: 8ss	Gesucht: 8ss	Gesucht: 8ss
7ss	7ss	7ss
6ss	6ss	6ss
5ss	5ss	5ss
4ss	4ss	4ss
3ss	3ss	3ss
2ss	2ss	2ss
1ss	1ss	1ss

- Angemessene Anzahl von signifikanten Stellen (3 für ein Ergebnis, mindestens 4 für Zwischenberechnungen).

Aufgabe: Signifikanten Stellen (SS)

	Gegeben: 12345,6789	Gegeben: 9876,5432	Gegeben: 0,0095927025
Gesucht: 8ss	12345,679	9876,5432	0,0095927025
7ss	12345,68	9876,543	0,009592703
6ss	12345,7	9876,54	0,00959270
5ss	12346	9876,5	0,0095927
4ss	12350	9877	0,009593
3ss	12300	9880	0,00959
2ss	12000	9900	0,0096
1ss	10000	10000	0,01

- Angemessene Anzahl von signifikanten Stellen (3 für ein Ergebnis, mindestens 4 für Zwischenberechnungen).

Aufgabe: Signifikanten Stellen (SS)

Gegeben: 12345,6789

Gesucht:
8ss $1{,}2345679\times10^{4}$
7ss $1{,}234568\times10^{4}$
6ss $1{,}23457\times10^{4}$
5ss $1{,}2346\times10^{4}$
4ss $1{,}235\times10^{4}$
3ss $1{,}24\times10^{4}$
2ss $1{,}2\times10^{4}$
1ss 1×10^{4}

Gegeben: 9876,5432

Gesucht:
8ss $9{,}8765432\times10^{3}$
7ss $9{,}876543\times10^{3}$
6ss $9{,}87654\times10^{3}$
5ss $9{,}8765\times10^{3}$
4ss $9{,}877\times10^{3}$
3ss $9{,}88\times10^{3}$
2ss $9{,}9\times10^{3}$
1ss 1×10^{4}

Gegeben: 0,0095927025

Gesucht:
8ss $9{,}5927025\times10^{-3}$
7ss $9{,}592703\times10^{-3}$
6ss $9{,}59270\times10^{-3}$
5ss $9{,}5927\times10^{-3}$
4ss $9{,}593\times10^{-3}$
3ss $9{,}59\times10^{-3}$
2ss $9{,}6\times10^{-3}$
1ss 1×10^{-2}

- Angemessene Anzahl von signifikanten Stellen (3 für ein Ergebnis, mindestens 4 für Zwischenberechnungen).

Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

4. 2D Vektore

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton'schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

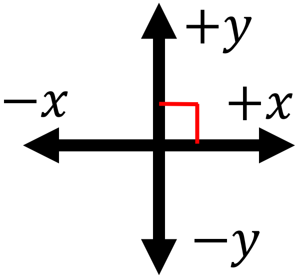
12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke'sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

Vektoren Zerlegen

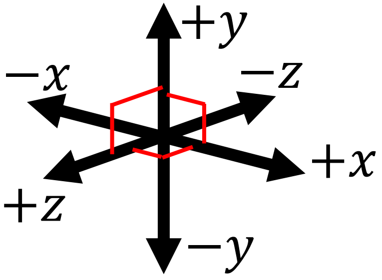
Vektoren: Betrag und Richtung (Koordinatensystem nötig)

- **1D (1 Dimension): Vektoren in eine Richtung**

- **2D (2 Dimensionen): Vektoren in 2 Richtungen – in eine Ebene**



- **3D (3 Dimensionen): Vektoren in 3 (senkrechte) Richtungen**



Vektoren Zerlegen

Vektoren in 2D

$F = 10N, \theta = 30°$

$\boldsymbol{F_x} = 8{,}66N, \boldsymbol{F_y} = 5N$

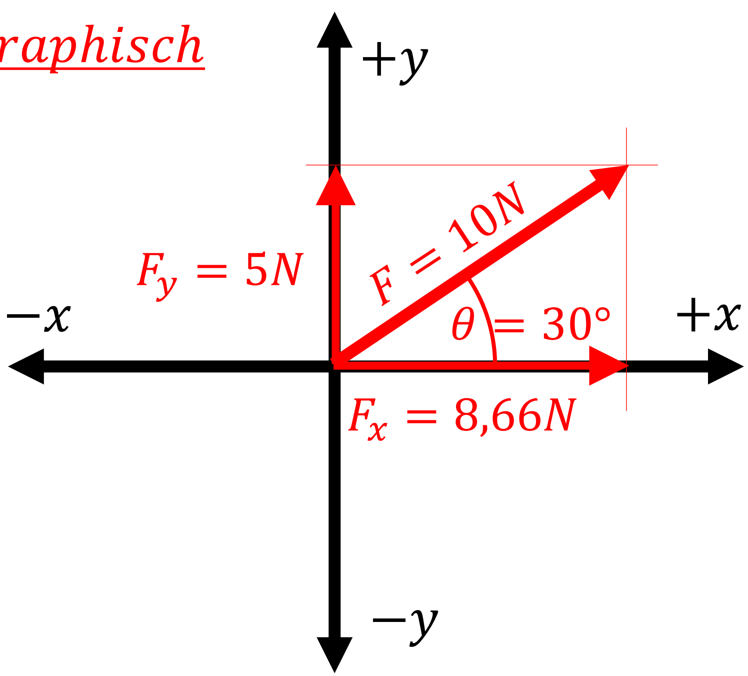
$\boldsymbol{F} = 8{,}66N\boldsymbol{i} + 5N\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 8{,}66N \\ 5N \end{pmatrix}$

$\underline{Schriftlich}$ - 4 Möglichkeiten

$(im\ gegebenen\ Koordinatensystem)$

$\underline{Graphisch}$



$\boldsymbol{F} = 10N, \theta = 30°$

$F_x = F \cdot cos(\theta)$

$F_y = F \cdot sin(\theta)$

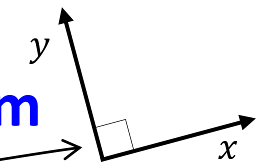
$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2}$

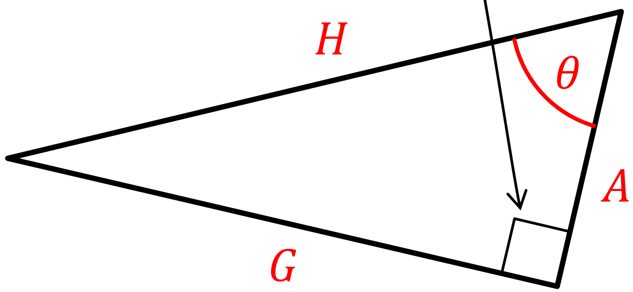
$\theta = arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$

$\boldsymbol{F_x} = 8{,}66N, \boldsymbol{F_y} = 5N$

Vektoren Zerlegen

Dreieck mit 90° Winkel - Wegen 90° 2D Koordinatensystem





H: Hypothenuse
(Längste Seite gegenüber von 90° Winkel)

G: Gegenkathete
(gegenüber von Winkel θ)

A: Ankathete
(neben Winkel θ)

$$sin(\theta) = G/H \qquad \Rightarrow G = H \cdot sin(\theta)$$

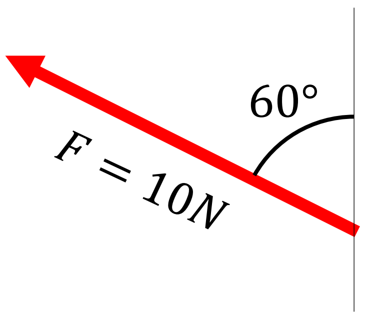
$$cos(\theta) = A/H \qquad \Rightarrow A = H \cdot cos(\theta)$$

$$tan(\theta) = G/A \qquad \Rightarrow \theta = \mathrm{arctan}(G/A)$$

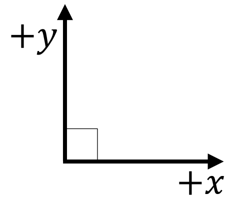
$$H = \sqrt{G^2 + A^2}$$

2D Vektoren Zerlegen - Beispiele

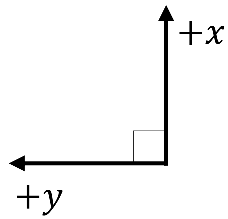
Vektor zerlegen



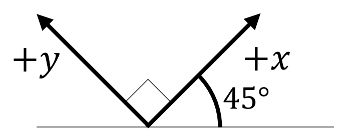
Koordinatensystem 1



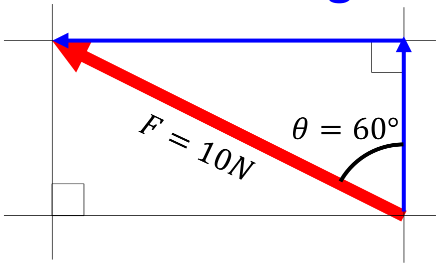
Koordinatensystem 2



Koordinatensystem 3

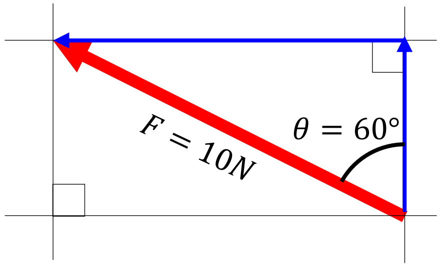


Zerlegte Komponenten



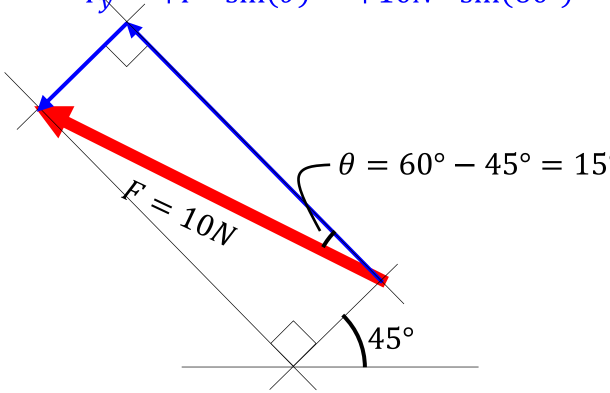
$$F_x = -F \cdot \sin(\theta) = -10N \cdot \sin(60°) = -8{,}66N$$

$$F_y = +F \cdot \cos(\theta) == +10N \cdot \cos(60°) = 5N$$



$$F_x = +F \cdot \cos(\theta) = +10N \cdot \cos(60°) = 5N$$

$$F_y = +F \cdot \sin(\theta) = +10N \cdot \sin(60°) = 8{,}66N$$



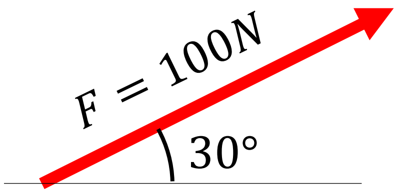
$$F_x = -F \cdot \sin(\theta) = -10N \cdot \sin(15°) = -2{,}59N$$

$$F_y = +F \cdot \cos(\theta) = +10N \cdot \cos(15°) = 9{,}66N$$

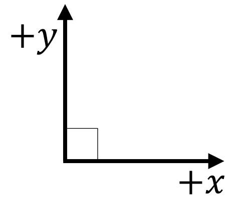
2D Vektoren Zerlegen - Aufgaben

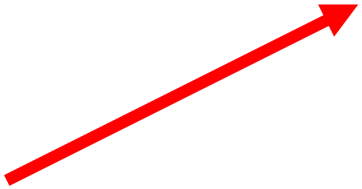
Zerlegte Komponenten

Vektor zerlegen



Koordinatensystem 1

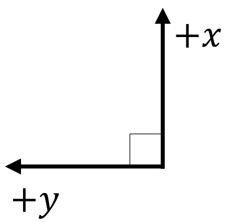


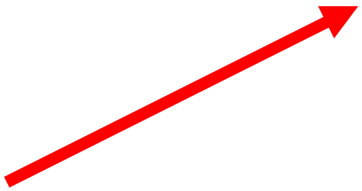


$F_x =$

$F_y =$

Koordinatensystem 2

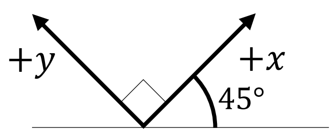


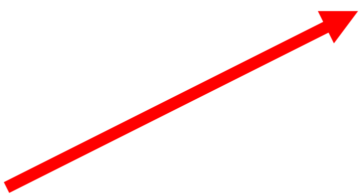


$F_x =$

$F_y =$

Koordinatensystem 3



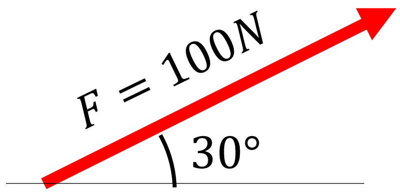


$F_x =$

$F_y =$

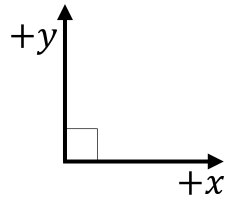
2D Vektoren Zerlegen - Aufgaben

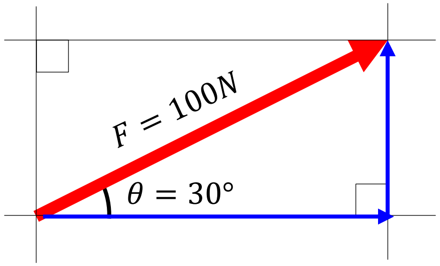
Vektor zerlegen



Zerlegte Komponenten

Koordinatensystem 1

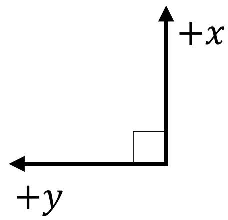


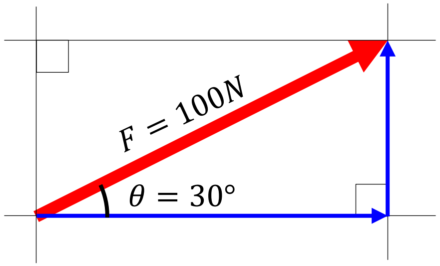


$F_x = +F \cdot \cos(\theta) = 86{,}6N$

$F_y = +F \cdot \sin(\theta) = 50{,}0N$

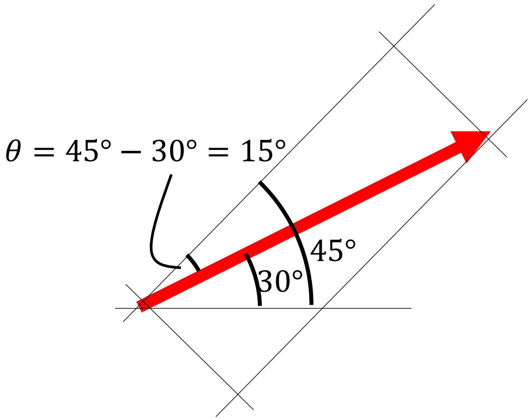
Koordinatensystem 2



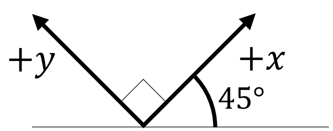


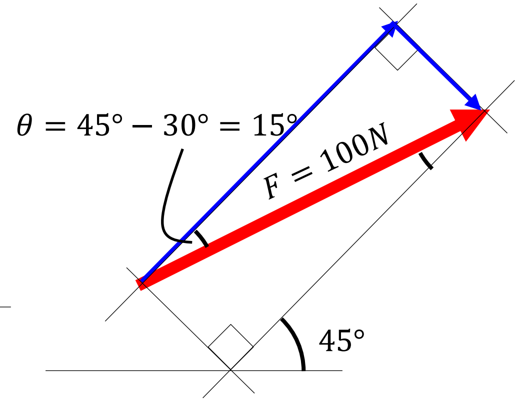
$F_x = +F \cdot \sin(\theta) = 50N$

$F_y = -F \cdot \cos(\theta) = -86{,}6N$



Koordinatensystem 3





$F_x = +F \cdot \cos(\theta) = 96{,}6N$

$F_y = -F \cdot \sin(\theta) = -25{,}9N$

Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

5. ZENTRALKRAFTSYSTEME

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

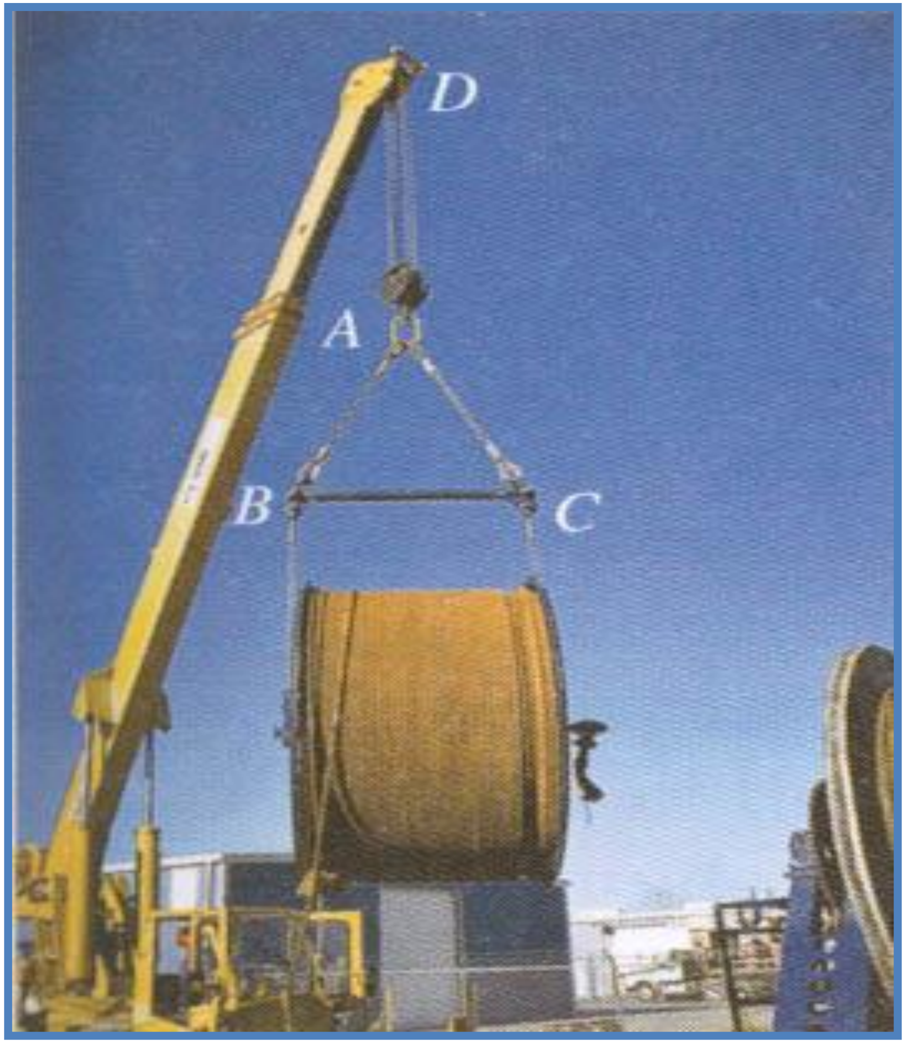
Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton'schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke'sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

ANWENDUNGEN



Für eine gegebene Masse, was sind die Kräfte in den Kabeln AB und AC ?

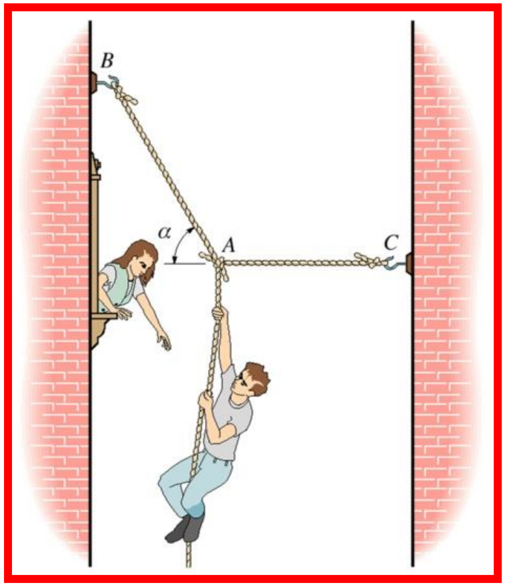
...und in Stab BC ?

...Fest genug ?

...Wieviel Masse kann angehoben werden ?

LÖSUNGSVERFAHREN

1. Problem sorgfältig lesen. Was ist **gegeben**; Was ist **gewollt** ? **Annahmen** verdeutlichen, wenn nötig.
2. Notwendige **Diagramme** zeichnen und gegebene **Werte in Tabellenform** angeben.
3. Relevante **Gründsätze nennen** und anwenden.
4. Gleichungen algebraisch **lösen**. **Dimesionen einheitlich** feststellen. Numerisch lösen und Antwort mit **nicht mehr signifikanten Stellen als gegebene Daten** angeben.
5. Lösung **sinnvoll?**



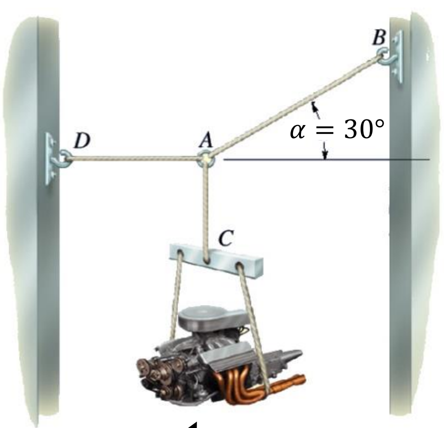
2D PARTIKELGLEICHGEWICHT

<u>Ziele Heute:</u>

Studenten können:

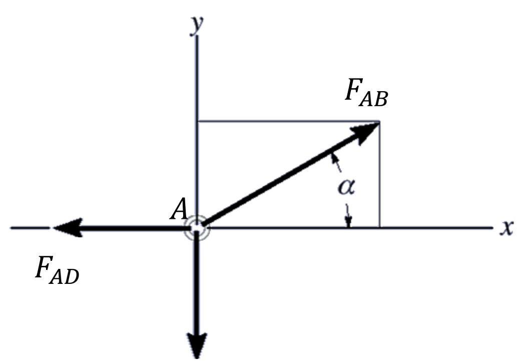
a) Freikörperbild zeigen,

b) Gleichgewichtsgleichungen anwendung in 2D.



$F_G = 2452N$

Freikörperbild



$F_G = 2452N$

Motormasse 250kg

$F_G = \mathrm{m} \cdot \mathrm{g} = 250\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\mathrm{m/s^2} \; = 2452\mathrm{N}$

2D Statik Lösungsmuster

Statik: Gleichungen Newton II

$\Sigma \mathrm{F} = \mathrm{m} \cdot a = 0$ (Beschleunigung=0)

in 2D bei 1 Punkt

① $\Sigma F_x = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

Aufgaben: 2 'Unbekannten' gesucht

Lösungen: Drei Schritte:

i) <u>Freikörperbild</u>

ii) <u>Gleichungen (2D Statik)</u>

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_{AB} \cdot \cos(\alpha) - F_{AD} = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{AB} \cdot \sin(\alpha) - F_G = 0$

iii) <u>Gleichungen lösen</u>

② lösen für F_{AB}:

$F_{AB} = F_G / \sin(\alpha)$

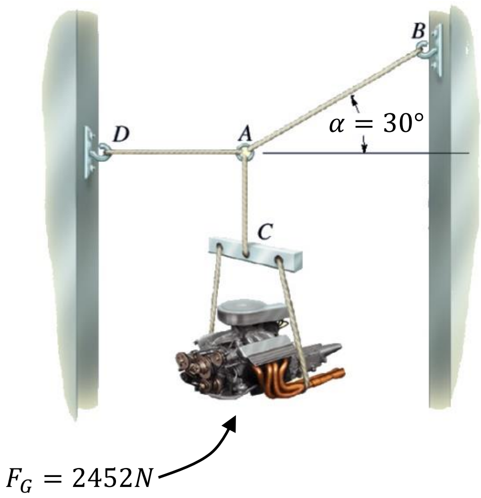
$\Rightarrow F_{AB} = 2452N / \sin(30°) = 4900N$

① lösen für F_{AD}:

$\Rightarrow F_{AD} = F_{AB} \cdot \cos(\alpha) = 4904N \cdot \cos(30°) = 4250\mathrm{N}$

Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

2D PARTIKELGLEICHGEWICHT

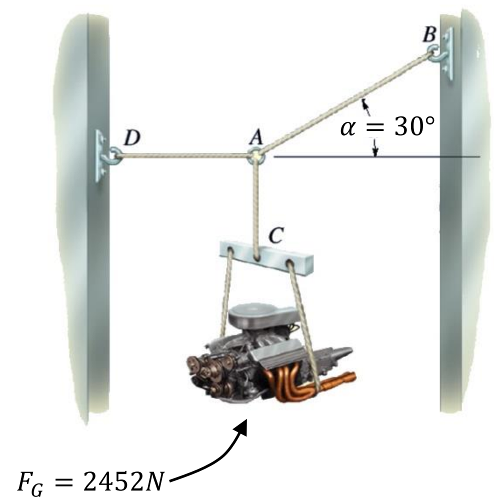


Das ganze System ist im Gleichgewicht (keine Beschleunigung): Dann ist auch Ring A im Gleichgewicht.

Für eine bekannte Motormasse:

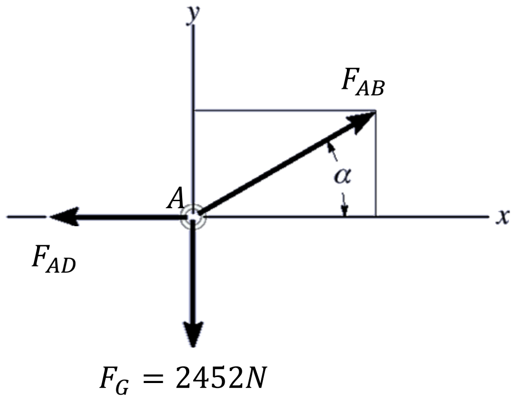
- Freikörperbild zeigen
- Gleichgewichtsgleichungen aufschreiben

FREIKÖRPERBILD



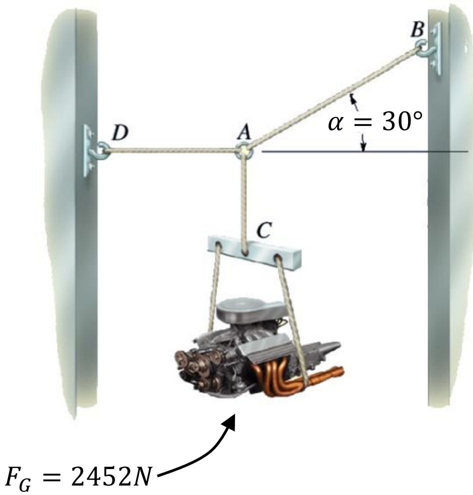
Was ? – Hier ist eine Skizze, die alle externe Kräfte zeigt, die auf einen Partikel wirken

Warum ? – Hilft Gleichungen aufzuschreiben, die bekannte und unbekannte Variablen in Beziehung setzen. (Normalerweise Kräfte und Winkeln).

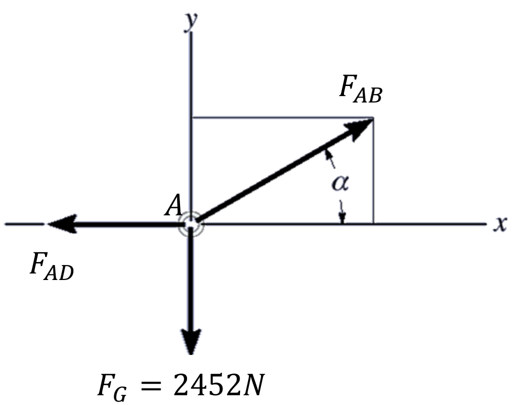


Wie ?

1. Partikel isolieren (Komplett Freischneiden)
2. Alle Kräfte zeigen, die auf den Partikel wirken
3. Jede Kraft <u>identifizieren</u>. Alle <u>bekannten</u> Größen und Richtungen zeigen. Alle <u>unbekannten</u> Größen und Richtungen als Variablen zeigen.
4. Koordinatensystem definieren

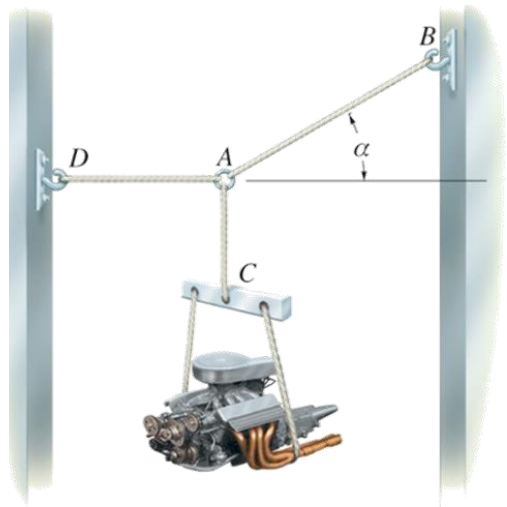


Motormasse 250kg



FKB A

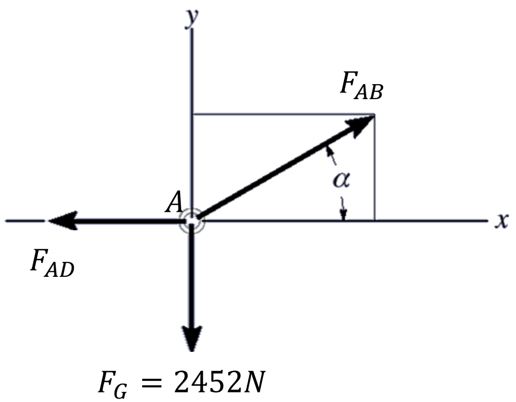
2D GLEICHGEWICHTSGLEICHUNGEN



Partikel A ist im Gleichgewicht: Summe der Kräfte bei A gleich Null.

$\Sigma \boldsymbol{F} = 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{F}_{AB} + \boldsymbol{F}_{AC} + \boldsymbol{F}_{AD} = 0$



<u>Vektorgleichung</u>

$\Sigma \boldsymbol{F} = 0$

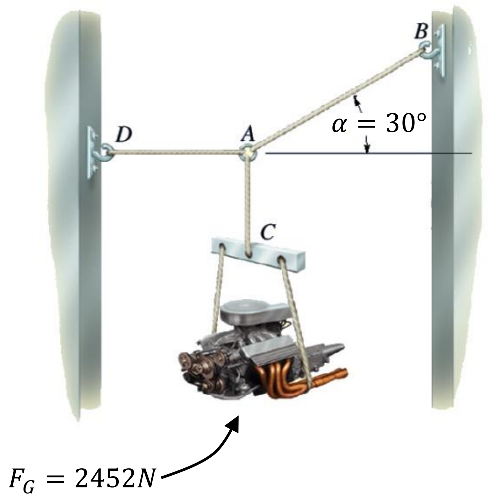
<u>Skalargleichungen</u>

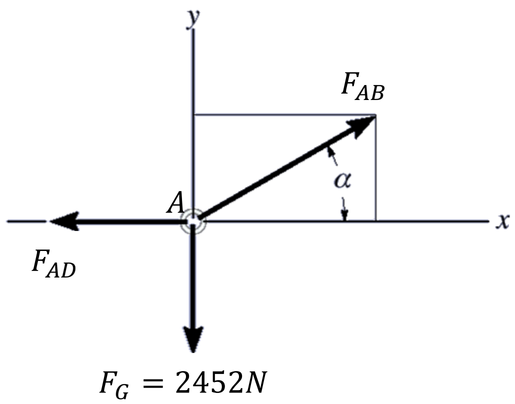
$\Sigma F_x = 0$ and $\Sigma F_y = 0$

ZWEI Skalare Gleichgewichtsgleichungen

$\Rightarrow$**ZWEI** unbekannte Variablen können berechnet werden.

BEISPIEL





Skalare Gleichgewichtsbedingungen:

① $\rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} \cdot \cos(\alpha) - F_{AD} = 0$

② $\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{AB} \cdot \sin(\alpha) - F_G = 0$

---

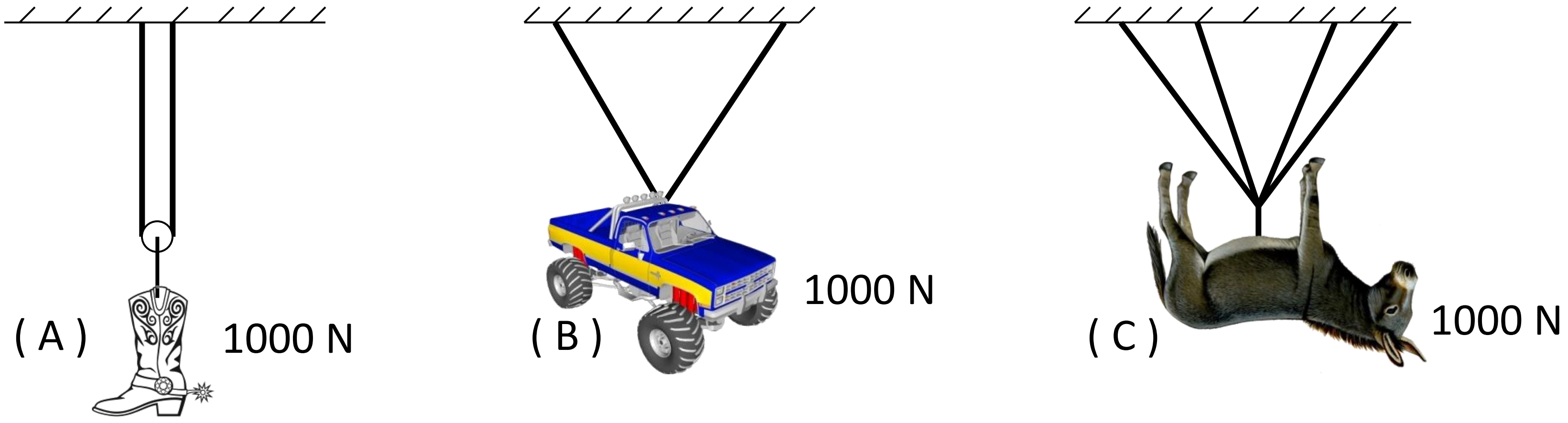
② lösen für F_{AB}:

$F_{AB} = F_G / \sin(\alpha) \Rightarrow F_{AB} = 2452N / \sin(30°) = 4900N$

① lösen für F_{AD}:

$F_{AD} = F_{AB} \cdot \cos(\alpha) = 4904N \cdot \cos(30°) = 4250\text{N}$

KONZEPTFRAGEN



1) Angenommen, dass das Seilgeometrie gegeben ist, in welchem Fall können die Seilkräfte nicht bestimmt werden ?

2) Warum?

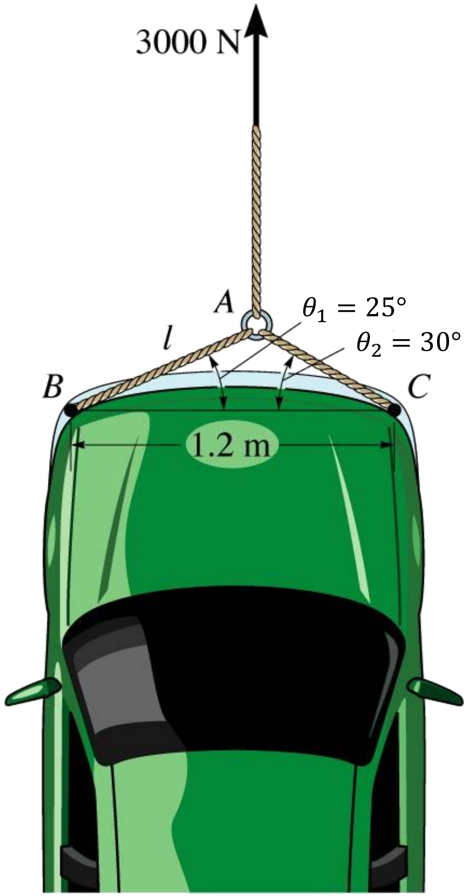
   A) Zu viel Gewicht.

   B) Kabel zu dünn.

   C) Mehr Unbekannte, als Gleichungen.

   D) Zu wenig Kabel für ein 1000 N Gewicht

AUFGABE



Gegeben : Fahrzeug wird mit konstanter Geschwindigkeit mit 3000N gezogen

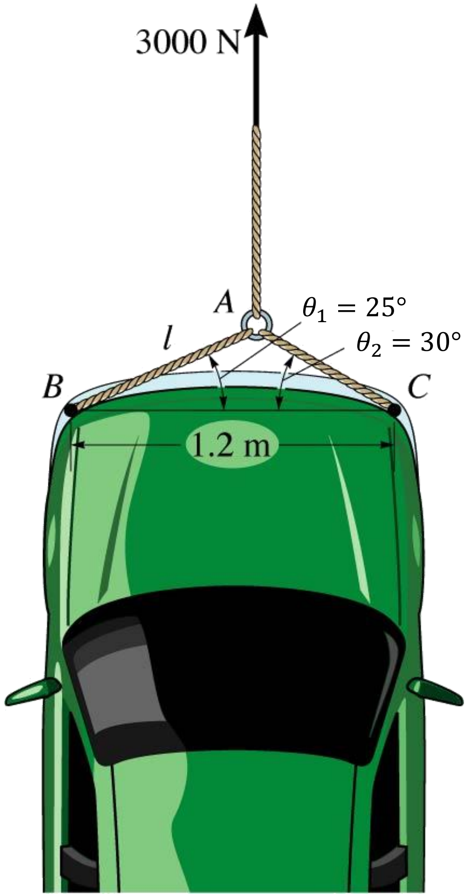
Suchen: Kräfte in Seile AB and AC.

Plan:

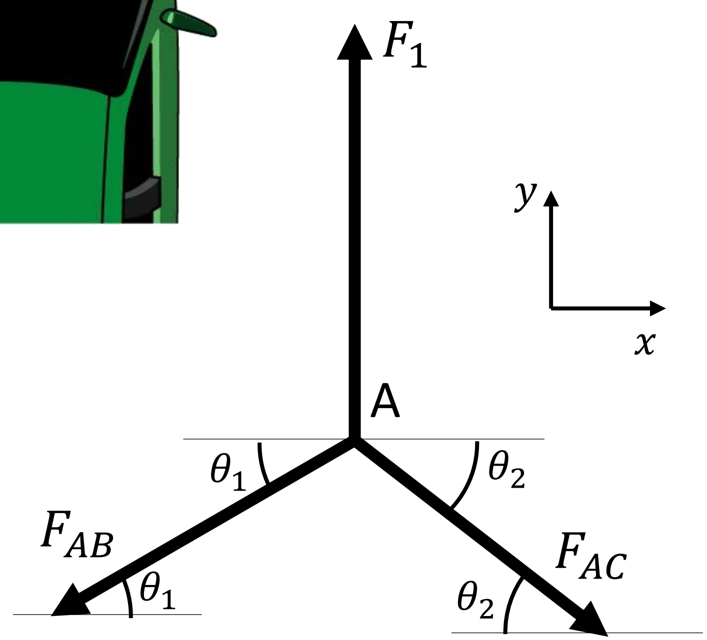
1. Freikörperbild für Punkt A.

2. Gleichgewichtsgleichungen für AB and AC

3. Gleichungen lösen Für F_{AB} und F_{Ac}



Freikörperbild



2D Statik Lösungsmuster

Statik: Gleichungen Newton II
$\Sigma F = m \cdot a = 0$ (Beschleunigung=0)

in 2D bei 1 Punkt
① $\Sigma F_x = 0$
② $\Sigma F_y = 0$

Aufgaben: 2 'Unbekannten' gesucht: F_{AB} und F_{AC}
Lösungen: Drei Schritte:

i) Freikörperbild

ii) Gleichungen (2D Statik)

① $\Sigma F_x = 0$
$\Rightarrow -F_{AB} \cdot \cos(\theta_1) + F_{AC} \cdot \cos(\theta_2) = 0$
② $\Sigma F_y = 0$
$\Rightarrow -F_{AB} \cdot \sin(\theta_1) - F_{AC} \cdot \sin(\theta_2) + F_1 = 0$

iii) Gleichungen lösen

① umschreiben für F_{AB}:
$F_{AB} = F_{AC} \cdot \cos(\theta_2) \,/\, \cos(\theta_1)$
und in ②
$F_{AC} = (F_1 - F_{AB} \cdot \sin(\theta_1)) / \sin(\theta_2)$
$\Rightarrow F_{AC} = (F_1 - F_{AC} \cdot \cos(\theta_2) \,/\, \cos(\theta_1) \cdot \sin(\theta_1)) / \sin(\theta_2)$
$\Rightarrow F_{AC} = F_1 / \sin(\theta_2) - F_{AC} \cdot \cos(\theta_2) \,/\, \cos(\theta_1) \cdot \sin(\theta_1) \,/\, \sin(\theta_2)$
$\Rightarrow F_{AC} = F_1 / \sin(\theta_2) - F_{AC} \cdot \tan(\theta_1)/\tan(\theta_2)$
$\Rightarrow F_{AC}\,(1 + \tan(\theta_1)/\tan(\theta_2)) = F_1 / \sin(\theta_2)$
$\Rightarrow F_{AC} = F_1 / \sin(\theta_2) / (1 + \tan(\theta_1)/\tan(\theta_2))$
$\Rightarrow F_{AC} = 3000N / \sin(30°) / (1 + \tan(25°)/\tan(30°)) = 3319N$
① lösen für F_{AB}:
$F_{AB} = F_{AC} \cdot \cos(\theta_2) \,/\, \cos(\theta_1)$
$\Rightarrow F_{AC} = 3319N \cdot \cos(30°) \,/\, \cos(25°) = 3172N$

Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

5.2 Zentralkraftsysteme mit 2 Körper

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

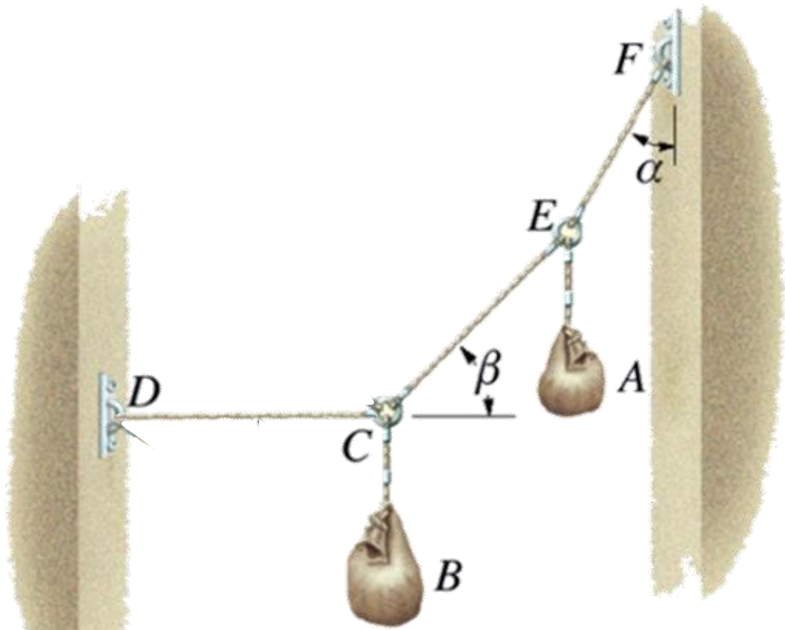
Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton’schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke’sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

BEISPIEL: Zentralkraftsysteme, 2 Freikörperbilder (4 Unbekannten)



$$\alpha = 30°$$
$$\beta = 45°$$

Gegeben: Sack B wiegt 20 N. Geometrie wie gegeben

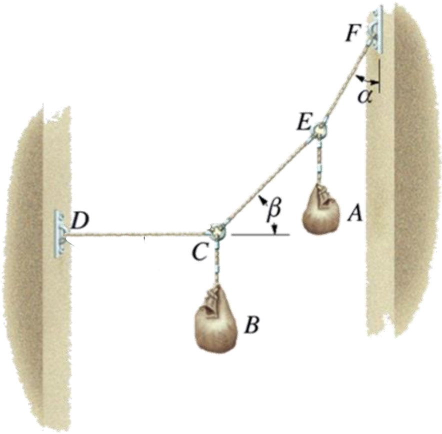
Gesucht: Kabelkräfte und Gewicht von Sack A

Plan (sowie bei 1 Freikörperbild!):

i) <u>Freikörperbilder</u> für Punkte C & E

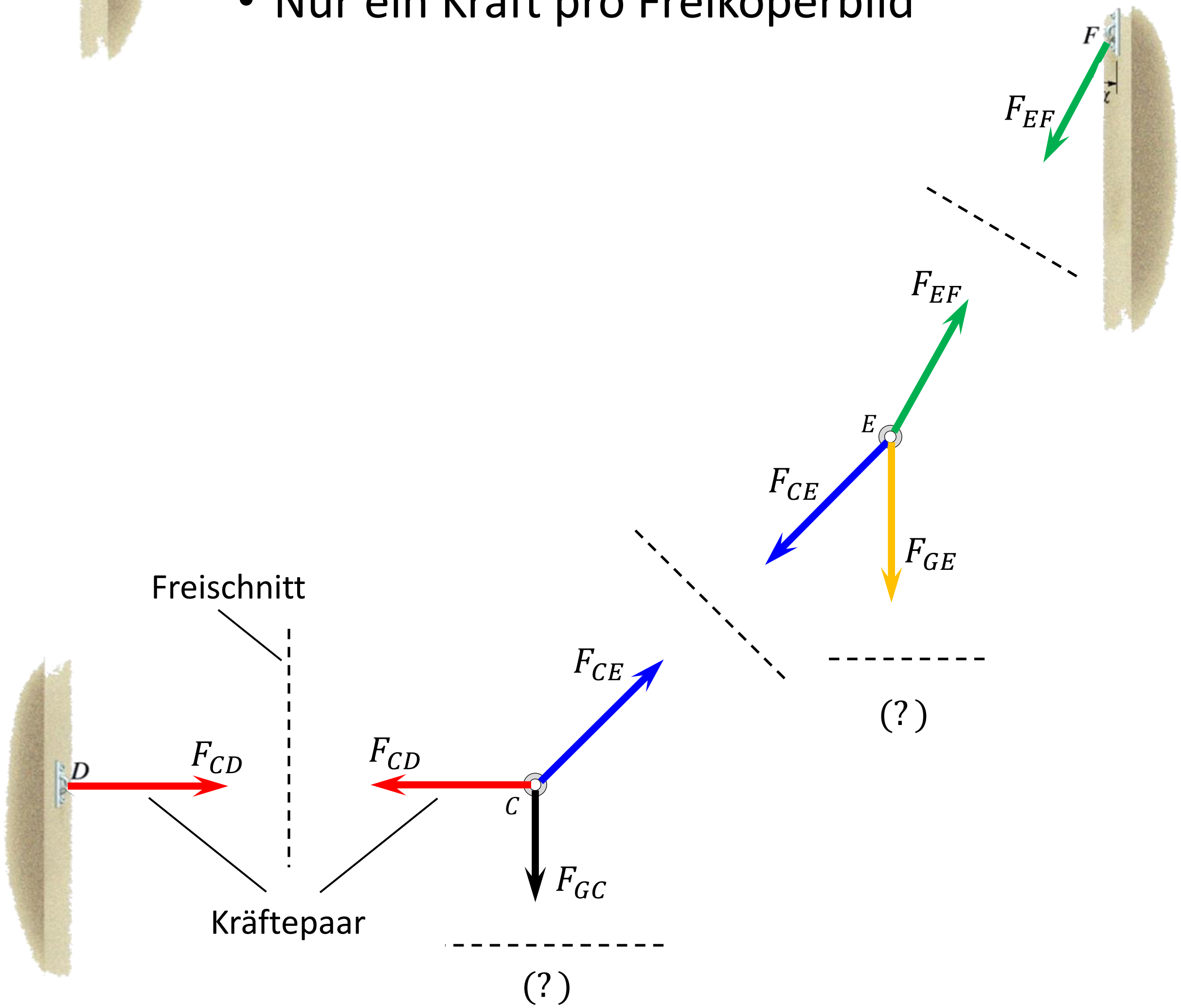
ii) 4 <u>Gleichgewichtsgleichungen</u>: Statik in x & y für beide Freikörperbilder

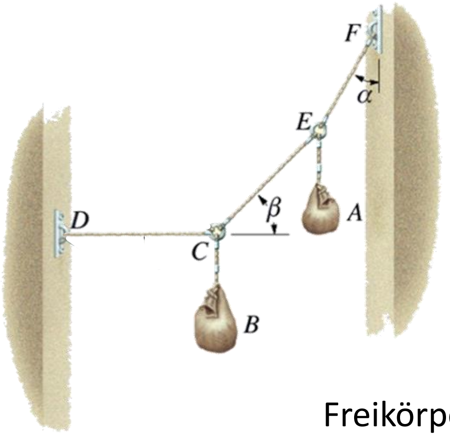
iii) 4 <u>Gleichungen lösen</u> für 4 unbekannten: 3 Kabelkräfte, 1 Gewichtskraft



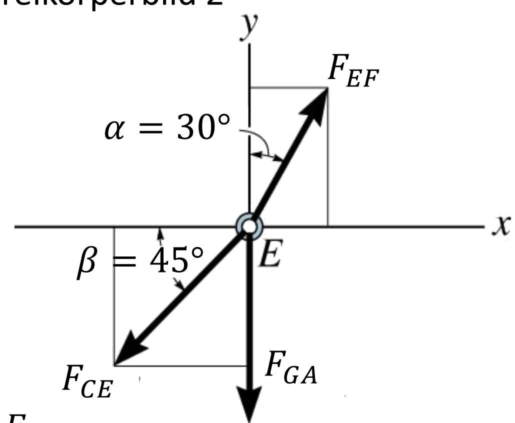
KRÄFTEPAARE und FREIKÖRPERBILDER

- Kräfte Existieren immer als eine Kräftepaar
- Newton III: Aktion und Reaktion 180°
- Die 2 Kräfte wirken auf beide Seiten vom Freischnitt
- Nur ein Kraft pro Freiköperbild

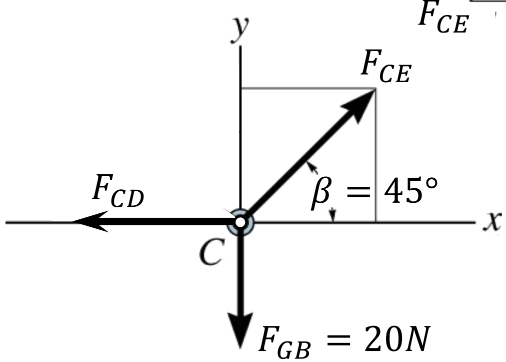




Freikörperbild 2



Freikörperbild 1



2D Statik Lösungsmuster (2 Körper)

Statik: Gleichungen Newton II

$\Sigma F = m \cdot a = 0$ (Beschleunigung=0)

in 2D bei Punkt1

① $\Sigma F_x = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

bei Punkt2

③ $\Sigma F_x = 0$

④ $\Sigma F_y = 0$

Aufgaben: 4 'Unbekannten' gesucht: F_{CE}, F_{CD}, F_{EF}, F_{GA}

Lösungen: Drei Schritte:

i) <u>2 Freikörperbilder</u>

Punkt C und Punkt E

ii) <u>Gleichungen (2D Statik)</u>

Punkt C

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_{CE} \cdot \cos(\beta) - F_{CD} = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{CE} \cdot \sin(\beta) - F_{GB} = 0$

Punkt E

③ $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_{EF} \cdot \sin(\alpha) - F_{CE} \cdot \cos(\beta) = 0$

④ $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{EF} \cdot \cos(\alpha) - F_{CE} \cdot \sin(\beta) - F_{GA} = 0$

iii) <u>Gleichungen lösen</u>

② lösen für F_{CE}: *(nur eine Unbekannte)*

$F_{CE} = F_{GB} / \sin(\beta)$

$\Rightarrow F_{CE} = 20N / \sin(45°) = 28{,}3N$

① lösen für F_{CD}:

$\Rightarrow F_{CD} = F_{CE} \cdot \cos(\beta) = 28{,}28N \cdot \cos(45°) = 20{,}0N$

③ lösen für F_{EF}:

$\Rightarrow F_{EF} = F_{CE} \cdot \cos(\beta) / \sin(\alpha) = 28{,}28N \cdot \cos(45°) / \sin(30°) = 40{,}0N$

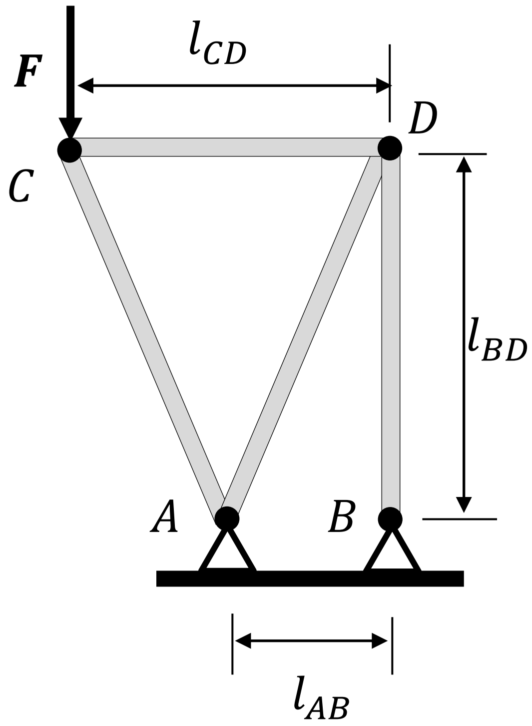
④ lösen für F_{GA}:

$\Rightarrow F_{GA} = F_{EF} \cdot \cos(\alpha) - F_{CE} \cdot \sin(\beta)$

$\Rightarrow F_{GA} = 40{,}0N \cdot \cos(30°) - 28.28N \cdot \sin(45°) = 14{,}6N$

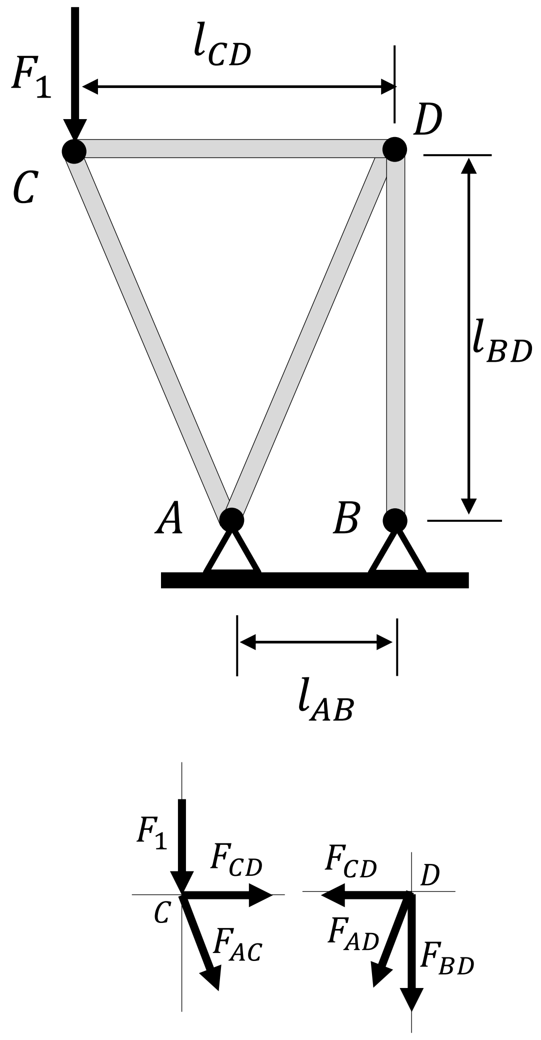
Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

Aufgabe



Gegeben ist eine angewandte Kraft $\boldsymbol{F = 2000N}$ und die unbelastete Abmessungen $\boldsymbol{l_{CD} = 60mm}$, $\boldsymbol{l_{BD} = 70mm}$, $\boldsymbol{l_{AB} = 30mm}$. Bestimmen Sie die Kräfte in allen vier Balken: $\boldsymbol{F_{AC}}$, $\boldsymbol{F_{AD}}$, $\boldsymbol{F_{CD}}$, $\boldsymbol{F_{BD}}$ und notieren Sie, ob Zug- oder Druckkräfte wirken.

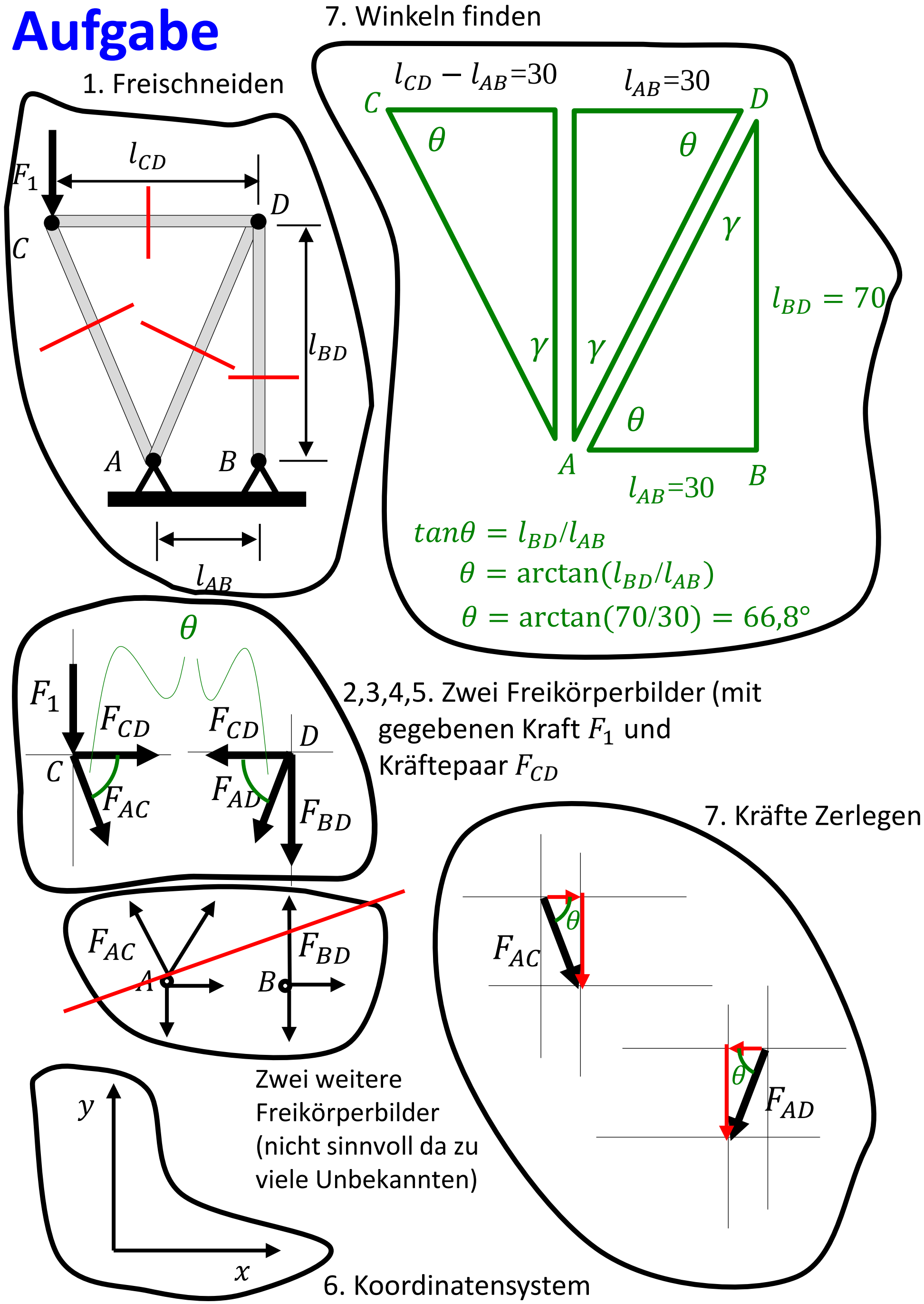
Aufgabe



Tipps:

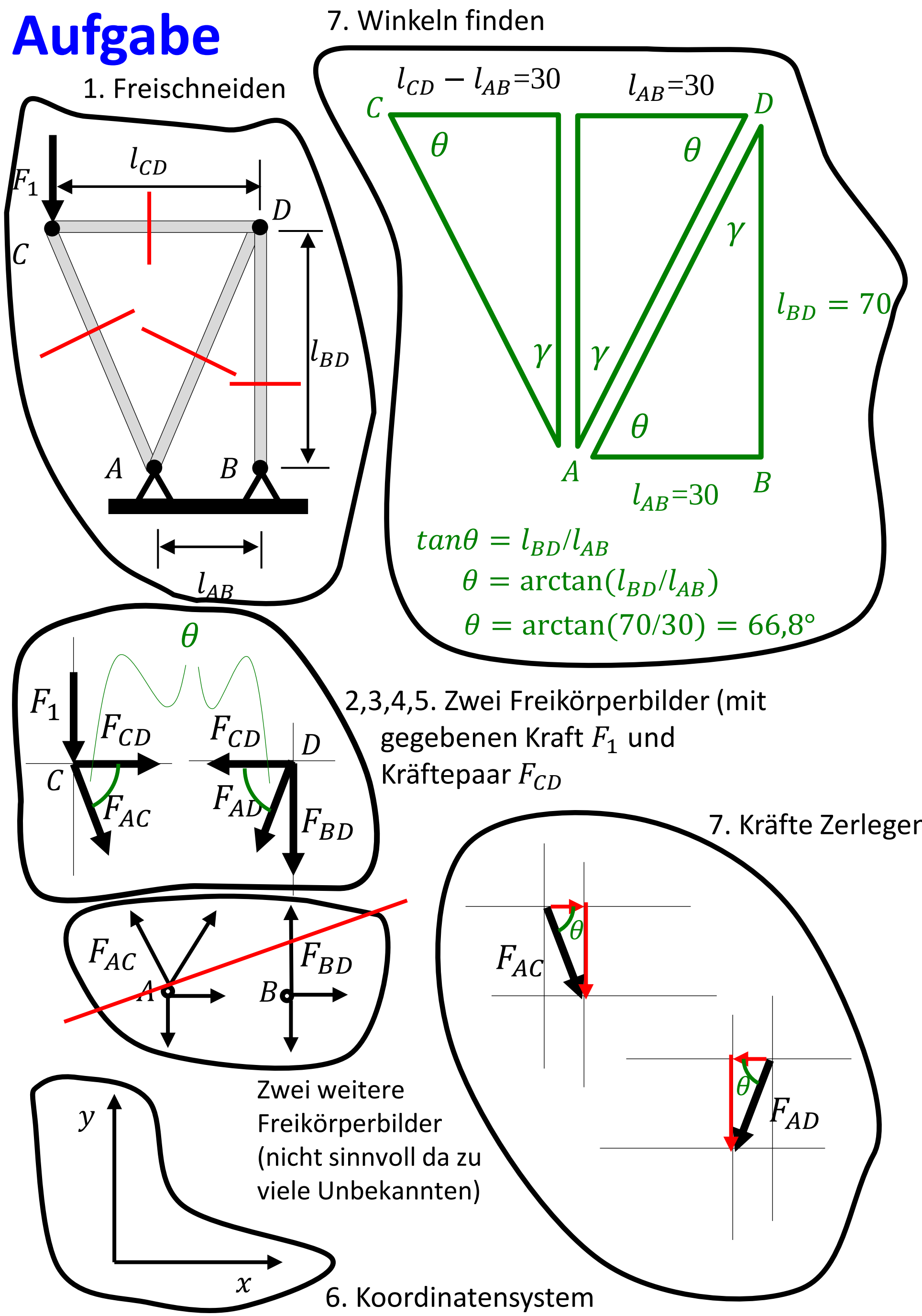
1. Teile Freischneiden in den Kräfte gesucht sind
2. Freikörperbilder bilden. 4 Unbekannten benötigen 2 Freikörperbilder (jeder mit 2 Gleichungen – x & y)
3. Bekannte Kräfte in gegebenen Richtung Zeichnen
4. Unbekannte Kräfte in Zug oder Druck darstellen (Zum Beispiel Alle in Zug Zeichnen damit positive und negative Ergebnisse Zug- bzw. Druckkräfte beschreiben
5. Kräftepaare auf beide Seiten vom Freischnitt mussen gegen Einander wirken aber mit den selben Symbol beschriftet
6. Koordinatensystem der Zerlegungen minimisiert!
7. Winkeln finden (aus Geometrie) damit Kräfte zerlegt werden können

Aufgabe



Tipps:

1. Teile Freischneiden in den Kräfte gesucht sind
2. Freikörperbilder bilden. 4 Unbekannten benötigen 2 Freikörperbilder (jeder mit 2 Gleichungen – x & y)
3. Bekannte Kräfte in gegebenen Richtung Zeichnen
4. Unbekannte Kräfte in Zug oder Druck darstellen (Zum Beispiel Alle in Zug Zeichnen damit positive und negative Ergebnisse Zug- bzw. Druckkräfte beschreiben
5. Kräftepaare auf beide Seiten vom Freischnitt mussen gegen Einander wirken aber mit den selben Symbol beschriftet
6. Koordinatensystem der Zerlegungen minimisiert!
7. Winkeln finden (aus Geometrie) damit Kräfte zerlegt werden können



2D Statik Lösungsmuster (2 Körper)

Statik: Gleichungen Newton II
$\Sigma F = m \cdot a = 0$ (Beschleunigung=0)

in 2D bei Punkt1
① $\Sigma F_x = 0$
② $\Sigma F_y = 0$

bei Punkt2
③ $\Sigma F_x = 0$
④ $\Sigma F_y = 0$

Aufgaben: 4 'Unbekannten' gesucht:
Lösungen: Drei Schritte:

i) <u>2 Freikörperbilder</u>
Punkt C und Punkt D

ii) <u>Gleichungen (2D Statik)</u>

Punkt C
① $\Sigma F_x = 0$
$\Rightarrow F_{CD} + F_{AC} \cdot \cos(\theta) = 0$
② $\Sigma F_y = 0$
$\Rightarrow -F_1 - F_{AC} \cdot \sin(\theta) = 0$

Punkt D
③ $\Sigma F_x = 0$
$\Rightarrow -F_{CD} - F_{AD} \cdot \cos(\theta) = 0$
④ $\Sigma F_y = 0$
$\Rightarrow -F_{BD} - F_{AD} \cdot \sin(\theta) = 0$

iii) <u>Gleichungen lösen für</u> F_{AC}, F_{CD}, F_{AD}, F_{BD}

② lösen für F_{AC}: (nur eine Unbekannte)
$F_{AC} = -F_1/\sin(\theta)$
$\Rightarrow F_{AC} = -2000N/\sin(66{,}8°) = -2176N$ (Druck – Negativ)

① lösen für F_{CD}:
$\Rightarrow F_{CD} = -F_{AC} \cdot \cos(\theta) = -(-2176N) \cdot \cos(66{,}8°) = 857{,}0N$ (Zug – Positiv)

③ lösen für F_{EF}:
$\Rightarrow F_{AD} = -F_{CD}/\cos(\theta) = -857{,}0N/\cos(66{,}8°) = -2176N$ (Druck – Negativ)

④ lösen für F_{GA}:
$\Rightarrow F_{BD} = -F_{AD} \cdot \sin(\theta)$
$\Rightarrow F_{BD} = -(-2176N) \cdot \sin(66{,}8°) = 2000N$ (Zug – Positiv)

Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

6. 2D MOMENTE

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

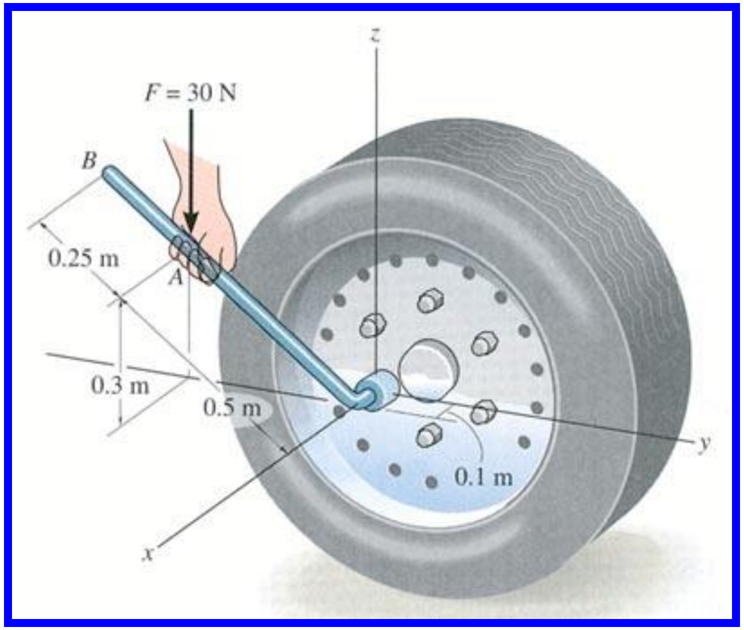
Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton'schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke'sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

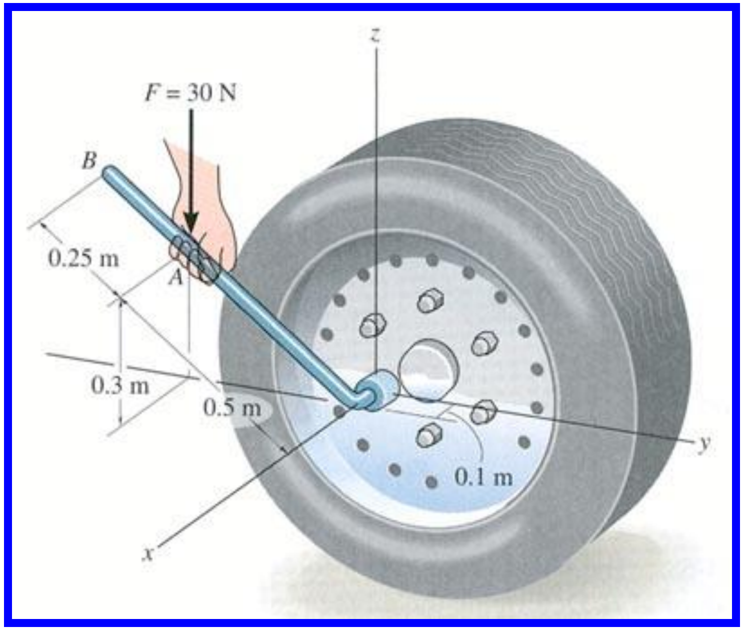
MOMENTE IN 2-D



um x	um y	um z
A: 15Nm	A: 15Nm	A: 15Nm
B: 3Nm	B: 3Nm	B: 3Nm
C: 0Nm	C: 0Nm	C: 0Nm
D: 12Nm	D: 12Nm	D: 12Nm
E: Andere	E: Andere	E: Andere

Das Moment einer Kraft um eine Achse ist ein Maß für die Tendenz einer Kraft, einen Körper um diese Achse zu drehen.

MOMENTE IN 2-D

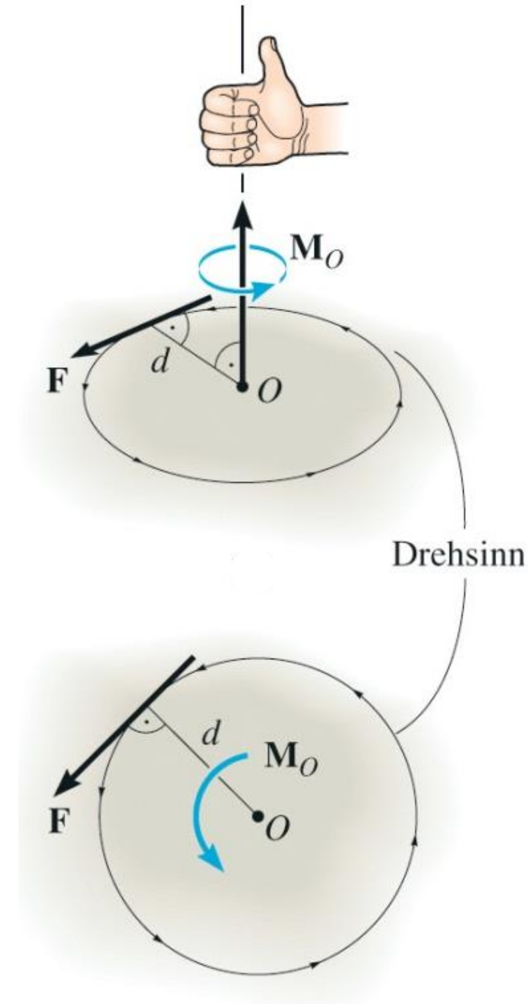


um x	um y	um z
A: 15Nm	A: 15Nm	A: 15Nm
B: 3Nm	**B: 3Nm**	B: 3Nm
C: 0Nm	C: 0Nm	**C: 0Nm**
D: 12Nm	D: 12Nm	D: 12Nm
E: Andere	E: Andere	E: Andere

Das Moment einer Kraft um eine Achse ist ein Maß für die Tendenz einer Kraft, einen Körper um diese Achse zu drehen.

MOMENTE IN 2-D:
Betrag und Richtung

Rechte Faust
Daumen: positive Richtung der Drehachse
Finger: positive Drehrichtung



Betrag

In 2-D, der Betrag vom Moment ist

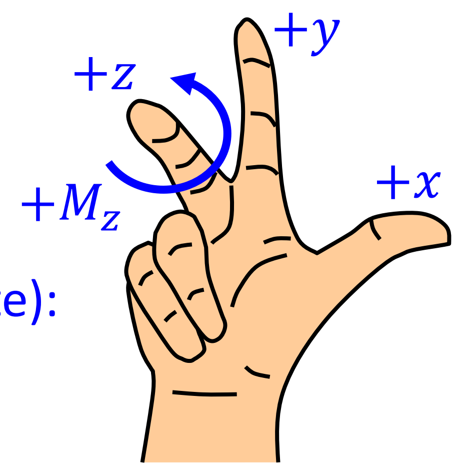
$$M_O\,[Nm] = F[N] \cdot d[m]$$

d ist der senkrechte (minimum) Abstand der Kraftwirkungslinie F von der Drehachse O

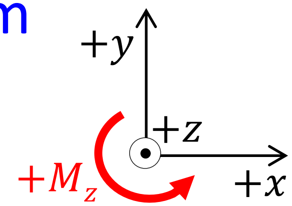
Richtung

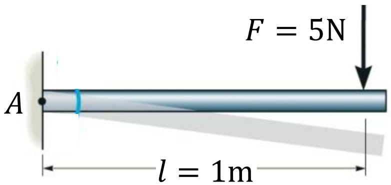
In 2-D, ist die positive M_O Drehrichtung im gegen Uhrzeigersinn (Rechte Faust)

Konvention
- positive Translationen: Rechte Hand
- positive Rotation (Momente): Rechte Faust



MOMENTE IN 2-D Aufgaben. Momente um A im Koordinatensystem finden

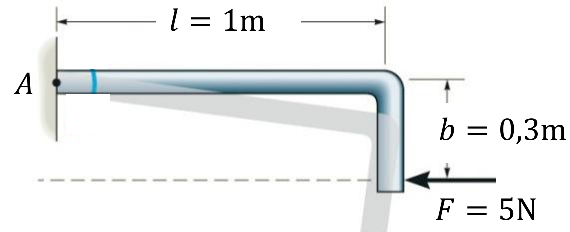




$$M_A = \overbrace{-}^{\text{Richtung}}(\overbrace{F \cdot l}^{\text{Betrag}})$$

$$\Rightarrow M_A = -(5N \cdot 1m)$$

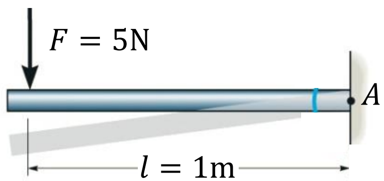
$$\Rightarrow M_A = -5Nm$$



$$M_A = -(F \cdot b)$$

$$\Rightarrow M_A = -(5N \cdot 0{,}3m)$$

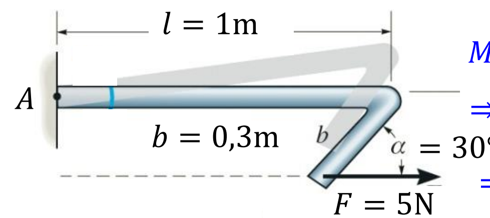
$$\Rightarrow M_A = -1{,}5Nm$$



$$M_A = +(F \cdot l)$$

$$\Rightarrow M_A = +(5N \cdot 1m)$$

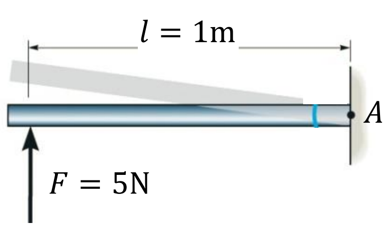
$$\Rightarrow M_A = 5Nm$$



$$M_A = +(F \cdot b \cdot \sin\alpha)$$

$$\Rightarrow M_A = +\big(5N \cdot 0{,}3m \cdot \sin(30°)\big)$$

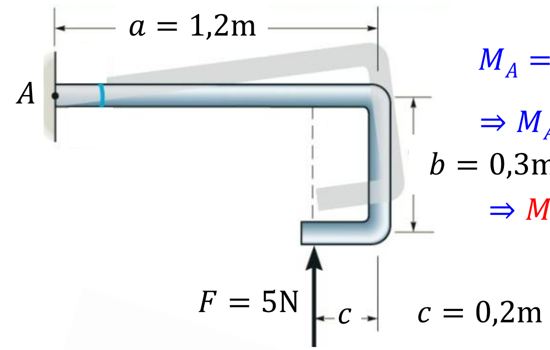
$$\Rightarrow M_A = 0{,}75Nm$$



$$M_A = -(F \cdot l)$$

$$\Rightarrow M_A = -(5N \cdot 1m)$$

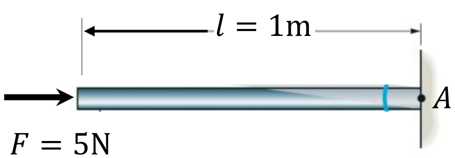
$$\Rightarrow M_A = -5Nm$$



$$M_A = +\big(F \cdot (a - c)\big)$$

$$\Rightarrow M_A = -\big(5N \cdot (1{,}2m - 0{,}2m)\big)$$

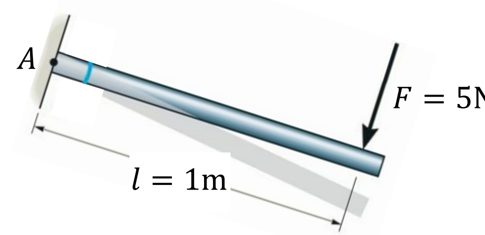
$$\Rightarrow M_A = 5Nm$$



$$M_A = (F \cdot 0)$$

$$\Rightarrow M_A = +(5N \cdot 0m)$$

$$\Rightarrow M_A = 0Nm$$



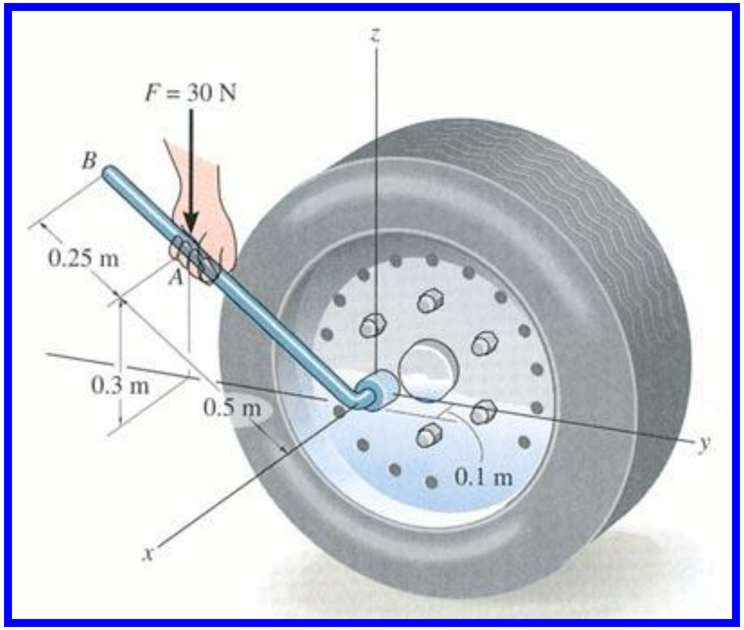
$$M_A = -(F \cdot l)$$

$$\Rightarrow M_A = -(5N \cdot 1m) = -5Nm$$

MOMENTE IN 2-D Aufgabe

Gegeben: 30N wirken auf den Schlussel

Gesucht: Moment um die $x - Achse$



Plan:

Momente bestimmen:

i) Betrag: Kraft × Hebel

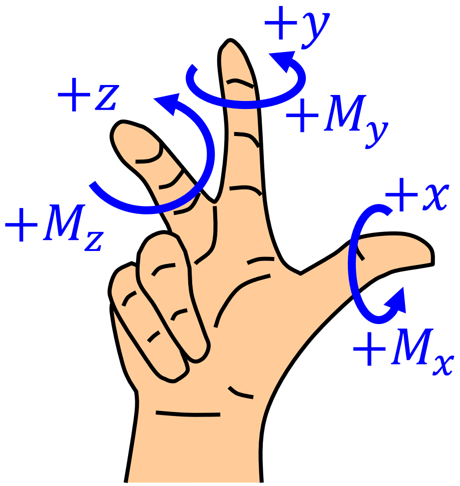
ii) Richtung (Sinn)

(Pythagoras)

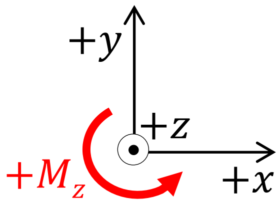
$$M_x = +\left(30N \cdot \sqrt{(0{,}5m)^2 - (0{,}3m)^2}\right) = 12Nm$$

$$M_y = +(30N \cdot 0{,}1m) = 3Nm$$

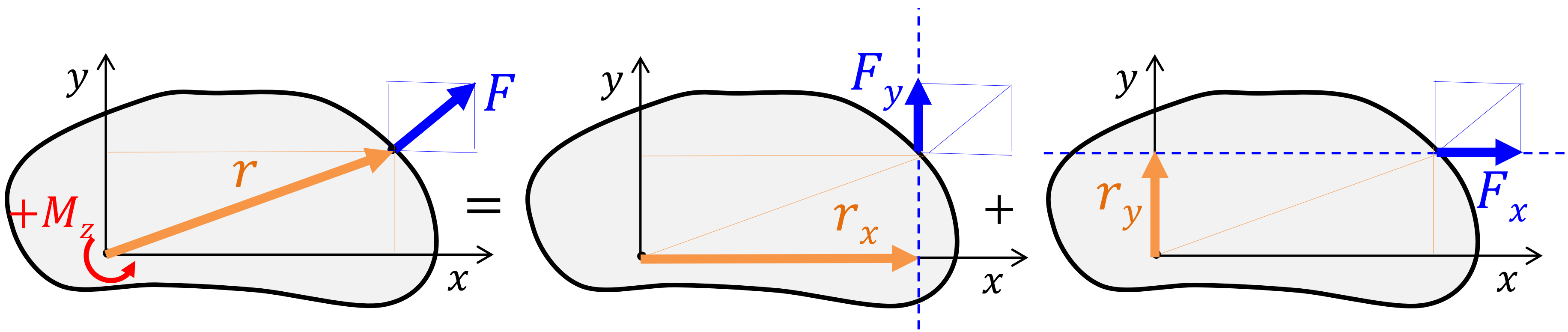
$$M_z = 0Nm$$



• MOMENTE IN 2-D: Im Koordinatensystem

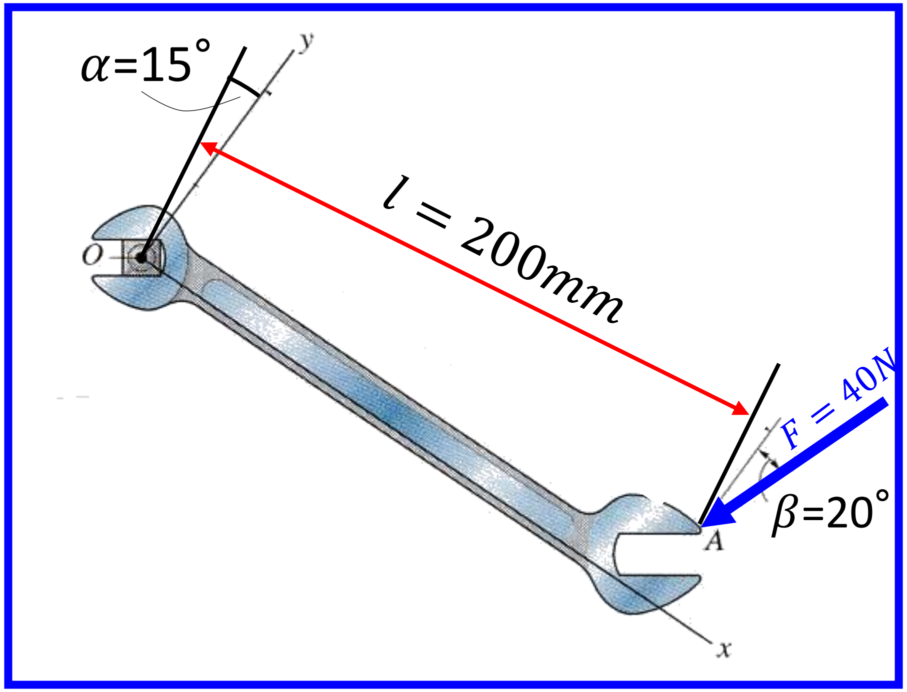


i) Betrag der Produkt aus Kraft F <u>komponente</u> und Hebeln r im Koordinatensystem
ii) Richtungen von den Momente
iii) Momente summieren



$$M_z = \underbrace{+}_{\text{ii) Richtung}}\underbrace{(r_x \cdot F_y)}_{\text{i) Betrag}} \underbrace{+}_{\text{iii) Summe}} \underbrace{-}_{\text{ii) Richtung}}\underbrace{(r_y \cdot F_x)}_{\text{i) Betrag}}$$

MOMENTE IN 2-D Aufgabe



Gegeben: 40N wirken auf den Schlussel

Gesucht: Moment um 0

Plan:

1) Kraftkomponente F_x und F_y (im Koordinatensystem) finden

2) Streckenkomponente l_x und l_y finden

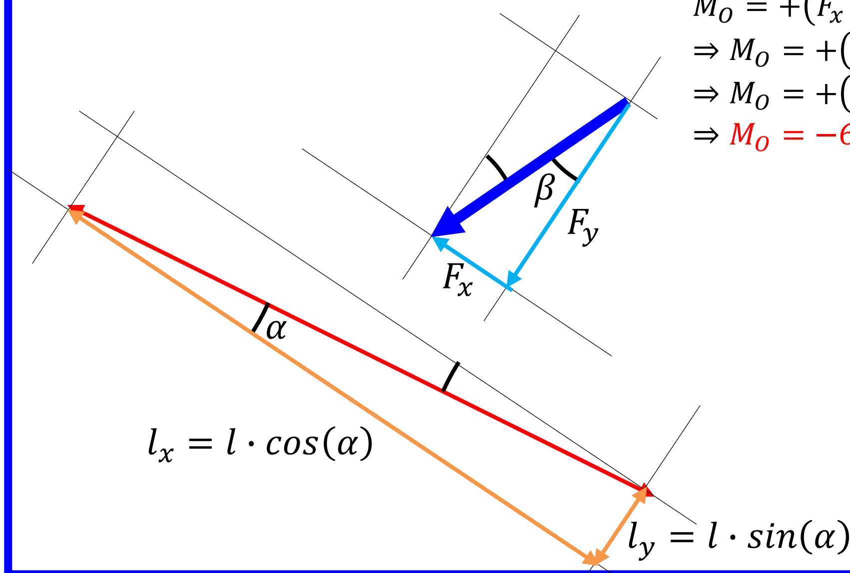
3) Moment M_0 um 0, bestimmen
   - i) Kraftkomponente × Hebeln
   - ii) Moment Richtungen
   - iii) Momentensumme

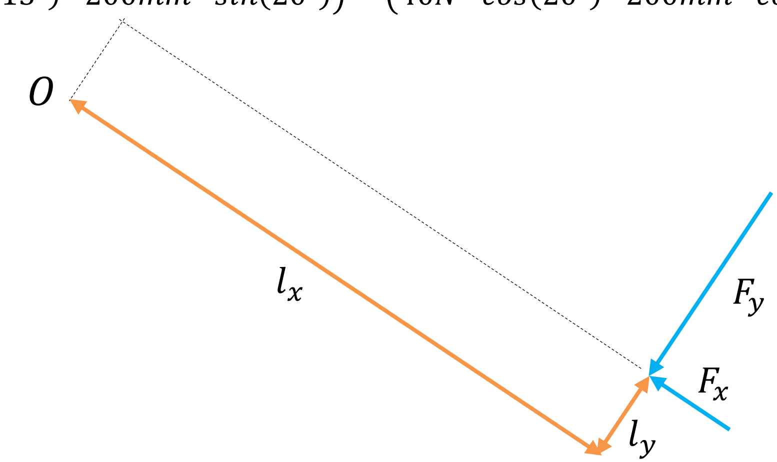
$$M_O = +(F_x \cdot l_y) - (F_y \cdot l_x)$$

$$\Rightarrow M_O = +(F \cdot sin(\alpha) \cdot l \cdot sin(\beta)) - (F \cdot cos(\beta) \cdot l \cdot cos(\alpha))$$

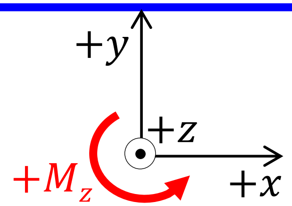
$$\Rightarrow M_O = +(40N \cdot sin(15°) \cdot 200mm \cdot sin(20°)) - (40N \cdot cos(20°) \cdot 200mm \cdot cos(15°))$$

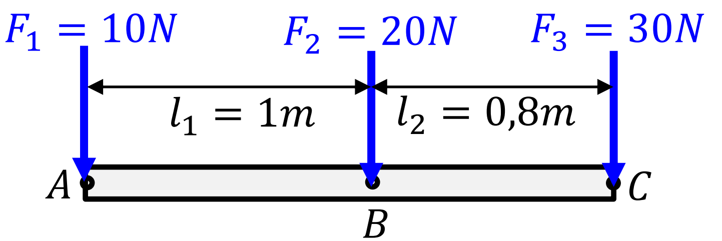
$$\Rightarrow M_O = -6553Nmm$$

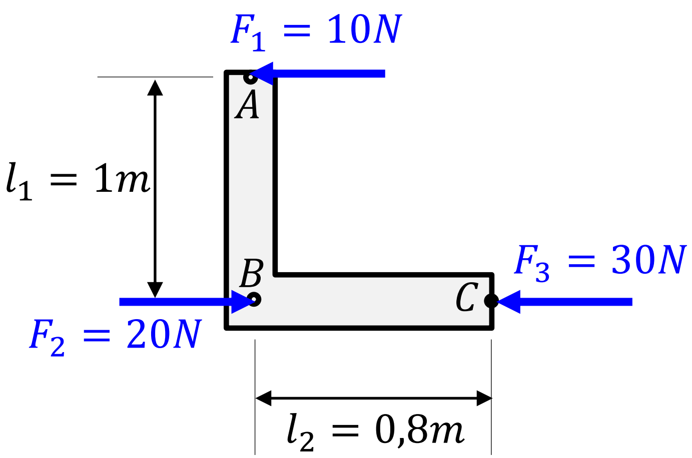


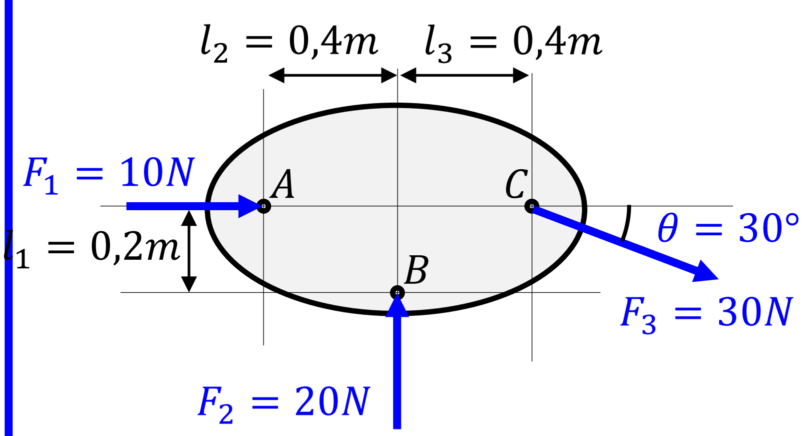


MOMENTE IN 2-D Aufgaben Momente um A, B, C im Koordinatensystem finden

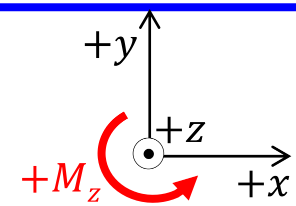


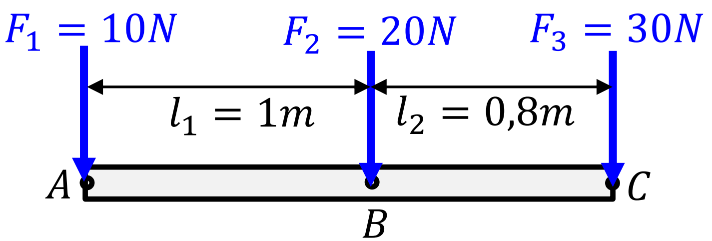






MOMENTE IN 2-D Aufgaben Momente um A, B, C im Koordinatensystem finden





$M_A = -(F_2 \cdot l_1) - \left(F_3 \cdot (l_1 + l_2)\right)$

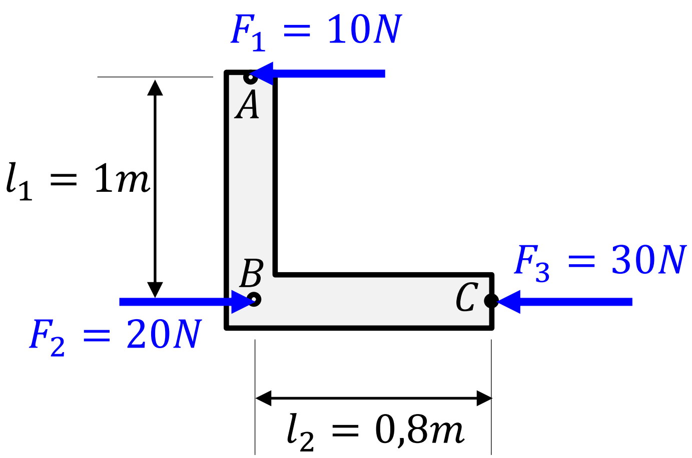
$\Rightarrow M_A = -(20N \cdot 1m) - \left(30N \cdot (1m + 0,8m)\right) = -74Nm$

$M_B = (F_1 \cdot l_1) - (F_3 \cdot l_2)$

$\Rightarrow M_B = (10N \cdot 1m) - (30N \cdot 0,8m) = -14Nm$

$M_C = \left(F_1 \cdot (l_1 + l_2)\right) + (F_2 \cdot l_2)$

$\Rightarrow M_C = \left(10N \cdot (1m + 0,8m)\right) + (20N \cdot 0,8m) = 34Nm$



$M_A = (F_2 \cdot l_1) - (F_3 \cdot l_1)$

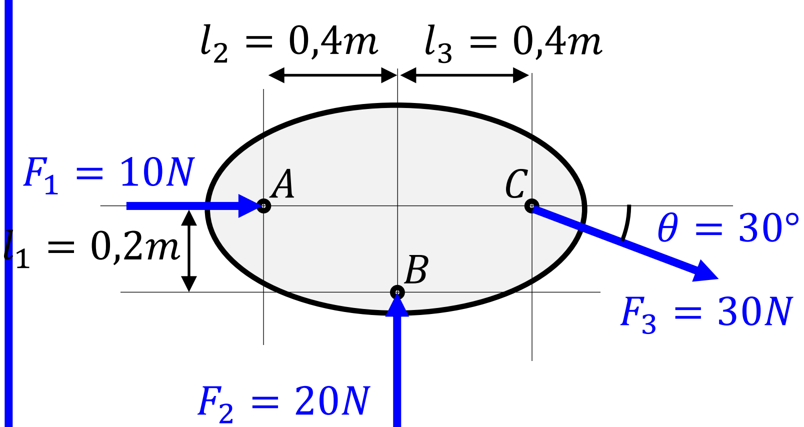
$\Rightarrow M_A = (20N \cdot 1m) - (30N \cdot 1m) = -10Nm$

$M_B = (F_1 \cdot l_1)$

$\Rightarrow M_B = (10N \cdot 1m) = 10Nm$

$M_C = (F_1 \cdot l_1)$

$\Rightarrow M_C = (10N \cdot 1m) = 10Nm$



$M_A = (F_2 \cdot l_2) - \left(F_3 \cdot \sin(\theta) \cdot (l_2 + l_3)\right)$

$\Rightarrow M_A = (20N \cdot 0,4m) - \left(30N \cdot \sin(30°) \cdot (0,4m + 0,4m)\right) = -4Nm$

$M_B = -(F_1 \cdot l_1) - (F_3 \cdot \cos(\theta) \cdot l_1) - (F_3 \cdot \sin(\theta) \cdot l_3)$

$\Rightarrow M_B = -(10N \cdot 0,2m) - (30N \cdot \cos(30°) \cdot 0,2m) - (30N \cdot \sin(30°) \cdot 0,4m)$

$\Rightarrow M_B = -13,2Nm$

$M_C = -(F_2 \cdot l_3)$

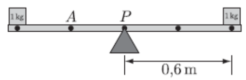
$\Rightarrow M_C = -(20N \cdot 0,4m) = -8Nm$

Im Arbeitsblatt *Kräfte* kamen wir zu dem Ergebnis, dass für einen ruhenden Körper die Summe aller an ihm angreifenden Kräfte Null sein muss. Kräfte, die auf einen Körper wirken, können jedoch auch eine Drehbewegung des Körpers verursachen. Für einen ruhenden Körper müssen deshalb ebenfalls die „Drehwirkungen" der Kräfte berücksichtigt werden.

1 Moment einer Einzelkraft in skalarer Darstellung

1.1 *Definition*

Ein masseloser Balken ist in der Mitte drehbar gelagert und wird mit Gewichten beladen (siehe Abbildung). Es wird beobachtet, dass der Balken in Ruhe ist.



a) Was passiert, wenn das rechte Gewicht
- in Richtung Balkenmitte verschoben wird?
- durch ein Gewicht von 2 kg am gleichen Ort auf dem Balken ersetzt wird?

b) Ist es möglich, das 2 kg Gewicht auf der rechten Seite des Balkens zu platzieren, so dass der Balken (waagerecht) in Ruhe bleibt? Wenn ja, wohin? Begründen Sie.

Die obige Situation lässt sich durch den Begriff des *Moments* beschreiben. Das Moment drückt die „Drehwirkung" einer Kraft bezüglich eines Punktes aus. Sein Betrag ist das Produkt aus dem Betrag der Kraft F und dem senkrechten Abstand (Hebelarm) d der Wirkungslinie der Kraft vom vorgegebenen Bezugspunkt P, also: $M_F^{(P)} = F \cdot d$.
Das Moment ist positiv, wenn die „Drehwirkung" entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn, und negativ, wenn die „Drehwirkung" im Uhrzeigersinn ist.

Im folgenden betrachten wir Situationen, in denen das linke Gewicht (1 kg) stets an derselben Stelle wie oben (0,6 m links von P) bleibt, das rechte aber in Ort oder Gewicht variiert wird.

c) Vervollständigen Sie die Tabelle unten. Nehmen Sie dazu an, dass eine Masse von 1 kg eine Gewichtskraft von 10 N erfährt.

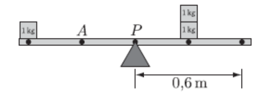
$M_{F_{\text{links}}}^{(P)}$	Drehsinn von $M_{F_{\text{links}}}^{(P)}$	Masse rechtes Gewicht	Ort rechtes Gewicht	$M_{F_{\text{rechts}}}^{(P)}$	Drehsinn von $M_{F_{\text{rechts}}}^{(P)}$	Summe der Momente
6 Nm		1 kg	0,6 m rechts von P			
6 Nm		1 kg	0,3 m rechts von P			
6 Nm		2 kg	0,6 m rechts von P			
6 Nm		2 kg	0,3 m rechts von P			

d) Vergleichen Sie die Beträge der rechtsdrehenden und linksdrehenden Momente in den Fällen, in denen der Balken in Ruhe ist.

e) Verallgemeinern Sie Ihre Ergebnisse: Welche Bedingung muss zusätzlich zum Kräftegleichgewicht erfüllt sein, wenn sich ein Körper in Ruhe befindet?

1.2 *Abhängigkeit vom Bezugspunkt*

Die Gewichte sind nun so gewählt und angeordnet, dass sich der Balken in Ruhe befindet.



a) Skizzieren Sie ein Freikörperbild des Balkens. Ist das Kräftegleichgewicht erfüllt?

b) Bestimmen Sie die Beträge und Vorzeichen der Momente aller auftretenden Kräfte *bezüglich Punkt A*.

Freikörperbild für Balken

c) Addieren sich die Momente bezüglich Punkt A ebenfalls zu null?

d) Warum mussten Sie hier das Moment der am Lager ausgeübten Kraft berücksichtigen, in Abschnitt 1.1 jedoch nicht?

2 Anwendung

2.1 *Kräfte- und Momentengleichgewicht*

Betrachten Sie noch einmal die Situation aus Abschnitt 1.1 des Arbeitsblatts *Kräfte*, in der Maria und Peter vergeblich versuchten, eine schwere Kiste zu bewegen. Als Bezugspunkt für alle auftretenden Momente verwenden wir zunächst Punkt A (siehe Abbildung 1).

a) Zeichnen Sie erneut ein Freikörperbild für die Kiste. Achten Sie darauf, dass Sie die Kräfte am jeweiligen Angriffspunkt einzeichnen.

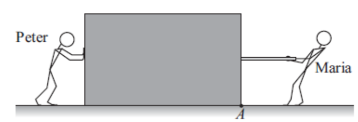


Abbildung 1: Kiste aus Arbeitsblatt *Kräfte*

Freikörperbild für Kiste

b) Geben Sie jeweils eine Gleichung an, die einen Zusammenhang zwischen allen horizontalen bzw. zwischen allen vertikalen Kräften herstellt:
- horizontale Kräfte
- vertikale Kräfte

c) In Teil 1.1.e haben Sie eine Bedingung gefunden, die zusätzlich zum Kräftegleichgewicht erfüllt sein muss. Geben Sie hierfür eine allgemeine Gleichung an.

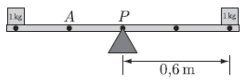
d) Geben Sie für die folgenden Kräfte an, welchen Drehsinn die durch sie verursachten Momente bezüglich Punkt A besitzen (d. h. *im* oder *entgegen dem* Uhrzeigersinn):
- die beiden nach rechts gerichteten Kräfte
- die Reibungskraft

Im Arbeitsblatt *Kräfte* kamen wir zu dem Ergebnis, dass für einen ruhenden Körper die Summe aller an ihm angreifenden Kräfte Null sein muss. Kräfte, die auf einen Körper wirken, können jedoch auch eine Drehbewegung des Körpers verursachen. Für einen ruhenden Körper müssen deshalb ebenfalls die „Drehwirkungen" der Kräfte berücksichtigt werden.

1 Moment einer Einzelkraft in skalarer Darstellung

1.1 *Definition*

Ein masseloser Balken ist in der Mitte drehbar gelagert und wird mit Gewichten beladen (siehe Abbildung). Es wird beobachtet, dass der Balken in Ruhe ist.



a) Was passiert, wenn das rechte Gewicht

- in Richtung Balkenmitte verschoben wird?
  Beschleunigt gegen Uhrzeigersinn
- durch ein Gewicht von 2 kg am gleichen Ort auf dem Balken ersetzt wird?
  Beschleunigt in Uhrzeigersinn

b) Ist es möglich, das 2 kg Gewicht auf der rechten Seite des Balkens zu platzieren, so dass der Balken (waagerecht) in Ruhe bleibt? Wenn ja, wohin? Begründen Sie.

Ja 0,3

Die obige Situation lässt sich durch den Begriff des *Moments* beschreiben. Das Moment drückt die „Drehwirkung" einer Kraft bezüglich eines Punktes aus. Sein Betrag ist das Produkt aus dem Betrag der Kraft F und dem senkrechten Abstand (Hebelarm) d der Wirkungslinie der Kraft vom vorgegebenen Bezugspunkt P, also: $M_F^{(P)} = F \cdot d$.
Das Moment ist positiv, wenn die „Drehwirkung" entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn, und negativ, wenn die „Drehwirkung" im Uhrzeigersinn ist.

Im folgenden betrachten wir Situationen, in denen das linke Gewicht (1 kg) stets an derselben Stelle wie oben (0,6 m links von P) bleibt, das rechte aber in Ort oder Gewicht variiert wird.

c) Vervollständigen Sie die Tabelle unten. Nehmen Sie dazu an, dass eine Masse von 1 kg eine Gewichtskraft von 10 N erfährt.

$M^{(P)}_{F_\text{links}}$	Drehsinn von $M^{(P)}_{F_\text{links}}$	Masse rechtes Gewicht	Ort rechtes Gewicht	$M^{(P)}_{F_\text{rechts}}$	Drehsinn von $M^{(P)}_{F_\text{rechts}}$	Summe der Momente
6 Nm	+	1 kg	0,6 m rechts von P	6Nm	-	0Nm
6 Nm	+	1 kg	0,3 m rechts von P	3Nm	-	+3Nm
6 Nm	+	2 kg	0,6 m rechts von P	12Nm	-	-6Nm
6 Nm	+	2 kg	0,3 m rechts von P	6Nm	-	0Nm

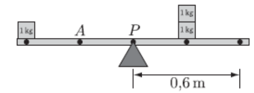
d) Vergleichen Sie die Beträge der rechtsdrehenden und linksdrehenden Momente in den Fällen, in denen der Balken in Ruhe ist.

Betrag gleich, Sinn gegen

e) Verallgemeinern Sie Ihre Ergebnisse: Welche Bedingung muss zusätzlich zum Kräftegleichgewicht erfüllt sein, wenn sich ein Körper in Ruhe befindet?

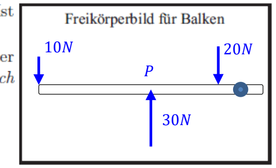
Summe Momente = 0

1.2 *Abhängigkeit vom Bezugspunkt*



Die Gewichte sind nun so gewählt und angeordnet, dass sich der Balken in Ruhe befindet.

a) Skizzieren Sie ein Freikörperbild des Balkens. Ist das Kräftegleichgewicht erfüllt?



b) Bestimmen Sie die Beträge und Vorzeichen der Momente aller auftretenden Kräfte *bezüglich Punkt A*.

$+3Nm$ $+9Nm$ $-12Nm$

c) Addieren sich die Momente bezüglich Punkt A ebenfalls zu null?

$0Nm$

d) Warum mussten Sie hier das Moment der am Lager ausgeübten Kraft berücksichtigen, in Abschnitt 1.1 jedoch nicht?

2 Anwendung

2.1 *Kräfte- und Momentengleichgewicht*

Betrachten Sie noch einmal die Situation aus Abschnitt 1.1 des Arbeitsblatts *Kräfte*, in der Maria und Peter vergeblich versuchten, eine schwere Kiste zu bewegen. Als Bezugspunkt für alle auftretenden Momente verwenden wir zunächst Punkt A (siehe Abbildung 1).

a) Zeichnen Sie erneut ein Freikörperbild für die Kiste. Achten Sie darauf, dass Sie die Kräfte am jeweiligen Angriffspunkt einzeichnen.

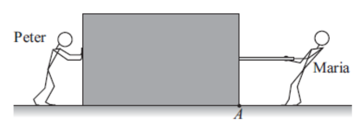
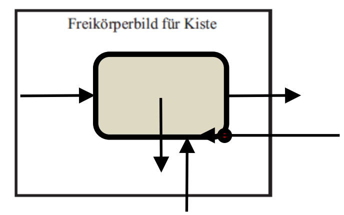


Abbildung 1: Kiste aus Arbeitsblatt *Kräfte*



b) Geben Sie jeweils eine Gleichung an, die einen Zusammenhang zwischen allen horizontalen bzw. zwischen allen vertikalen Kräften herstellt:

- horizontale Kräfte
- vertikale Kräfte

c) In Teil 1.1.e haben Sie eine Bedingung gefunden, die zusätzlich zum Kräftegleichgewicht erfüllt sein muss. Geben Sie hierfür eine allgemeine Gleichung an.

d) Geben Sie für die folgenden Kräfte an, welchen Drehsinn die durch sie verursachten Momente bezüglich Punkt A besitzen (d. h. *im* oder *entgegen dem* Uhrzeigersinn):

- die beiden nach rechts gerichteten Kräfte –
- die Reibungskraft

- die Gewichtskraft
- die Normalkraft vom Boden auf die Kiste

e) Beantworten Sie folgende Frage anhand Ihrer Ergebnisse in den Aufgabenteilen c und d. Ist die Summe der Momente bezüglich Punkt A, die durch die beiden *vertikalen* Kräfte verursacht werden, *gleich* oder *ungleich* Null?

f) Ist bezüglich Punkt A das durch die Normalkraft verursachte Moment vom Betrag *größer*, *kleiner* oder *gleich* dem durch die Gewichtskraft verursachte Moment? Begründen Sie.

Ist Ihre Antwort mit der in Teil e vereinbar?

Sie haben festgestellt, dass die von Gewichts- und Normalkraft verursachten Momente verschiedene Beträge haben (Teil f), obwohl die Beträge der verursachenden Kräfte gleich sind (Teil b).

g) Ist es möglich, dass die Normalkraft und die Gewichtskraft auf der gleichen Wirkungslinie liegen?

Markieren Sie in Abbildung 1 den Bereich der Kontaktfläche von Kiste und Boden, in dem die Normalkraft $\vec{F}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{KB}}$ eingezeichnet werden muss, damit sowohl Momenten- als auch Kräftegleichgewicht erfüllt sind.

Korrigieren Sie gegebenenfalls Ihr Freikörperbild in Teil a.

Eigentlich wirkt die Normalkraft vom Boden auf die Kiste über die ganze Kontaktfläche verteilt. Im Freikörperbild zeichnet man häufig eine *effektive* Normalkraft so ein, dass deren Moment dem der verteilten Kraft entspricht. In ähnlicher Weise haben wir bisher bereits die Gewichtskraft durch einen Vektor an einem Punkt dargestellt, auch wenn sie eigentlich über das ganze Volumen verteilt am Körper angreift.

2.2 *Grenzbedingungen für das Gleichgewicht*

a) Peter und Maria schieben bzw. ziehen nun stärker, jedoch weiterhin so, dass sich die Kiste nicht bewegt. Welche der folgenden Eigenschaften der Normalkraft $\vec{F}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{KB}}$ ändern sich?
- Betrag
- Richtung
- Angriffspunkt

b) Wie weit kann der Angriffspunkt der effektiven Normalkraft $\vec{F}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{KB}}$ maximal nach rechts verschoben werden?

Wie groß ist in diesem Fall das durch die Normalkraft verursachte Moment bezüglich Punkt A?

Was folgt in diesem Fall für die Momente, die durch die beiden nach rechts gerichteten Kräfte verursacht werden, sofern sich die Kiste weiterhin in Ruhe befindet?

c) Angenommen Peter und Maria schieben bzw. ziehen noch stärker als in dem eben betrachteten Fall in Teil b, ohne dass die Kiste zu rutschen beginnt. Was passiert dann mit der Kiste?

3 Abhängigkeit der Momente vom Bezugspunkt

3.1 *Wechsel des Bezugspunktes*

Betrachten Sie weiterhin die Situation, in der sich die Kiste in Ruhe befindet. Als Bezugspunkt für alle betrachteten Momente verwenden wir nun jedoch Punkt B, der links von der Kiste liegt (siehe Abbildung 2).

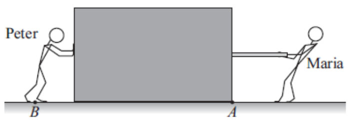


Abbildung 2: Kiste mit Bezugspunkt B (links im Bild)

a) Wird durch die Gewichtskraft der Erde auf die Kiste $\vec{F}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{KE}}$ ein Moment $\vec{M}^{(B)}_{\vec{F}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{KE}}}$ bezüglich B ausgeübt?

Wenn ja, drücken Sie $M^{(B)}_{\vec{F}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{KE}}}$ durch von Ihnen geeignet gewählte Größen aus. Wenn nein, begründen Sie, warum kein solches Moment auftritt.

b) Ist bezüglich Punkt B das durch die Normalkraft des Bodens auf die Kiste verursachte Moment vom Betrag *größer*, *kleiner* oder *gleich* dem durch die Gewichtskraft verursachten Moment? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der (ungefähren) Angriffspunkte der beiden Kräfte.

c) Tragen Sie in der nachfolgenden Tabelle ein, welchen Drehsinn die durch die verschiedenen Kräfte verursachten Momente bezüglich Punkt A und bezüglich Punkt B jeweils besitzen.

	$\vec{M}^{(\,)}_{\vec{F}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{KE}}}$	$\vec{M}^{(\,)}_{\vec{F}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{KB}}}$	Momente der horizontalen Kräfte
A			
B			

d) Sind die Drehsinne der Momente bezüglich Punkt B mit den relativen Beträgen aus Teil b und dem Bewegungszustand der Kiste vereinbar?

- die Gewichtskraft +
- die Normalkraft vom Boden auf die Kiste −

e) Beantworten Sie folgende Frage anhand Ihrer Ergebnisse in den Aufgabenteilen c und d. Ist die Summe der Momente bezüglich Punkt A, die durch die beiden *vertikalen* Kräfte verursacht werden, *gleich* oder *ungleich* Null?

ungleich

f) Ist bezüglich Punkt A das durch die Normalkraft verursachte Moment vom Betrag *größer*, *kleiner* oder *gleich* dem durch die Gewichtskraft verursachte Moment? Begründen Sie.

kleiner – Hebel kleiner!

Ist Ihre Antwort mit der in Teil e vereinbar?

Sie haben festgestellt, dass die von Gewichts- und Normalkraft verursachten Momente verschiedene Beträge haben (Teil f), obwohl die Beträge der verursachenden Kräfte gleich sind (Teil b).

g) Ist es möglich, dass die Normalkraft und die Gewichtskraft auf der gleichen Wirkungslinie liegen? *nein*

Markieren Sie in Abbildung 1 den Bereich der Kontaktfläche von Kiste und Boden, in dem die Normalkraft $\vec{F}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{KB}}$ eingezeichnet werden muss, damit sowohl Momenten- als auch Kräftegleichgewicht erfüllt sind.

Korrigieren Sie gegebenenfalls Ihr Freikörperbild in Teil a.

Eigentlich wirkt die Normalkraft vom Boden auf die Kiste über die ganze Kontaktfläche verteilt. Im Freikörperbild zeichnet man häufig eine *effektive* Normalkraft so ein, dass deren Moment dem der verteilten Kraft entspricht. In ähnlicher Weise haben wir bisher bereits die Gewichtskraft durch einen Vektor an einem Punkt dargestellt, auch wenn sie eigentlich über das ganze Volumen verteilt am Körper angreift.

2.2 *Grenzbedingungen für das Gleichgewicht*

a) Peter und Maria schieben bzw. ziehen nun stärker, jedoch weiterhin so, dass sich die Kiste nicht bewegt. Welche der folgenden Eigenschaften der Normalkraft $\vec{F}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{KB}}$ ändern sich?

- Betrag
- Richtung
- Angriffspunkt

b) Wie weit kann der Angriffspunkt der effektiven Normalkraft $\vec{F}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{KB}}$ maximal nach rechts verschoben werden?

bis A

Wie groß ist in diesem Fall das durch die Normalkraft verursachte Moment bezüglich Punkt A?

null

Was folgt in diesem Fall für die Momente, die durch die beiden nach rechts gerichteten Kräfte verursacht werden, sofern sich die Kiste weiterhin in Ruhe befindet?

Dürfen nicht größer werden – sonst kippt die Kiste um!

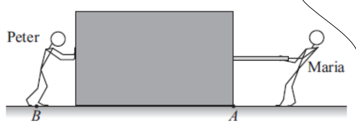
c) Angenommen Peter und Maria schieben bzw. ziehen noch stärker als in dem eben betrachteten Fall in Teil b, ohne dass die Kiste zu rutschen beginnt. Was passiert dann mit der Kiste?

kippt um A

3 Abhängigkeit der Momente vom Bezugspunkt

3.1 *Wechsel des Bezugspunktes*

Betrachten Sie weiterhin die Situation, in der sich die Kiste in Ruhe befindet. Als Bezugspunkt für alle betrachteten Momente verwenden wir nun jedoch Punkt B, der links von der Kiste liegt (siehe Abbildung 2).



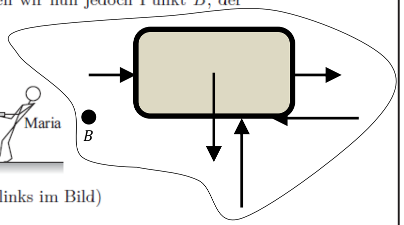


Abbildung 2: Kiste mit Bezugspunkt B (links im Bild)

a) Wird durch die Gewichtskraft der Erde auf die Kiste $\vec{F}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{KE}}$ ein Moment $\vec{M}_{\vec{F}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{KE}}}^{(B)}$ bezüglich B ausgeübt? *Ja*

Wenn ja, drücken Sie $M_{\vec{F}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{KE}}}^{(B)}$ durch von Ihnen geeignet gewählte Größen aus. Wenn nein, begründen Sie, warum kein solches Moment auftritt.

Gewichtskraf mal Hebel!

b) Ist bezüglich Punkt B das durch die Normalkraft des Bodens auf die Kiste verursachte Moment vom Betrag *größer*, *kleiner* oder *gleich* dem durch die Gewichtskraft verursachten Moment? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der (ungefähren) Angriffspunkte der beiden Kräfte.

Größer – Hebel größer

c) Tragen Sie in der nachfolgenden Tabelle ein, welchen Drehsinn die durch die verschiedenen Kräfte verursachten Momente bezüglich Punkt A und bezüglich Punkt B jeweils besitzen.

	$\vec{M}_{\vec{F}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{KE}}}^{()}$	$\vec{M}_{\vec{F}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{KB}}}^{()}$	Momente der horizontalen Kräfte
A	+	−	−
B	−	+	−

d) Sind die Drehsinne der Momente bezüglich Punkt B mit den relativen Beträgen aus Teil b und dem Bewegungszustand der Kiste vereinbar?

Ja!

Ein Moment ist ein Maß für die Eigenschaft einer Kraft, zur Drehbewegung eines Körpers beizutragen. Dieses kann, wie wir im letzten Arbeitsblatt gesehen haben, durch eine Einzelkraft geschehen. Hier betrachten wir Momente, die durch zwei Kräfte verursacht werden, die in entgegengesetzter Richtung und mit gleichem Betrag auf *einen* Körper wirken. Zwei Kräfte dieser Art werden auch als Kräftepaar (engl.: *couple*) bezeichnet; dies ist zu unterscheiden von dem zuvor eingeführten *Newton'schen Kräftepaar*, das zwei gegenseitig ausgeübten Kräften zwischen zwei Körpern bezeichnet.

1 Freies Moment

1.1 *Moment eines Kräftepaares*

In den Situationen I bis III wirken verschiedene Kräfte vom Betrag F auf einen ebenen Körper. Die horizontalen Abstände benachbarter Punkte auf dem Körper betragen a, die vertikalen $a/2$.

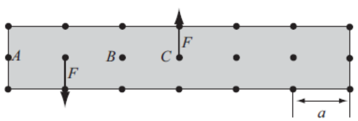
a) Wählen Sie ein Koordinatensystem für die Situationen I bis III und skizzieren Sie dieses.

Koordinaten-system

b) Bestimmen Sie für die dargestellten Situationen die Beträge

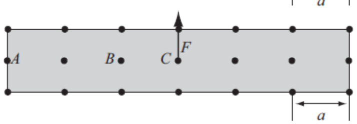
- der resultierenden Kraft F_{res}
- des resultierenden Moments $M_{\text{res}}^{(A)}$ bezüglich Punkt A
- des resultierenden Moments $M_{\text{res}}^{(B)}$ bezüglich Punkt B
- des resultierenden Moments $M_{\text{res}}^{(C)}$ bezüglich Punkt C

I



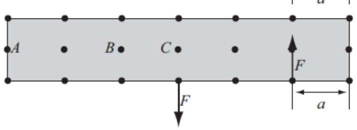
F_{res}	$M_{\text{res}}^{(A)}$	$M_{\text{res}}^{(B)}$	$M_{\text{res}}^{(C)}$

II



F_{res}	$M_{\text{res}}^{(A)}$	$M_{\text{res}}^{(B)}$	$M_{\text{res}}^{(C)}$

III



F_{res}	$M_{\text{res}}^{(A)}$	$M_{\text{res}}^{(B)}$	$M_{\text{res}}^{(C)}$

Beantworten Sie die folgenden Fragen anhand Ihrer obigen Ergebnisse, und geben Sie jeweils an, welche der Situationen Sie verwendet haben.

c) Hängt das Moment, das durch eine Einzelkraft verursacht wird, von der Wahl des Bezugspunktes ab?

d) Hängt das Moment, das durch zwei Kräfte entgegengesetzter Richtung und gleichen Betrages verursacht wird, von der Wahl des Bezugspunktes ab?

1.2 *Ersetzen eines Kräftepaars durch ein freies Moment*

Wir haben Kräfte in Freikörperbildern durch Vektoren an Ihrem Angriffspunkt dargestellt.

Ein Kräftepaar, das aus zwei Kräften entgegengesetzter Richtung und gleichen Betrages besteht, die auf den gleichen Körper wirken, kann in einem Freikörperbild durch einen gekrümmten Pfeil, z. B. ↷, ersetzt werden und wird dann auch *freies Moment* genannt. Freie Momente müssen im Momentengleichgewicht berücksichtigt werden, im Kräftegleichgewicht treten sie jedoch nicht auf.

a) Wie lässt sich der Sprachgebrauch des *freien* Moments begründen?

b) Wie lässt sich erklären, dass freie Momente keinen Einfluss auf das Kräftegleichgewicht haben?

c) Ersetzen Sie das Kräftepaar in Abbildung 3 durch das eben eingeführte Symbol für ein freies Moment in Abbildung 4.

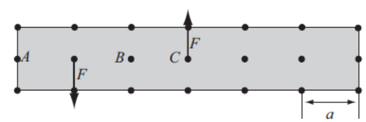


Abbildung 3: Freikörperbild mit Kräftepaar

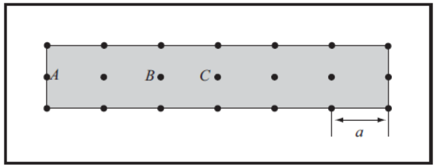


Abbildung 4: Freikörperbild mit freiem Moment

d) Ist es möglich, das freie Moment an einem anderen als dem von Ihnen gewählten Punkt einzuzeichnen? Erläutern Sie.

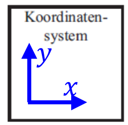
Ein Moment ist ein Maß für die Eigenschaft einer Kraft, zur Drehbewegung eines Körpers beizutragen. Dieses kann, wie wir im letzten Arbeitsblatt gesehen haben, durch eine Einzelkraft geschehen. Hier betrachten wir Momente, die durch zwei Kräfte verursacht werden, die in entgegengesetzter Richtung und mit gleichem Betrag auf *einen* Körper wirken. Zwei Kräfte dieser Art werden auch als Kräftepaar (engl.: *couple*) bezeichnet; dies ist zu unterscheiden von dem zuvor eingeführten *Newton'schen Kräftepaar*, das zwei gegenseitig ausgeübten Kräften zwischen zwei Körpern bezeichnet.

1 Freies Moment

1.1 *Moment eines Kräftepaares*

In den Situationen I bis III wirken verschiedene Kräfte vom Betrag F auf einen ebenen Körper. Die horizontalen Abstände benachbarter Punkte auf dem Körper betragen a, die vertikalen $a/2$.

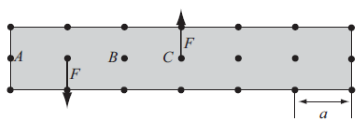
a) Wählen Sie ein Koordinatensystem für die Situationen I bis III und skizzieren Sie dieses.



b) Bestimmen Sie für die dargestellten Situationen die Beträge

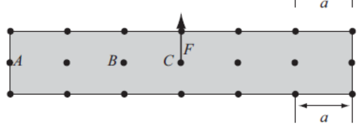
- der resultierenden Kraft F_{res}
- des resultierenden Moments $M_{\text{res}}^{(A)}$ bezüglich Punkt A
- des resultierenden Moments $M_{\text{res}}^{(B)}$ bezüglich Punkt B
- des resultierenden Moments $M_{\text{res}}^{(C)}$ bezüglich Punkt C

I



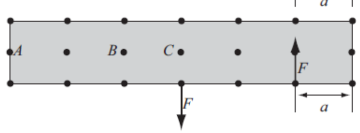
F_{res}	$M_{\text{res}}^{(A)}$	$M_{\text{res}}^{(B)}$	$M_{\text{res}}^{(C)}$
0	$2Fa$	$2Fa$	$2Fa$

II



F_{res}	$M_{\text{res}}^{(A)}$	$M_{\text{res}}^{(B)}$	$M_{\text{res}}^{(C)}$
F	$3Fa$	Fa	0

III



F_{res}	$M_{\text{res}}^{(A)}$	$M_{\text{res}}^{(B)}$	$M_{\text{res}}^{(C)}$
0	$2Fa$	$2Fa$	$2Fa$

Beantworten Sie die folgenden Fragen anhand Ihrer obigen Ergebnisse, und geben Sie jeweils an, welche der Situationen Sie verwendet haben.

c) Hängt das Moment, das durch eine Einzelkraft verursacht wird, von der Wahl des Bezugspunktes ab?

Ja

d) Hängt das Moment, das durch zwei Kräfte entgegengesetzter Richtung und gleichen Betrages verursacht wird, von der Wahl des Bezugspunktes ab?

Nein

1.2 *Ersetzen eines Kräftepaars durch ein freies Moment*

Wir haben Kräfte in Freikörperbildern durch Vektoren an Ihrem Angriffspunkt dargestellt.

> Ein Kräftepaar, das aus zwei Kräften entgegengesetzter Richtung und gleichen Betrages besteht, die auf den gleichen Körper wirken, kann in einem Freikörperbild durch einen gekrümmten Pfeil, z. B. ↷, ersetzt werden und wird dann auch *freies Moment* genannt. Freie Momente müssen im Momentengleichgewicht berücksichtigt werden, im Kräftegleichgewicht treten sie jedoch nicht auf.

a) Wie lässt sich der Sprachgebrauch des *freien* Moments begründen?

um alle drehachsen gleich

b) Wie lässt sich erklären, dass freie Momente keinen Einfluss auf das Kräftegleichgewicht haben?

$\Sigma F = 0$

c) Ersetzen Sie das Kräftepaar in Abbildung 3 durch das eben eingeführte Symbol für ein freies Moment in Abbildung 4.

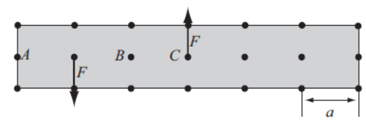


Abbildung 3: Freikörperbild mit Kräftepaar

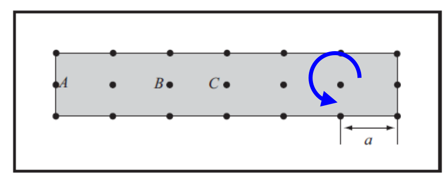


Abbildung 4: Freikörperbild mit freiem Moment

d) Ist es möglich, das freie Moment an einem anderen als dem von Ihnen gewählten Punkt einzuzeichnen? Erläutern Sie.

überall

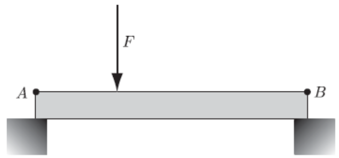
2 Kräfte und Momente im Freikörperbild

In Arbeitsblatt *Kräfte* haben wir Kräfte im Freikörperbild dargestellt. Im Folgenden soll noch einmal diskutiert werden, welche Momente im Freikörperbild dargestellt werden und welche nicht.

2.1 *Kräfte und Momente von Einzelkräften*

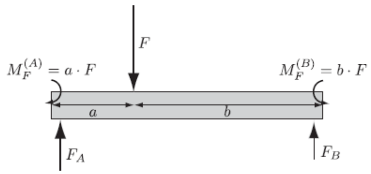
Drei Studierende bearbeiten folgende Aufgabe:

„Auf einen auf zwei Mauerstücken liegenden masselosen Balken wirkt eine vertikale Kraft von Betrag F von oben. Zeichnen Sie ein Freikörperbild des Balkens."

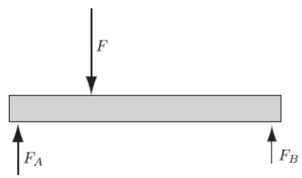


Die drei Studierenden haben folgende Freikörperbilder gezeichnet und Begründungen dafür gegeben.

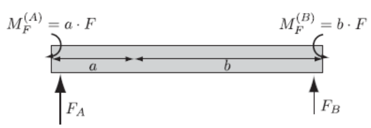
Hans: *„Ich denke, dass mein Freikörperbild richtig ist, da ja die Kraft F von oben auch Momente auf den Balken bezüglich der Auflagepunkte ausübt, die ich rechts und links mit M_F eingezeichnet habe."*



Elisabeth: *„Ich habe gar kein Moment in mein Freikörperbild eingezeichnet, weil Momente von Einzelkräften nie eingezeichnet werden. Nur die freien Momente stellt man im Freikörperbild dar."*

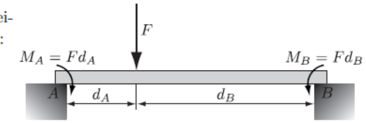


Reinhold: *„Ich glaube Ihr habt beide nicht ganz recht. Man kann schon die Momente einer Kraft einzeichnen, und zwar in einem beliebig gewählten Punkt im Abstand d vom Angriffspunkt, muss dann aber wegen $M = d \cdot F$ die Kraft aus dem Freikörperbild weglassen, so wie ich es gemacht habe."*



a) Stimmen Sie einer dieser Aussagen zu? Begründen Sie.

Zuweilen findet man in Lehrbüchern eine Darstellung ähnlich der Folgenden:



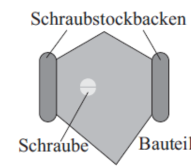
b) Diskutieren Sie, inwiefern dieses Bild missverstanden werden kann.

c) Tritt das Moment der Kraft F im Momentengleichgewicht (z.B. bezüglich Punkt A) auf, auch ohne dass dieses Moment im Freikörperbild eingezeichnet wird?

Erläutern Sie, inwiefern ein Freikörperbild, wie es Reinhold gezeichnet hat, zu einer falschen Gleichung für das Momentengleichgewicht führen könnte.

2.2 *Freie Momente*

2.3 Eine Person versucht mit einem Schraubendreher vergeblich, eine festgerostete Schraube an einem mechanischen Bauteil zu lösen. Das Bauteil ist in einem Schraubstock eingespannt.



a) Zeichnen Sie ein mögliches Freikörperbild für das Bauteil in der oben beschriebenen Situation.

b) Ist es möglich die Wirkung des Schraubendrehers auf das Bauteil durch ein freies Moment darzustellen?

c) Ist es möglich die Wirkung des Schraubendrehers auf das Bauteil durch ein Kräftepaar darzustellen?

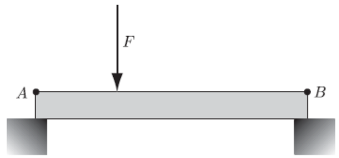
2 Kräfte und Momente im Freikörperbild

In Arbeitsblatt *Kräfte* haben wir Kräfte im Freikörperbild dargestellt. Im Folgenden soll noch einmal diskutiert werden, welche Momente im Freikörperbild dargestellt werden und welche nicht.

2.1 *Kräfte und Momente von Einzelkräften*

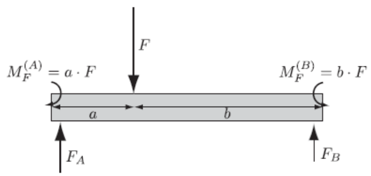
Drei Studierende bearbeiten folgende Aufgabe:

„Auf einen auf zwei Mauerstücken liegenden masselosen Balken wirkt eine vertikale Kraft von Betrag F von oben. Zeichnen Sie ein Freikörperbild des Balkens.“

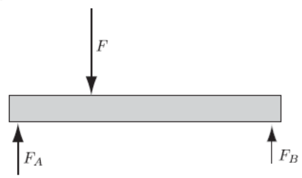


Die drei Studierenden haben folgende Freikörperbilder gezeichnet und Begründungen dafür gegeben.

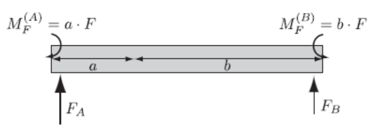
Hans: *„Ich denke, dass mein Freikörperbild richtig ist, da ja die Kraft F von oben auch Momente auf den Balken bezüglich der Auflagepunkte ausübt, die ich rechts und links mit M_F eingezeichnet habe.“*



Elisabeth: *„Ich habe gar kein Moment in mein Freikörperbild eingezeichnet, weil Momente von Einzelkräften nie eingezeichnet werden. Nur die freien Momente stellt man im Freikörperbild dar.“*

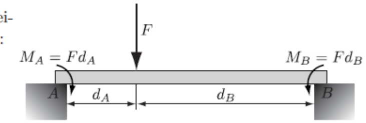


Reinhold: *„Ich glaube Ihr habt beide nicht ganz recht. Man kann schon die Momente einer Kraft einzeichnen, und zwar in einem beliebig gewählten Punkt im Abstand d vom Angriffspunkt, muss dann aber wegen $M = d \cdot F$ die Kraft aus dem Freikörperbild weglassen, so wie ich es gemacht habe.“*



a) Stimmen Sie einer dieser Aussagen zu? Begründen Sie.

Zuweilen findet man in Lehrbüchern eine Darstellung ähnlich der Folgenden:



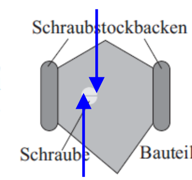
b) Diskutieren Sie, inwiefern dieses Bild missverstanden werden kann.

c) Tritt das Moment der Kraft F im Momentengleichgewicht (z.B. bezüglich Punkt A) auf, auch ohne dass dieses Moment im Freikörperbild eingezeichnet wird?

Erläutern Sie, inwiefern ein Freikörperbild, wie es Reinhold gezeichnet hat, zu einer falschen Gleichung für das Momentengleichgewicht führen könnte.

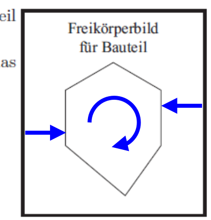
2.2 *Freie Momente*

2.3 Eine Person versucht mit einem Schraubendreher vergeblich, eine festgerostete Schraube an einem mechanischen Bauteil zu lösen. Das Bauteil ist in einem Schraubstock eingespannt.



a) Zeichnen Sie ein mögliches Freikörperbild für das Bauteil in der oben beschriebenen Situation.

b) Ist es möglich die Wirkung des Schraubendrehers auf das Bauteil durch ein freies Moment darzustellen?



c) Ist es möglich die Wirkung des Schraubendrehers auf das Bauteil durch ein Kräftepaar darzustellen?

Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

7. 2D GLEICHGEWICHT

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

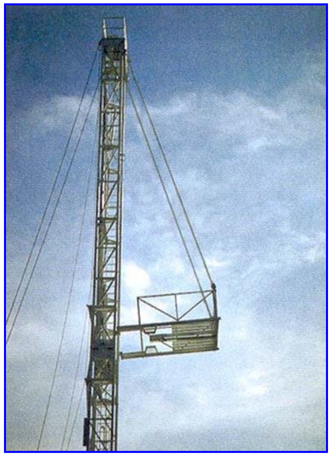
Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

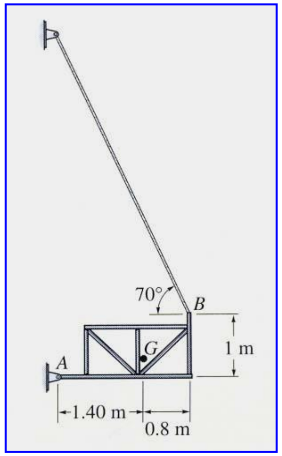
1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton’schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

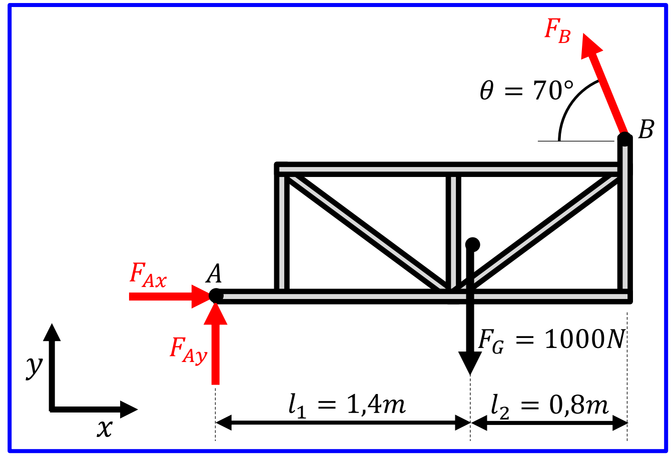
12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke’sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

LÖSUNGSWEGE FÜR PROBLEME MIT STARREN KÖRPERN





idealisiertes Model



Freikörperbild

1. Eine Skizze mit Außenform wird dargestellt. Das Objekt wird weggeschnitten vom Umgebung.
2. Alle externen Kräfte und Momente werden dargestellt Inklusive: a) Angewandte Belastungen, b) Reaktionen der Gelenke, c) Gewicht des Körpers.
3. Belastungen und Dimensionen labeln: Alle bekannten Kräfte und Momente sollen, mit Größen und Richtung gezeigt werden. Buchstaben können als Labels angewendet werden. Z.B.: F_{Ax}, F_{Ay}, F_B, usw.

LÖSUNGSWEGE FÜR PROBLEME MIT STARREN KÖRPERN

Statik: Gleichungen Newton II

$\Sigma \mathrm{F} = \mathrm{m} \cdot a = 0$ (translation)

$\Sigma \mathrm{M} = J \cdot \alpha = 0$ (rotation)

in 2D

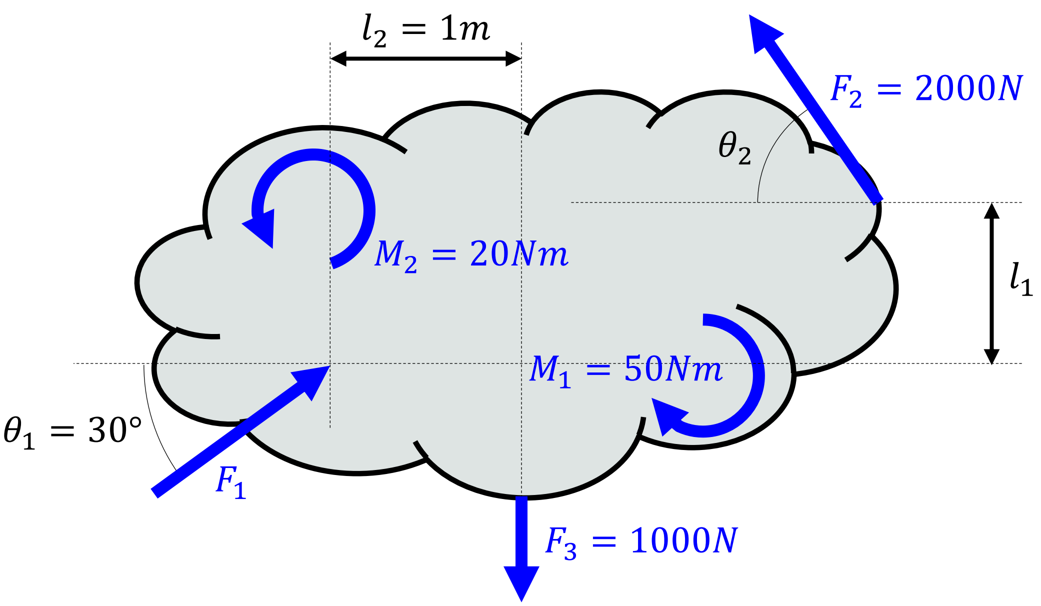
① $\Sigma F_x = 0$ (translation)

② $\Sigma F_y = 0$ (translation)

③ $\Sigma \mathrm{M} = 0$ (rotation) gegen-uhrzeigersinn: positive

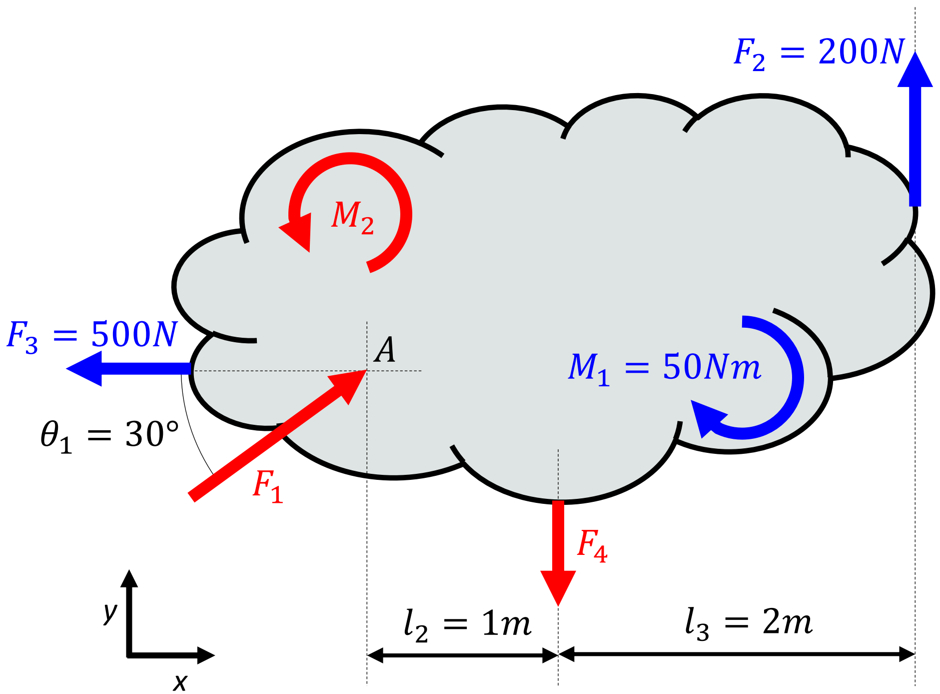
3 Gleichungen erlauben 3 Unbekannten finden zu können

Unbekannten
- Kraft
- Moment
- Länge
- Winkel



Beispiel 1: Kräfte und Momente

Gesucht: F_1, F_4, M_2



Statik: Gleichungen Newton II

$\Sigma F = m \cdot a = 0$ (translation)

$\Sigma M = J \cdot \alpha = 0$ (rotation)

in 2D

① $\Sigma F_x = 0$ (translation)

② $\Sigma F_y = 0$ (translation)

③ $\Sigma M = 0$ (rotation gegen-uhrzeigersinn positiv)

Gesucht: F_1, F_4, M_2

i) Freikörperbild (gegeben!)

ii) 3 Gleichungen (2D Statik)

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_1 \cdot cos(\theta_1) - F_3 = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_1 \cdot sin(\theta_1) + F_2 - F_4 = 0$

③ $\Sigma M_A = 0$ (Drehachse um A)

$\Rightarrow M_2 - M_1 - F_4 \cdot l_2 + F_2 \cdot (l_2 + l_3) = 0$

iii) Gleichungen lösen

(für 3 unbekannten F_1, F_4, M_2)

① lösen für F_1:

$F_1 = F_3 / cos(\theta_1)$

$\Rightarrow F_1 = 500N/cos(30°) = 577N$

② lösen für F_4:

$F_4 = F_1 \cdot sin(\theta_1) + F_2$

$\Rightarrow F_4 = 577 \cdot sin(30°) + 200 = 489N$

③ lösen für M_2:

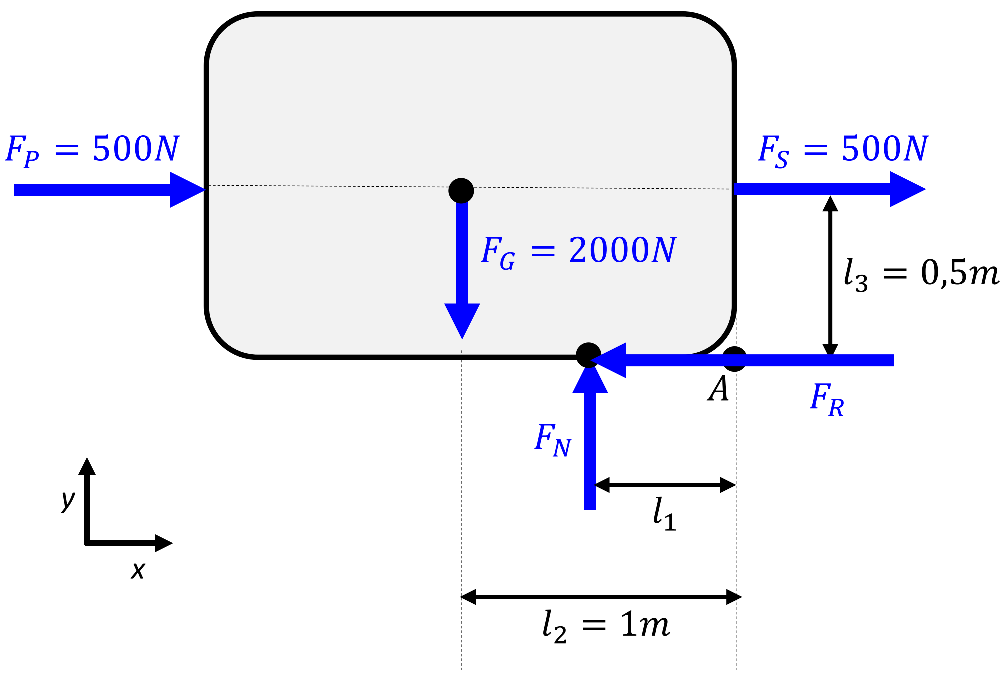
$M_2 = M_1 + F_4 \cdot l_2 - F_2 \cdot (l_2 + l_3)$

$\Rightarrow M_2 = 50Nm + 489N \cdot 1m - 200N \cdot (1m + 2m) = -61{,}3Nm$

Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

Beispiel 2 : Kräfte und eine Länge

Gesucht: F_N, F_R, l_1



Statik: Gleichungen Newton II

$\Sigma F = m \cdot a = 0$ (translation)

$\Sigma M = J \cdot \alpha = 0$ (rotation)

in 2D

① $\Sigma F_x = 0$ (translation)

② $\Sigma F_y = 0$ (translation)

③ $\Sigma M = 0$ (rotation gegen-uhrzeigersinn positiv)

Gesucht: F_N, F_R, l_1

i) Freikörperbild (gegeben!)

ii) 3 Gleichungen (2D Statik)

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_P + F_S - F_R = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_N - F_G = 0$

③ $\Sigma M_A = 0$ (Drehachse um A)

$\Rightarrow -F_P \cdot L_3 - F_S \cdot L_3 + F_G \cdot L_2 - F_N \cdot L_1 = 0$

iii) Gleichungen lösen

(für 3 unbekannten F_N, F_R, l_1)

① lösen für F_R:

$F_R = F_P + F_S$

$\Rightarrow F_R = 500N + 500N = 1000N$

② lösen für F_N:

$F_N = F_G = 2000N$

$\Rightarrow F_N = 2000N$

③ lösen für l_1:

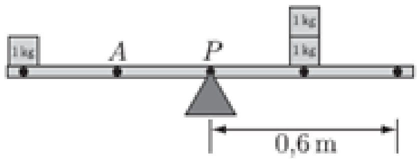
$l_1 = (-F_P \cdot L_3 - F_S \cdot L_3 + F_G \cdot L_2)/F_N$

$\Rightarrow l_1 = (-500N \cdot 0,5m - 500N \cdot 0,5m + 2000 \cdot 1m)/2000N$

$\Rightarrow l_1 = 0,75m$

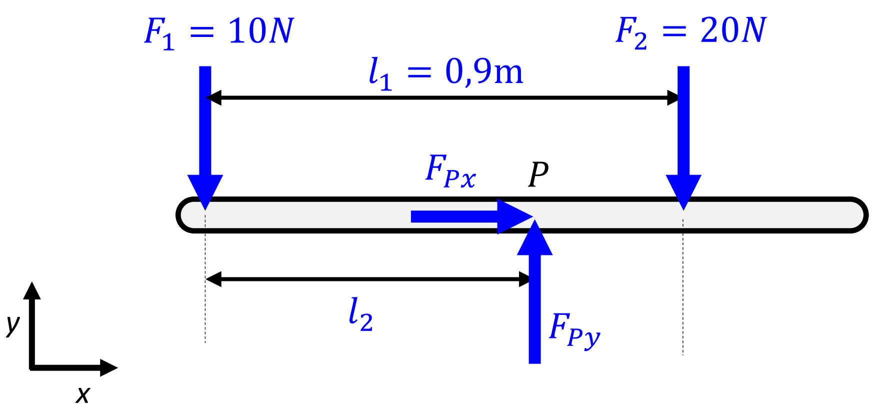
Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

Beispiel 3 : Kräfte und eine Länge



Gesucht: Hebelreaktionskraft und Position

Gesucht: F_{Px}, F_{Py}, l_2



Statik: Gleichungen Newton II
$\Sigma F = m \cdot a = 0$ (translation)
$\Sigma M = J \cdot \alpha = 0$ (rotation)

in 2D
① $\Sigma F_x = 0$ (translation)
② $\Sigma F_y = 0$ (translation)
③ $\Sigma M = 0$ (rotation gegen-uhrzeigersinn positiv)

Gesucht: F_{Px}, F_{Py}, l_2

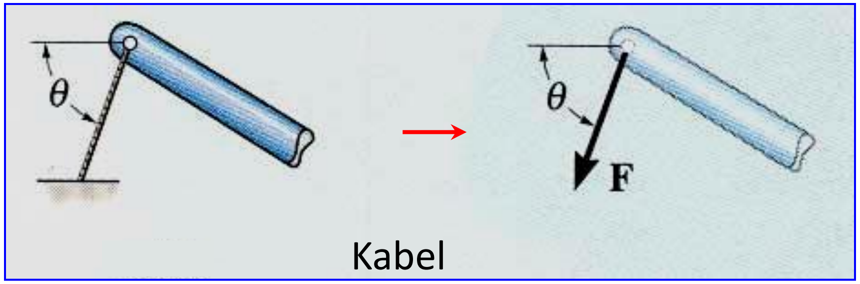
i) Freikörperbild (gegeben!)

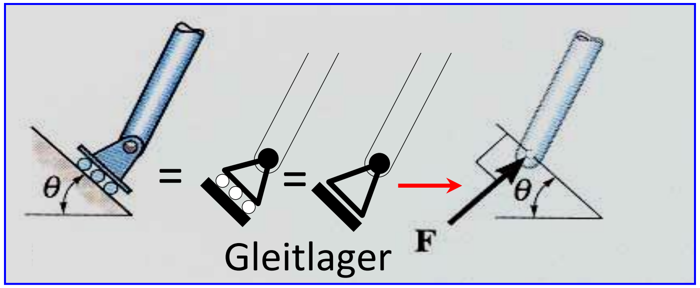
ii) 3 Gleichungen (2D Statik)
① $\Sigma F_x = 0$
$\Rightarrow F_{Px} = 0$
② $\Sigma F_y = 0$
$\Rightarrow F_{Py} - F_1 - F_2 = 0$
③ $\Sigma M_P = 0$ (Drehachse um P)
$\Rightarrow F_1 \cdot l_2 - F_2 \cdot (l_1 - l_2) = 0$
$\Rightarrow (F_1 + F_2) \cdot l_2 - F_2 \cdot l_1 = 0$

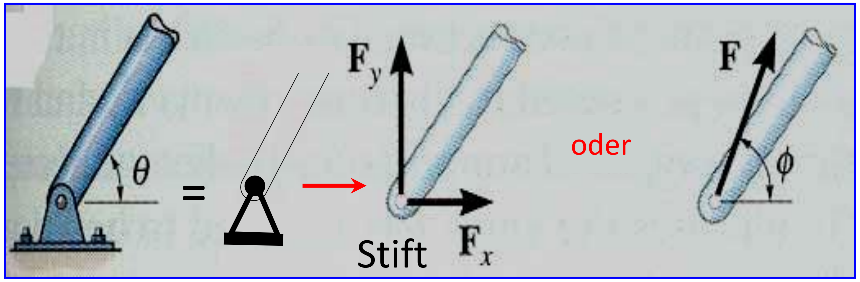
iii) Gleichungen lösen
(für 3 unbekannten F_{Px}, F_{Py}, l_2)
① lösen für F_{Px}:
$F_{Px} = 0N$
② lösen für F_{Py}:
$F_{Py} = F_1 + F_2$
$\Rightarrow F_{Py} = 10N + 20N = 30N$
③ lösen für l_2:
$l_2 = F_2 \cdot l_1 / (F_1 + F_2)$
$\Rightarrow l_2 = 20N \cdot 0{,}9m / (10N + 20N)$
$\Rightarrow l_2 = 0{,}6m$

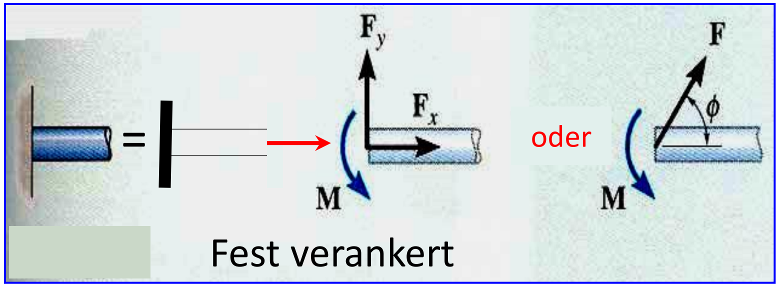
Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

REAKTIONS-KRÄFTE / -MOMENTE





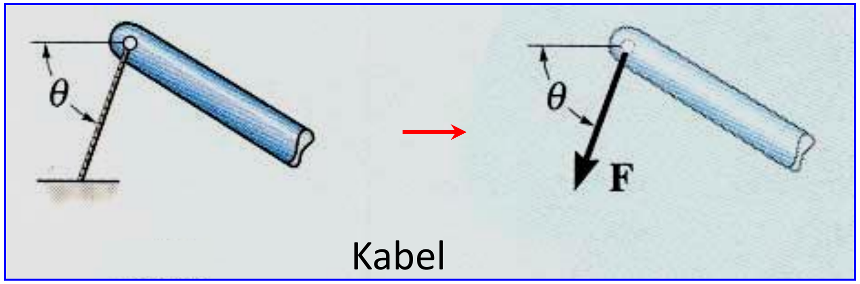


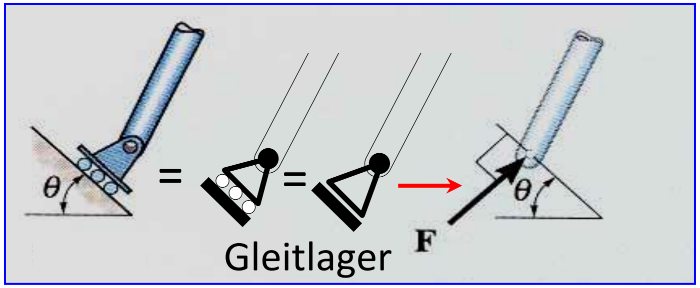


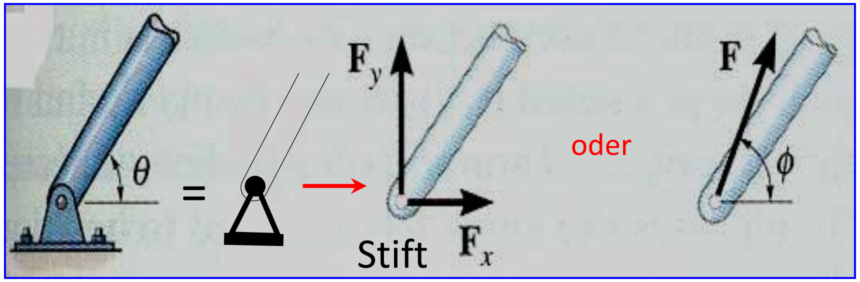
Ein paar Beispiele sind gezeigt. Andere in den Lehrbüchern

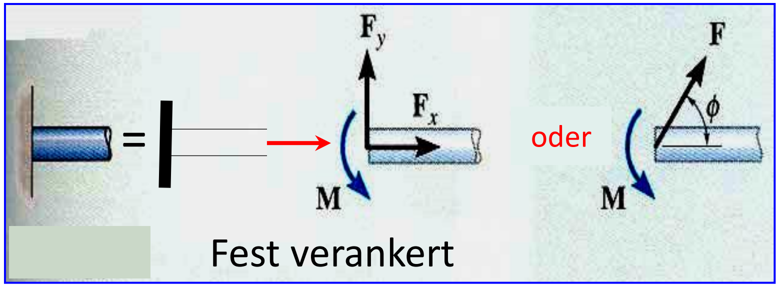
Generell, wenn ein Gelenk keinen Translation in eine bestimmte Richtung zulässt wirkt eine Kraft auf den Körper in Gegenrichtung. Wenn keinen Rotation möglich ist, wirkt einen Moment auf den Körper.

REAKTIONS-KRÄFTE / -MOMENTE

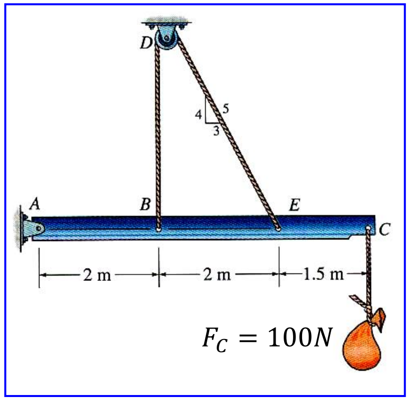




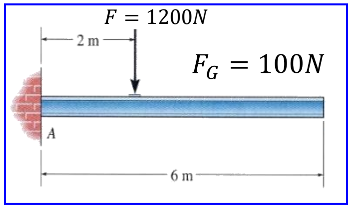




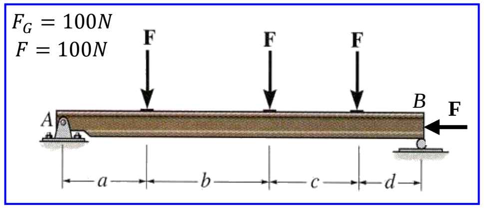
Beispiele



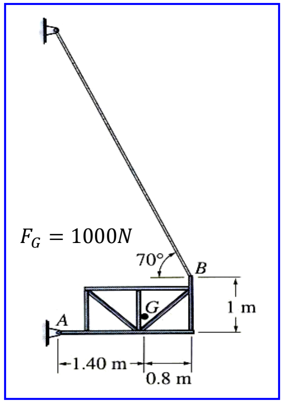
Gesucht: F_A, F_{BD}, F_{DE}



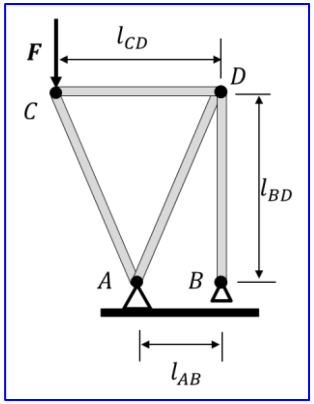
Gesucht: F_A, M_A



Gesucht: F_A, F_B



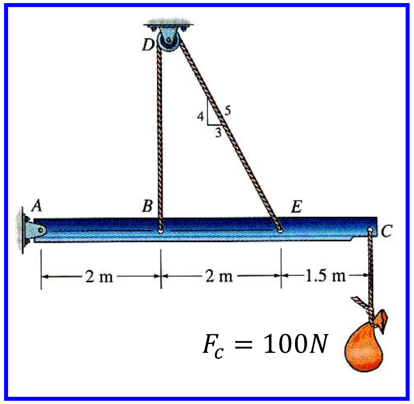
Gesucht: F_A, F_B



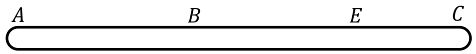
Gesucht: F_A, F_B

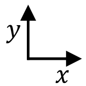
3 Unbekannten ?

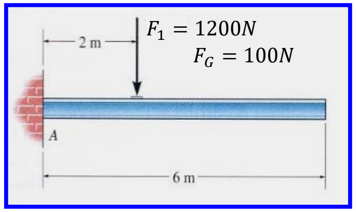
Aufgaben (Freikörperbilder gegeben)



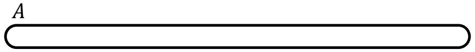
Gesucht: *Reaktionskräfte bei A, Seilkraft*

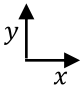


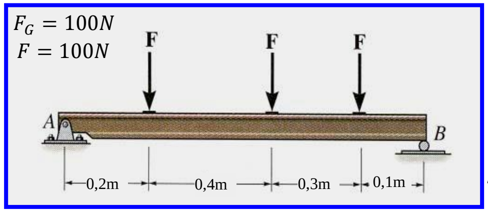




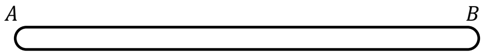
Gesucht: *Reaktionskräfte bei A*

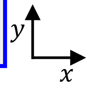


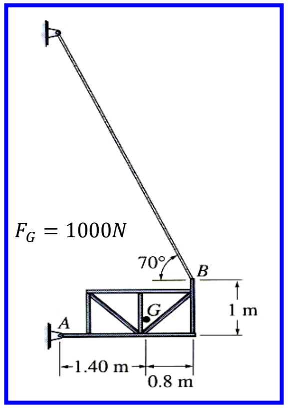




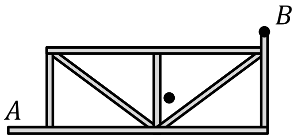
Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_{By}

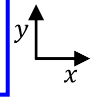


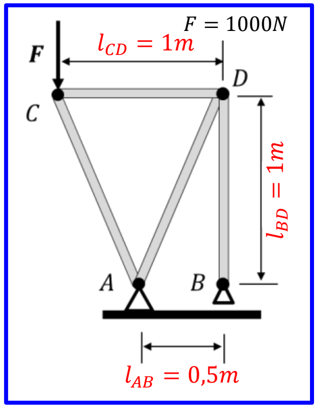




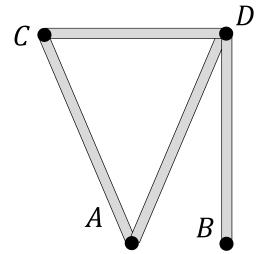
Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_s

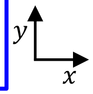




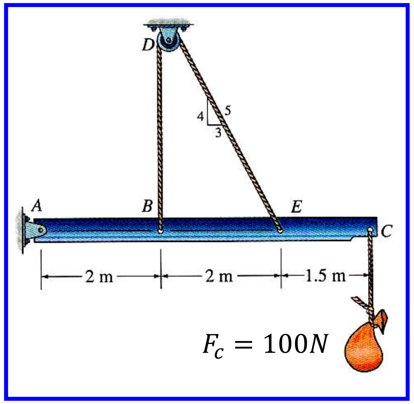


Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_{By}



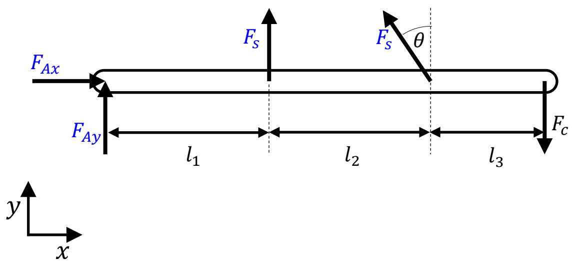


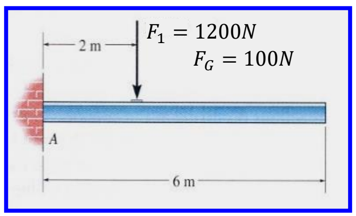
Aufgaben (Freikörperbilder gegeben)



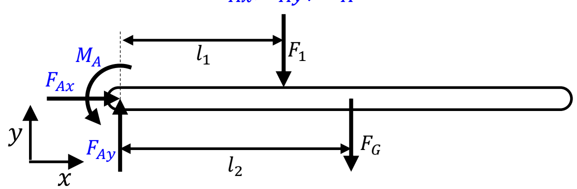
Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_s

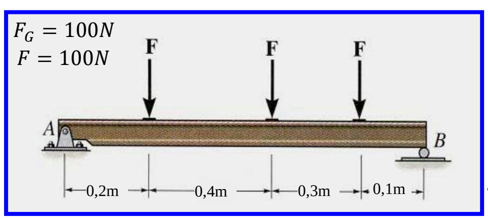
$sin\theta = 3/5 \quad cos\theta = 4/5$



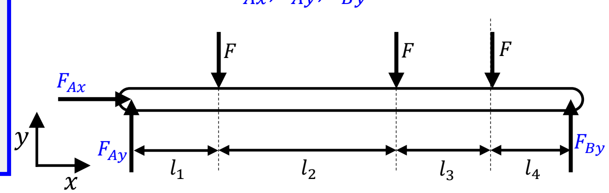


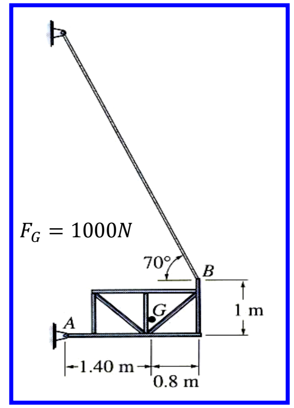
Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, M_A



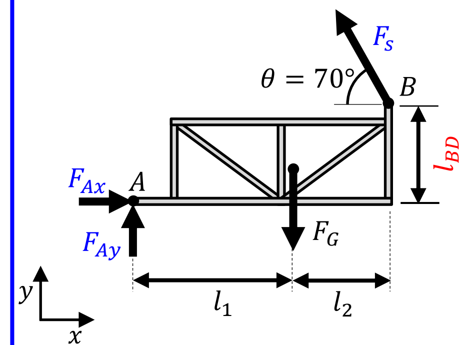


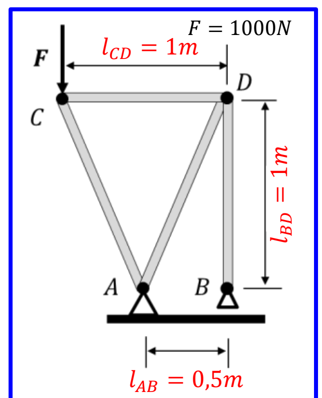
Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_{By}



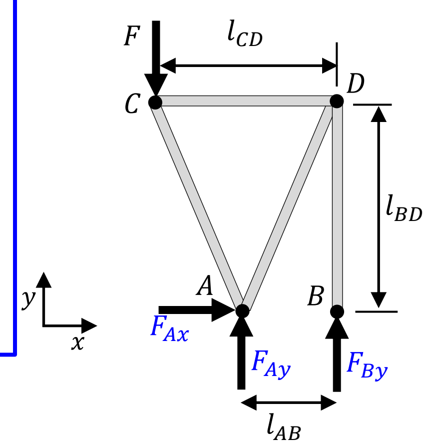


Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_s

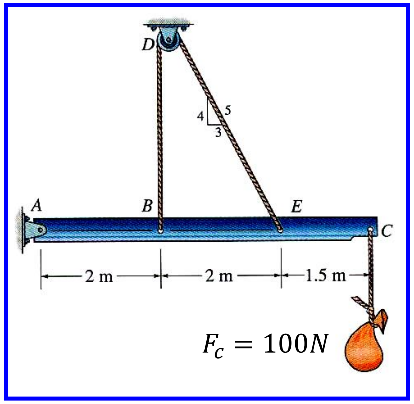




Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_{By}

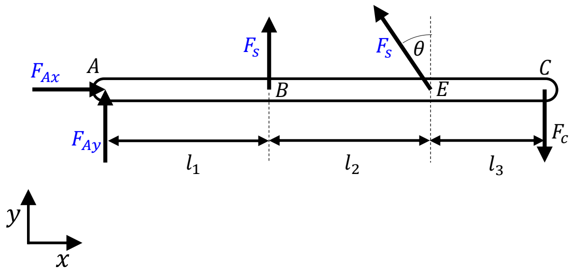


Aufgaben (Freikörperbilder gegeben)

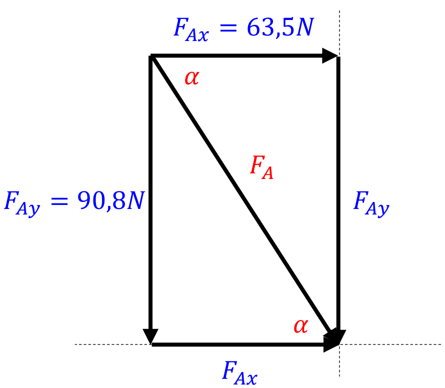


Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_s

$sin\theta = 3/5$ $\quad cos\theta = 4/5$



(Extra) Gesucht: F_A, *Betrag und Winkel* α *zu dem Horizontal*



$$F_A = \sqrt{{F_{Ax}}^2 + {F_{Ay}}^2}$$

$$\Rightarrow F_A = \sqrt{(63{,}5N)^2 + (90{,}8N)^2} = 111N$$

$$tan(\alpha) = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}}$$

$$\Rightarrow \alpha = arctan\left(\frac{F_{Ay}}{F_{Ax}}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = arctan\left(\frac{90{,}8N}{63{,}5N}\right) = 55°$$

Statik: Gleichungen Newton II

$\Sigma F = m \cdot a = 0$ (translation)

$\Sigma M = J \cdot \alpha = 0$ (rotation)

in 2D

① $\Sigma F_x = 0$ (translation)

② $\Sigma F_y = 0$ (translation)

③ $\Sigma M = 0$ (rotation gegen-uhrzeigersinn positiv)

Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_S

i) <u>Freikörperbild (gegeben!)</u>

ii) <u>3 Gleichungen (2D Statik)</u>

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_{Ax} - F_s \cdot \sin\theta = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{Ay} + F_s + F_s \cdot \cos\theta - F_c = 0$

③ $\Sigma M_A = 0$ (Drehachse um A)

$F_s \cdot l_1 + F_s \cdot \cos\theta \cdot (l_1 + l_2) - F_c \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = 0$

iii) <u>Gleichungen lösen</u>

(für 3 unbekannten F_{Ax}, F_{Ay}, F_S)

③lösen für F_s:

$F_s \cdot (l_1 + \cos\theta \cdot (l_1 + l_2)) - F_c \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = 0$

$\Rightarrow F_s = F_c \cdot (l_1 + l_2 + l_3)/(l_1 + \cos\theta \cdot (l_1 + l_2))$

$\Rightarrow F_s$

$= 100N \cdot (2m + 2m + 1{,}5m)/(2m + 4/5 \cdot (2m + 2m))$

$\Rightarrow F_s = 106N$

①lösen für F_{Ax}:

$F_{Ax} = F_s \cdot \sin\theta$

$\Rightarrow F_{Ax} = 106N \cdot 3/5 = 63{,}5N$

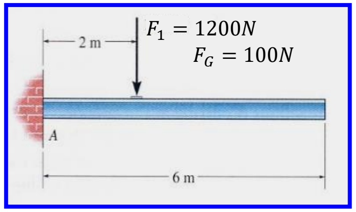
②lösen für F_{Ay}:

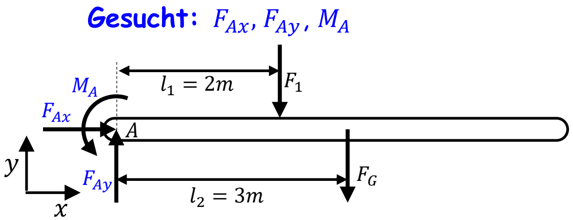
$F_{Ay} = -F_s - F_s \cdot \cos\theta + F_c$

$\Rightarrow F_{Ay} = -106N - 106N \cdot 4/5 + 100N = -90{,}8N$

Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

Aufgaben (Freikörperbilder gegeben)





Statik: Gleichungen Newton II
$\Sigma F = m \cdot a = 0$ (translation)
$\Sigma M = J \cdot \alpha = 0$ (rotation)

in 2D
① $\Sigma F_x = 0$ (translation)
② $\Sigma F_y = 0$ (translation)
③ $\Sigma M = 0$ (rotation gegen-uhrzeigersinn positiv)

Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, M_A

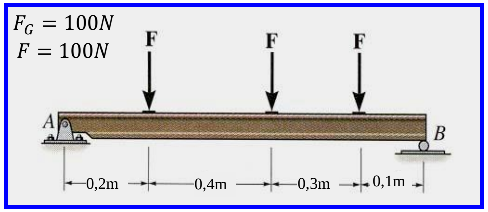
i) Freikörperbild (gegeben!)

ii) 3 Gleichungen (2D Statik)

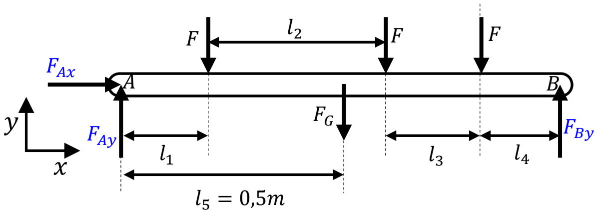
① $\Sigma F_x = 0$
$\Rightarrow F_{Ax} = 0$
② $\Sigma F_y = 0$
$\Rightarrow F_{Ay} - F_1 - F_G = 0$
③ $\Sigma M_A = 0$ (Drehachse um A)
$\Rightarrow M_A - F_1 \cdot l_1 - F_G \cdot l_2 = 0$

iii) Gleichungen lösen
(für 3 unbekannten F_N, F_R, l_1)
①lösen für F_{Ax}:
$F_{Ax} = 0N$
②lösen für F_{Ay}:
$F_{Ay} = F_1 + F_G$
$\Rightarrow F_{Ay} = 1200N + 100N = 1300N$
③lösen für M_A:
$M_A = +F_1 \cdot l_1 + F_G \cdot l_2$
$\Rightarrow M_A = +1200N \cdot 2m + 100N \cdot 3m = 2700Nm$
Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

Aufgaben (Freikörperbilder gegeben)



Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_{By}



Statik: Gleichungen Newton II

$\Sigma \mathrm{F} = \mathrm{m} \cdot a = 0$ (translation)

$\Sigma \mathrm{M} = J \cdot \alpha = 0$ (rotation)

in 2D

① $\Sigma F_x = 0$ (translation)

② $\Sigma F_y = 0$ (translation)

③ $\Sigma \mathrm{M} = 0$ (rotation gegen-uhrzeigersinn positiv)

Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_{By}

i) Freikörperbild (gegeben!)

ii) 3 Gleichungen (2D Statik)

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_{Ax} = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{Ay} - F - F - F + F_{By} - F_G = 0$

③ $\Sigma M_A = 0$ (Drehachse um A)

$\Rightarrow -F \cdot l_1 - F \cdot (l_1 + l_2) - F \cdot (l_1 + l_2 + l_3) + F_{By} \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) - F_G \cdot l_5 = 0$

iii) Gleichungen lösen

(für 3 unbekannten F_{Ax}, F_{Ay}, F_{By})

①lösen für F_{Ax}:

$F_{Ax} = 0N$

③lösen für F_{By}:

$F_{By} = (F(3 \cdot l_1 + 2 \cdot l_2 + l_3) + F_G \cdot l_5)/(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)$

$\Rightarrow F_{By} = (100N(3 \cdot 0{,}2m + 2 \cdot 0{,}4m + 0{,}3m) + 100N \cdot 0{,}5m)/(0{,}2m + 0{,}4m + 0{,}3m + 0{,}1m)$

$\Rightarrow F_{By} = 220N$

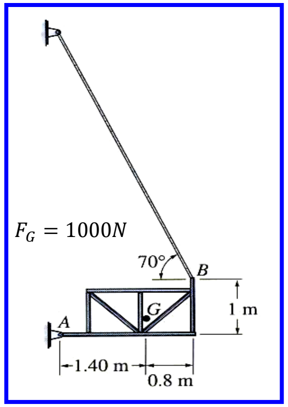
②lösen für F_{Ay}:

$F_{Ay} = 3 \cdot F - F_{By} + F_G$

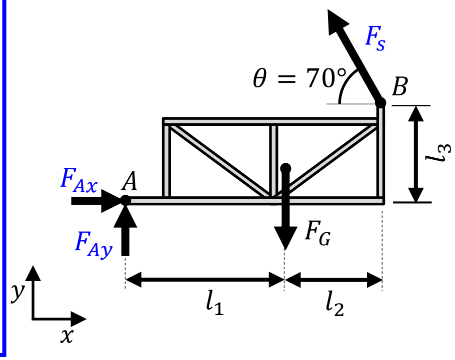
$\Rightarrow F_{Ay} = 3 \cdot 100N - 220N + 100N = 180N$

Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

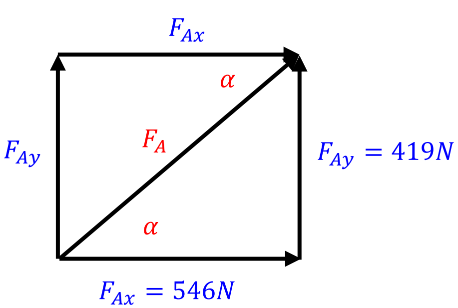
Aufgaben (Freikörperbilder gegeben)



Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_s



(Extra) Gesucht: F_A, *Betrag und Winkel* α *zu dem Horizontal*



$$F_A = \sqrt{{F_{Ax}}^2 + {F_{Ay}}^2}$$

$$\Rightarrow F_A = \sqrt{(546N)^2 + (419N)^2} = 710N$$

$$tan(\alpha) = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}}$$

$$\Rightarrow \alpha = arctan\left(\frac{F_{Ay}}{F_{Ax}}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = arctan\left(\frac{419N}{546N}\right) = 50{,}2°$$

Statik: Gleichungen Newton II

$\Sigma F = m \cdot a = 0$ (translation)

$\Sigma M = J \cdot \alpha = 0$ (rotation)

in 2D

① $\Sigma F_x = 0$ (translation)

② $\Sigma F_y = 0$ (translation)

③ $\Sigma M = 0$ (rotation gegen-uhrzeigersinn positiv)

Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_s

i) Freikörperbild (gegeben!)

ii) 3 Gleichungen (2D Statik)

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_{Ax} - F_s \cdot cos\theta = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{Ay} - F_G + F_s \cdot \sin\theta = 0$

③ $\Sigma M_A = 0$ (Drehachse um A)

$\Rightarrow -F_G \cdot l_1 + F_s \cdot \cos\theta \cdot l_3 + F_s \cdot sin\theta(l_1 + l_2) = 0$

iii) Gleichungen lösen

(für 3 unbekannten F_N, F_R, l_1)

③lösen für F_s:

$F_s \cdot (\cos\theta \cdot l_3 + sin\theta(l_1 + l_2)) - F_G \cdot l_1 = 0$

$\Rightarrow F_s = F_G \cdot l_1 / (\cos\theta \cdot l_3 + sin\theta(l_1 + l_2))$

$\Rightarrow F_s = 1000N \cdot 1{,}4m / (\cos 70° \cdot 1m + sin70°(1{,}4m + 0{,}8m))$

$\Rightarrow F_s = 581N$

①lösen für F_{Ax}:

$F_{Ax} = F_s \cdot \cos\theta$

$\Rightarrow F_{Ax} = 581N \cdot \cos(70°) = 546N$

②lösen für F_{Ay}:

$F_{Ay} = F_G - F_s$

$\Rightarrow F_{Ay} = 1000N - 581N = 454N$

Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

8. SCHWERPUNKT

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

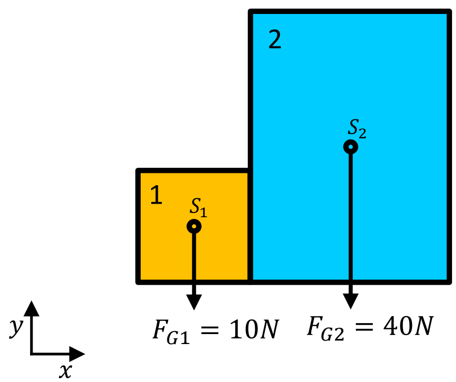
1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton'schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke'sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

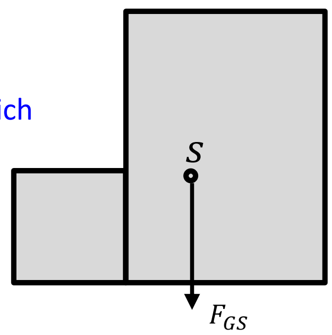
Schwerpunkt

Der Schwerpunkt s ist ein Punkt, der die Lage des resultierenden Gewichts eines Systems von Massenpunkten angibt.

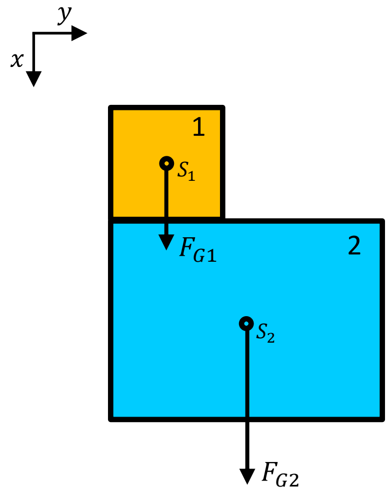


- Gesamtkräfte Gleich
- Gesamtmomente Gleich

$$= \quad (Mechanisch)$$

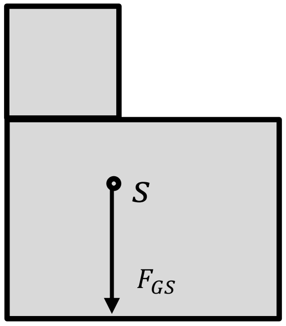


In alle Ausrichtungen!



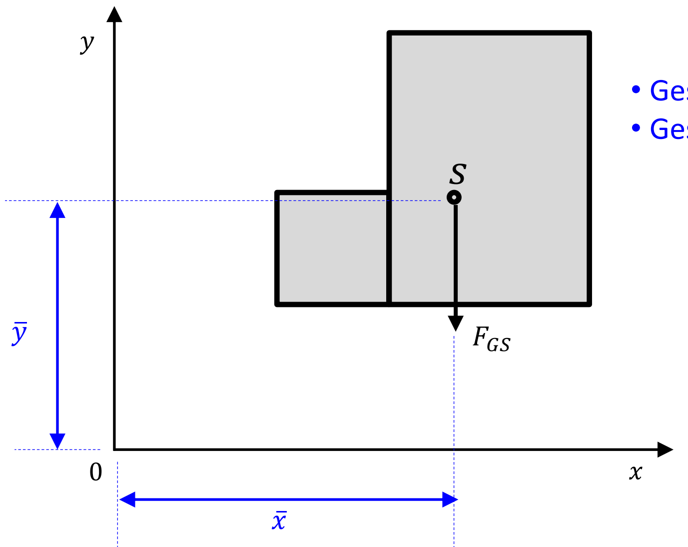
- Gesamtkräfte Gleich
- Gesamtmomente Gleich

$$= \quad (Mechanisch)$$



Schwerpunkt

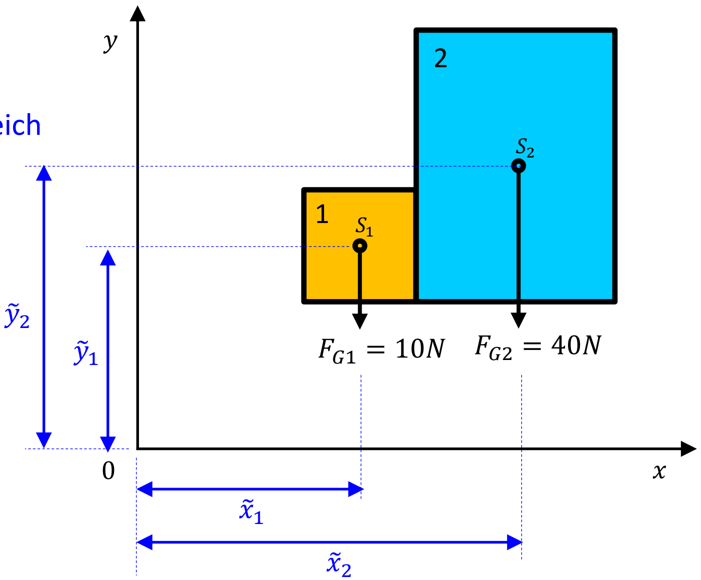
Gleichungen zur Bestimmung des Schwerpunktes $S\,(\bar{x}, \bar{y})$ drücken aus, dass die Momentensummen aller Teile des Systems und das Moment der durch S wirkenden resultierenden Kraft des Systems gleich sind.



- Gesamtkräfte Gleich
- Gesamtmomente Gleich

$=$

$(Mechanisch)$



1. Kräfte: ① $$F_{G_S} = F_{G_1} + F_{G_2}$$

2. Momente (um 0): ② $$F_{G_S} \cdot \bar{x} = F_{G_1} \cdot \tilde{x}_1 + F_{G_2} \cdot \tilde{x}_2$$

Schwerpunkt
Position in x:

②: $$\bar{x} = \frac{F_{G_1} \cdot \tilde{x}_1 + F_{G_2} \cdot \tilde{x}_2}{F_{G_S}}$$

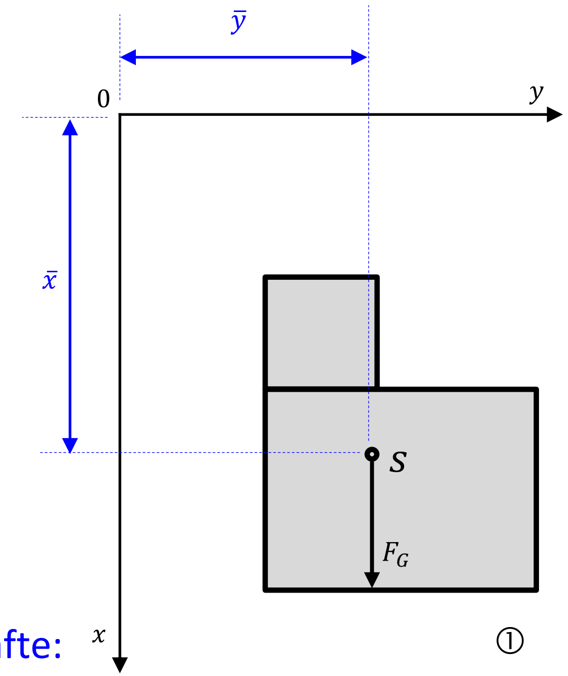
①: $$\bar{x} = \frac{F_{G_1} \cdot \tilde{x}_1 + F_{G_2} \cdot \tilde{x}_2}{F_{G_1} + F_{G_2}}$$

Schwerpunkt für n Punkte

$$\boxed{\bar{x} = \frac{F_{G_1} \cdot \tilde{x}_1 + F_{G_2} \cdot \tilde{x}_2 + \cdots + F_{G_i} \cdot \tilde{x}_i + \cdots + F_{G_n} \cdot \tilde{x}_n}{F_{G_1} + F_{G_2} + \cdots + F_{G_i} + \cdots + F_{G_n}} = \frac{\Sigma(F_G \cdot \tilde{x})}{\Sigma F_G}}$$

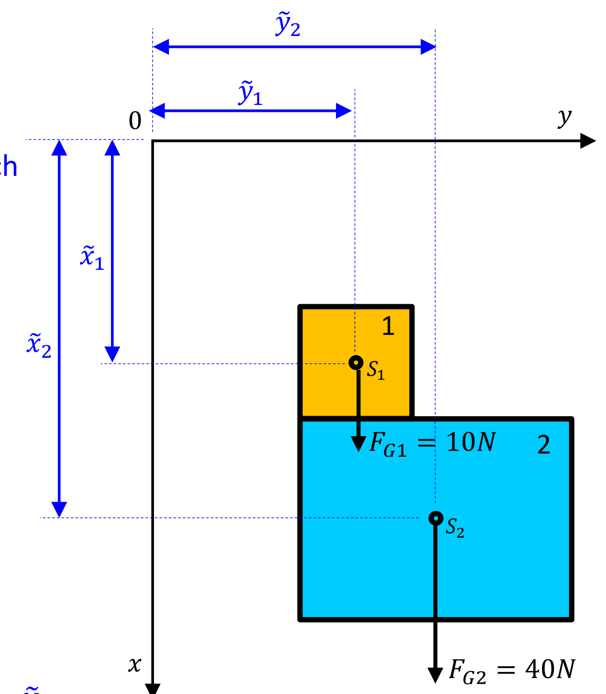
Schwerpunkt

Gleichungen zur Bestimmung des Schwerpunktes $s\ (\bar{x}, \bar{y})$ drücken aus, dass die Momentensummen aller Teile des Systems und das Moment der durch s wirkenden resultierenden Kraft des Systems gleich sind.



- Gesamtkräfte Gleich
- Gesamtmomente Gleich

$$=$$
$(Mechanisch)$



1. Kräfte: ① $$F_G = F_{G1} + F_{G2}$$

2. Momente (um 0): ② $$F_G \cdot \bar{y} = F_{G1} \cdot \tilde{y}_1 + F_{G2} \cdot \tilde{y}_2$$

Schwerpunkt Position in x:

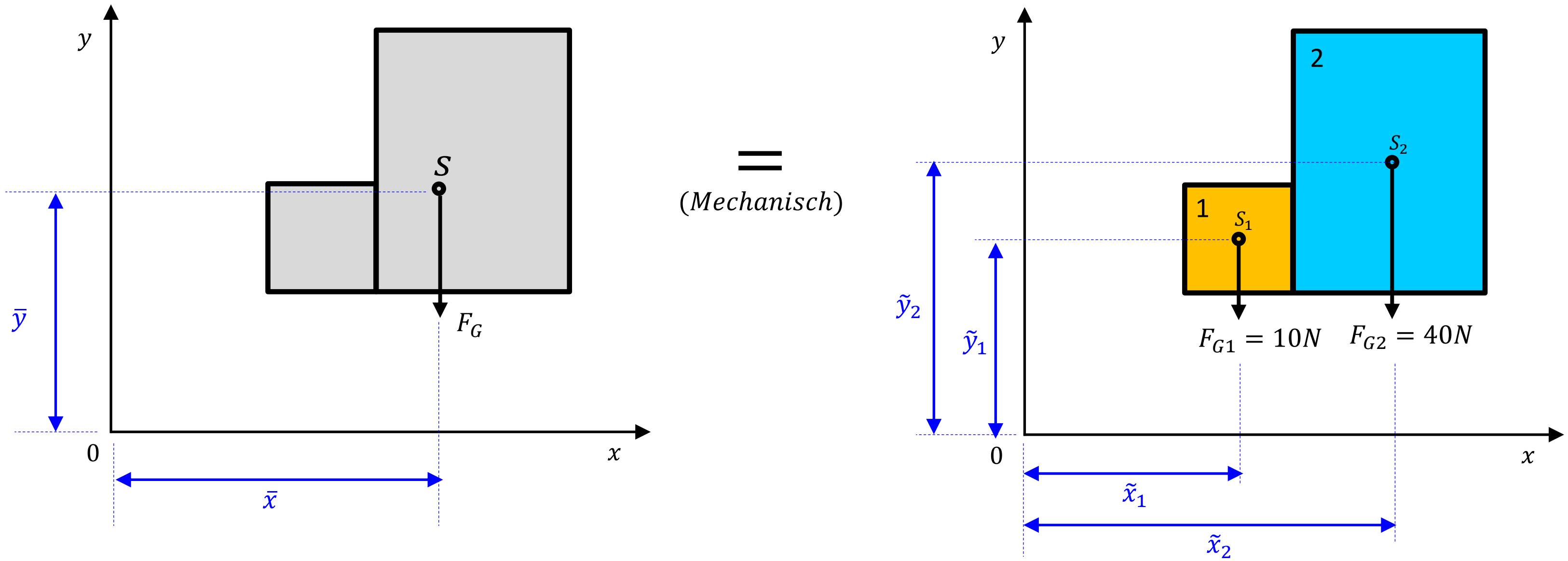
②: $$\bar{y} = \frac{F_{G1} \cdot \tilde{y}_1 + F_{G2} \cdot \tilde{y}_2}{F_{GS}}$$

①: $$\bar{y} = \frac{F_{G1} \cdot \tilde{y}_1 + F_{G2} \cdot \tilde{y}_2}{F_{G1} + F_{G2}}$$

Schwerpunkt für n Punkte

$$\boxed{\bar{y} = \frac{F_{G_1} \cdot \tilde{y}_1 + F_{G_2} \cdot \tilde{y}_2 + \cdots + F_{G_i} \cdot \tilde{y}_i + \cdots + F_{G_n} \cdot \tilde{y}_n}{F_{G_1} + F_{G_2} + \cdots + F_{G_i} + \cdots + F_{G_n}} = \frac{\Sigma F_G \cdot \tilde{y}}{\Sigma F_G}}$$

Schwerpunkt



Schwerpunkt für n Punkte

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi} \cdot \tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi}}} \qquad \boxed{\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi} \cdot \tilde{y}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi}}}$$

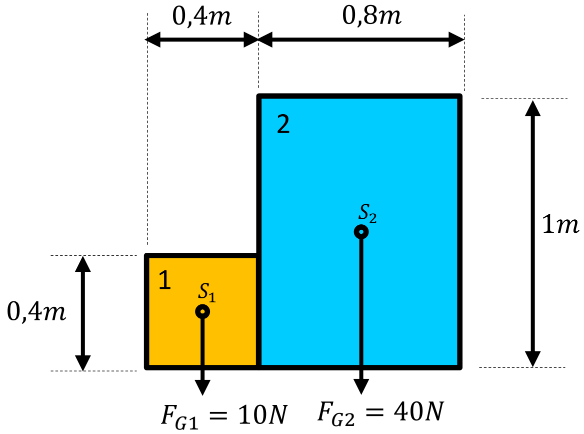
$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi} \cdot \tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot \tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} V_i \cdot \tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} V_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} A_i \cdot \tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} A_i}}$$

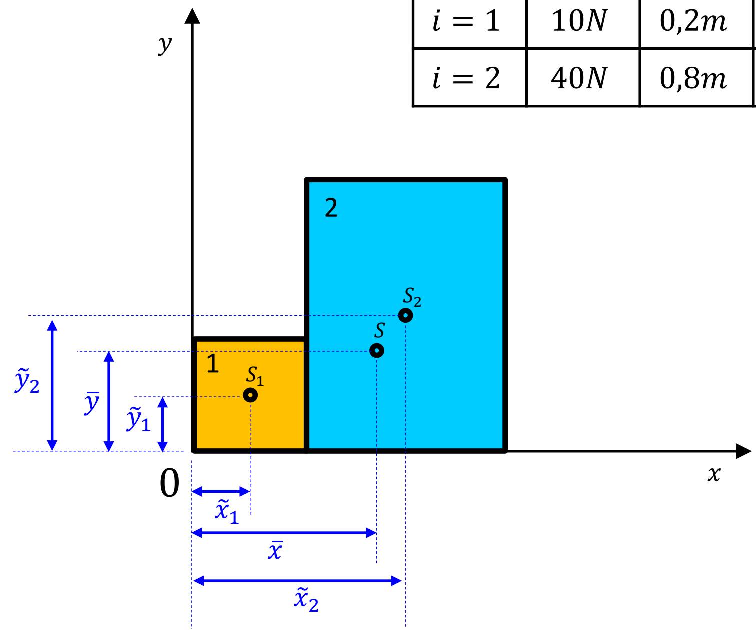
F_G: *Gewichtskraft* $\quad$ m: *Masse* $\quad$ V: *Volumen* $\quad$ A: *Fläche*

$m \propto F_G \qquad V \propto F_G \qquad A \propto F_G$

$\boxed{\propto = \text{Proportional}}$

Schwerpunkt





	$F_{G\,i}$	$\tilde{x}_i$	$\tilde{y}_i$
$i=1$	$10N$	$0{,}2m$	$0{,}2m$
$i=2$	$40N$	$0{,}8m$	$0{,}5m$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi}\cdot\tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi}} = \frac{F_{G_1}\cdot\tilde{x}_1 + F_{G_2}\cdot\tilde{x}_2}{F_{G_1}+F_{G_2}} = \frac{10N\cdot 0{,}2m + 40N\cdot 0{,}8m}{10N+40N} = 0{,}68m$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi}\cdot\tilde{y}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi}} = \frac{F_{G_1}\cdot\tilde{y}_1 + F_{G_2}\cdot\tilde{y}_2}{F_{G_1}+F_{G_2}} = \frac{10N\cdot 0{,}2m + 40N\cdot 0{,}5m}{10N+40N} = 0{,}44m$$

Lösungswege: Zusammengesetzte Körper

1. Teilen Sie in einer Skizze das Gesamtsystem in eine endliche Anzahl von Bestandteilen mit einfacherer geometrischer Form.
2. Hat ein Teil ein Loch oder hat ein geometrischer Bereich kein Material, betrachten Sie den Bestandteil ohne Loch und das Loch als zusätzliches Teil mit negativem Gewicht
3. Tragen Sie Koordinatenachsen in die Skizze ein und ermitteln Sie die Koordinaten $\tilde{x}, \tilde{y}$ des Schwerpunktes jedes Teils
4. Ermitteln Sie $\bar{x}, \bar{y}$ durch Anwendung der Gleichung für den Schwerpunkt

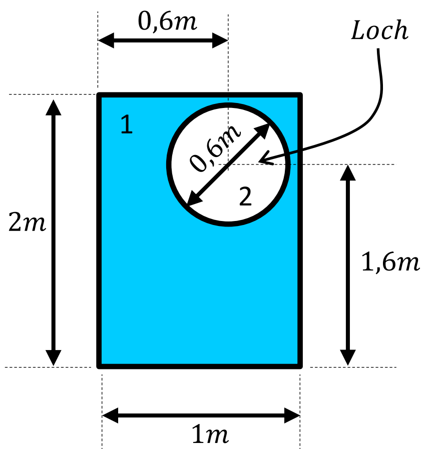
$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi} \cdot \tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi}}} \qquad \boxed{\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi} \cdot \tilde{y}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi}}}$$

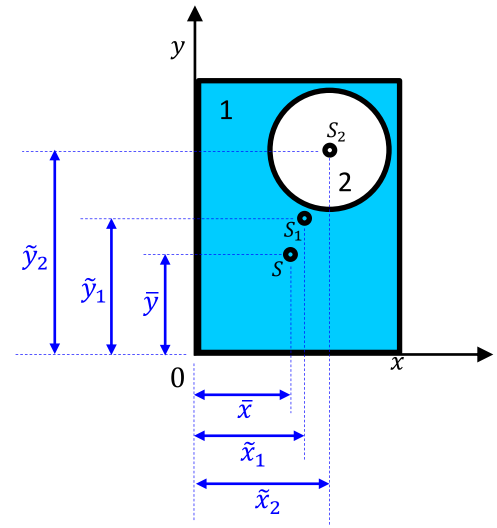
Aufgabe: Schwerpunkt finden

(Fläche ∝ Gewichtskraft)

(Fläche(Kreis)=A=$\pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$)

	A_i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{y}_i$
$i = 1$	$2m^2$	$0{,}5m$	$1m$
$i = 2$	$-0{,}283m^2$	$0{,}6m$	$1{,}6m$





$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} A_i \cdot \tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} A_i} = \frac{A_1 \cdot \tilde{x}_1 + A_2 \cdot \tilde{x}_2}{A_1 + A_2} = \frac{2m^2 \cdot 0{,}5m + (-0{,}283m^2) \cdot 0{,}6m}{2m^2 + (-0{,}283m^2)} = 0{,}484m$$

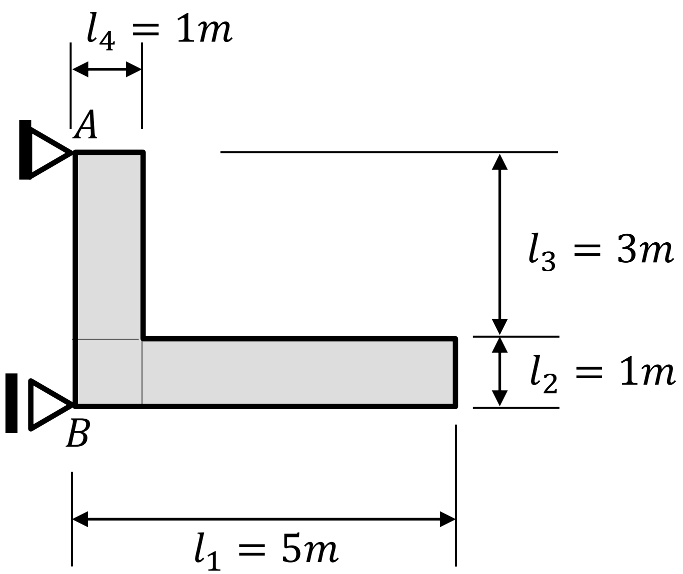
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} A_i \cdot \tilde{y}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} A_i} = \frac{A_1 \cdot \tilde{y}_1 + A_2 \cdot \tilde{y}_2}{A_1 + A_2} = \frac{2m^2 \cdot 1m + (-0{,}283m^2) \cdot 1{,}6m}{2m^2 + (-0{,}283m^2)} = 0{,}901m$$

Aufgaben

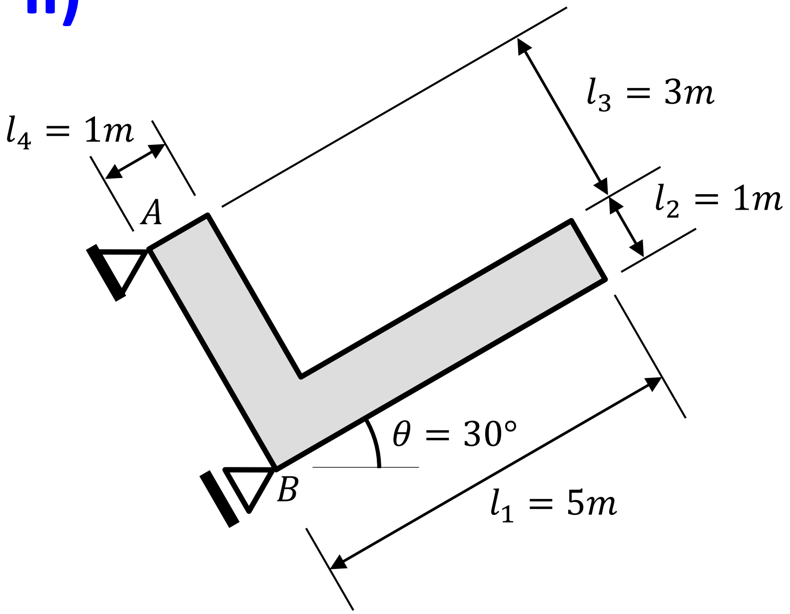
Gesucht sind die Reaktionskräfte bei A & B
Materialgewicht: 100N/m²

Tip: Finden Sie zuerst die Schwerpunkt

i)

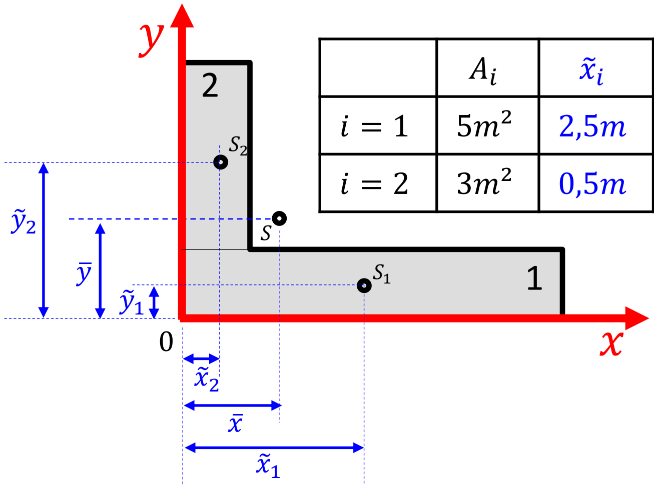


ii)

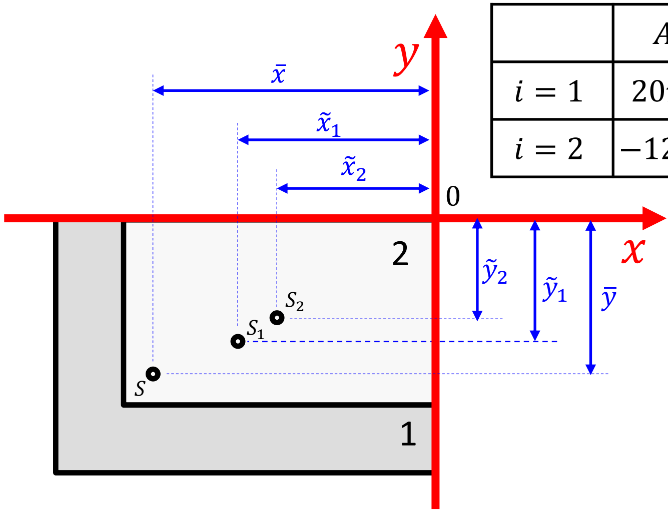


Schwerpunkt: 2 Lösungswege

Gesucht sind die Reaktionskräfte bei A & B
Materialgewicht: 100N/m²



	A_i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{y}_i$
$i=1$	$5m^2$	$2{,}5m$	$0{,}5m$
$i=2$	$3m^2$	$0{,}5m$	$2{,}5m$



	A_i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{y}_i$
$i=1$	$20m^2$	$-2{,}5m$	$-2m$
$i=2$	$-12m^2$	$-2m$	$-1{,}5m$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{i=n}A_i\cdot\tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{i=n}A_i}=\frac{A_1\cdot\tilde{x}_1+A_2\cdot\tilde{x}_2}{A_1+A_2}$$

$$\Rightarrow\bar{x}=\frac{5m^2\cdot 2{,}5m+(3m^2)\cdot 0{,}5m}{5m^2+(3m^2)}=1{,}75m$$

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{i=n}A_i\cdot\tilde{y}_i}{\sum_{i=1}^{i=n}A_i}=\frac{A_1\cdot\tilde{y}_1+A_2\cdot\tilde{y}_2}{A_1+A_2}$$

$$\Rightarrow\bar{y}=\frac{5m^2\cdot 0{,}5m+(3m^2)\cdot 2{,}5m}{5m^2+(3m^2)}=1{,}25m$$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{i=n}A_i\cdot\tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{i=n}A_i}=\frac{A_1\cdot\tilde{x}_1+A_2\cdot\tilde{x}_2}{A_1+A_2}$$

$$\Rightarrow\bar{x}=\frac{20m^2\cdot(-2{,}5m)+(-12m^2)\cdot(-2m)}{20m^2+(-12m^2)}=-3{,}25m$$

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{i=n}A_i\cdot\tilde{y}_i}{\sum_{i=1}^{i=n}A_i}=\frac{A_1\cdot\tilde{y}_1+A_2\cdot\tilde{y}_2}{A_1+A_2}$$

$$\Rightarrow\bar{y}=\frac{20m^2\cdot(-2m)+(-12m^2)\cdot(-1{,}5m)}{20m^2+(-12m^2)}=-2{,}75m$$

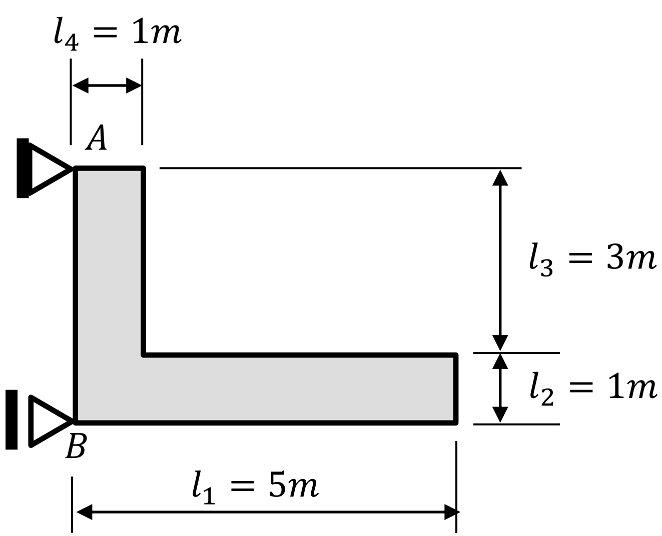
Aufgabe i) Statik

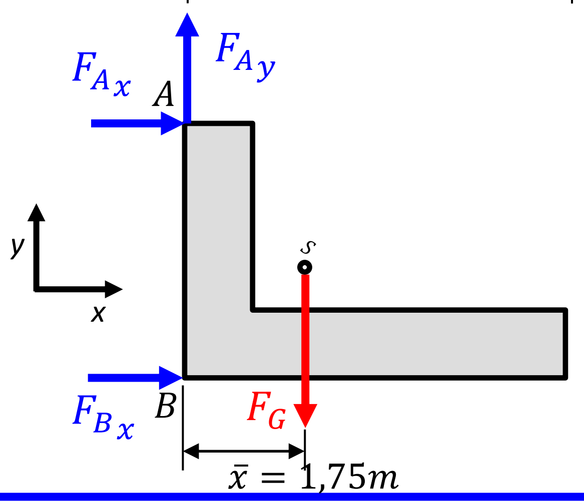
Gesucht: die Reaktionskräfte bei A & B

Materialgewicht: 100N/m²

$F_G = 100N/m^2 \cdot A = 100N/m^2 \cdot (A_1 + A_2)$

$\Rightarrow F_G = 100N/m^2 \cdot (5m^2 + 3m^2) = 800\text{N}$





Statik: Gleichungen Newton II

$\Sigma\text{F} = \text{m} \cdot a = 0$ (translation)

$\Sigma\text{M} = J \cdot \alpha = 0$ (rotation)

in 2D

① $\Sigma F_x = 0$ (translation)

② $\Sigma F_y = 0$ (translation)

③ $\Sigma\text{M} = 0$ (rotation gegen-uhrzeigersinn positiv)

Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Bx}

i) Freikörperbild (gegeben!)

ii) 3 Gleichungen (2D Statik)

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_{A_x} + F_{B_x} = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{A_y} - F_G = 0$

③ $\Sigma M_B = 0$ (Drehachse um B)

$\Rightarrow -F_{A_x} \cdot (l_2 + l_3) - F_G \cdot \bar{x} = 0$

iii) Gleichungen lösen

(für 3 unbekannten F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Bx})

③ lösen für F_{A_x}:

$F_{A_x} = -F_G \cdot \bar{x}/(l_2 + l_3)$

$\Rightarrow F_{A_x} = -800N \cdot 1{,}75m/(1m + 3m)$

$\Rightarrow F_{A_x} = -350N$

② lösen für F_{Ay}:

$F_{A_y} = F_G$

$\Rightarrow F_{Ay} = 800N$

①lösen fürF_{Bx}:

$F_{B_x} = -F_{A_x}$

$\Rightarrow F_{B_x} = -(-350N) \ = 350N$

Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

Gesamtkraft bei A: $F_A = \sqrt{{F_{A_x}}^2 + {F_{A_x}}^2} = \sqrt{(-350N)^2 + (800N)^2} = 873N$

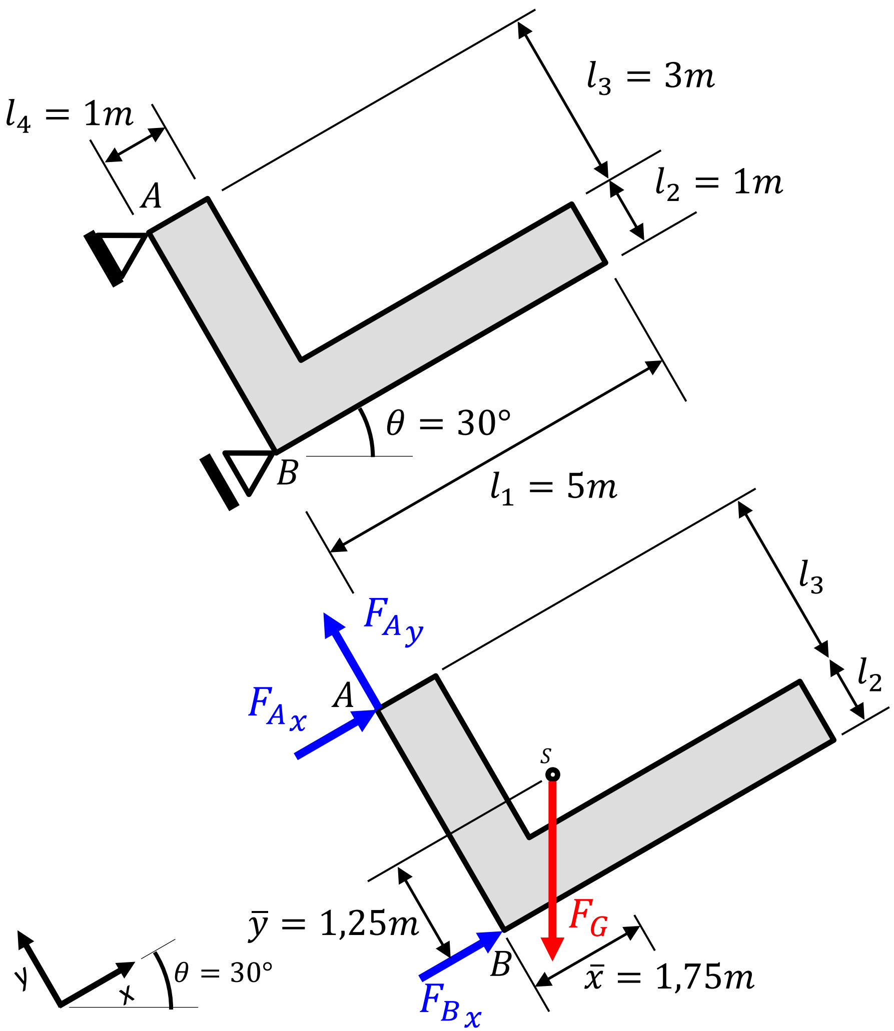
Aufgabe ii) Statik

Gesucht: die Reaktionskräfte bei A & B

Materialgewicht: 100N/m²

$F_G = 100N/m^2 \cdot A = 100N/m^2 \cdot (A_1 + A_2)$

$\Rightarrow F_G = 100N/m^2 \cdot (5m^2 + 3m^2) = 800\mathrm{N}$



Statik: Gleichungen Newton II

$\Sigma F = m \cdot a = 0$ (translation)

$\Sigma M = J \cdot \alpha = 0$ (rotation)

in 2D

① $\Sigma F_x = 0$ (translation)

② $\Sigma F_y = 0$ (translation)

③ $\Sigma M = 0$ (rotation gegen-uhrzeigersinn positiv)

Gesucht: F_{Px}, F_{Py}, l_2

i) Freikörperbild (gegeben!)

ii) 3 Gleichungen (2D Statik)

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_{A_x} + F_{B_x} - F_G \cdot sin(\theta) = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{A_y} - F_G \cdot cos(\theta) = 0$

③ $\Sigma M_B = 0$ (Drehachse um B)

$\Rightarrow -F_{A_x} \cdot (l_2 + l_3) + F_G \cdot sin(\theta) \cdot \bar{y} - F_G \cdot cos(\theta) \cdot \bar{x} = 0$

iii) Gleichungen lösen

(für 3 unbekannten F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Bx})

③ lösen für F_{A_x}:

$F_{A_x} = (F_G \cdot sin(\theta) \cdot \bar{y} - F_G \cdot cos(\theta) \cdot \bar{x})/(l_2 + l_3)$

$\Rightarrow F_{A_x} = (800N \cdot sin(30°) \cdot (-1{,}25m) - 800N \cdot cos(30°) \cdot 1{,}75m)/(1m + 3m)$

$\Rightarrow F_{A_x} = -200N$

② lösen für F_{Ay}:

$F_{A_y} = F_G \cdot cos(\theta)$

$\Rightarrow F_{Ay} = 800N \cdot cos(30°) = 693N$

① lösen für F_{Bx}:

$F_{B_x} = F_G \cdot sin(\theta) - F_{A_x}$

$\Rightarrow F_{B_x} = 800N \cdot sin(30°) - (-200N) = 600N$

Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

Gesamtkraft bei A: $F_A = \sqrt{{F_{A_x}}^2 + {F_{A_y}}^2} = \sqrt{(-200N)^2 + (693N)^2} = 721N$

Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler p173-175)

N. Bishop
HAW Hamburg

10. LINIE- UND FLÄCHENLAST (STRECKENLAST)

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

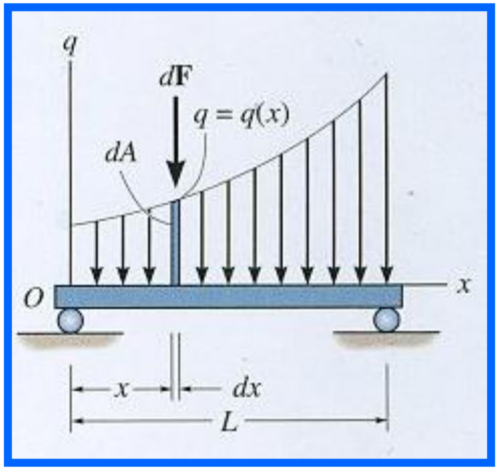
Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton’schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

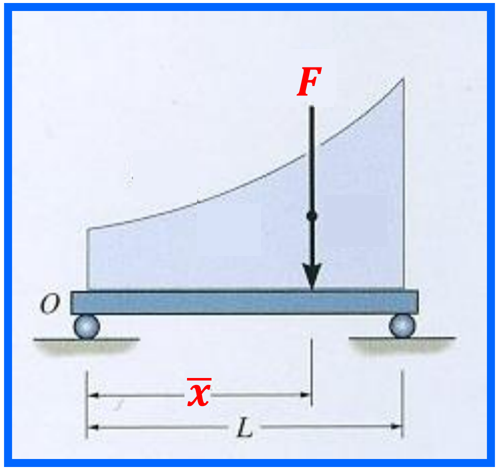
12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke’sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

Verteilte Last $q(x)$ $[N/m]$: Equivalente Kraft F $[N]$ wirkt bei Position $\bar{x}$ $[m]$



- Gesamtkräfte Gleich
- Gesamtmomente Gleich

$=$ (Mechanisch)



Moment M_0 = Summe Momente dM_0 für jeden Schritt dx

$$M_O = \int_0^L dM_O = \int_0^L x \cdot dF = \int_0^L x \cdot q \cdot dx \quad ①$$

$$dM_O = x \cdot dF \qquad dF = q \cdot dx$$

Kraft F = Summe Kräfte dF für jeden Schritt dx

$$F = \int_0^L dF = \int_0^L q \cdot dx \quad ②$$

Equivalente Kraft F wirkt mit hebel $\bar{x}$ und Gibt Moment M_0 um O

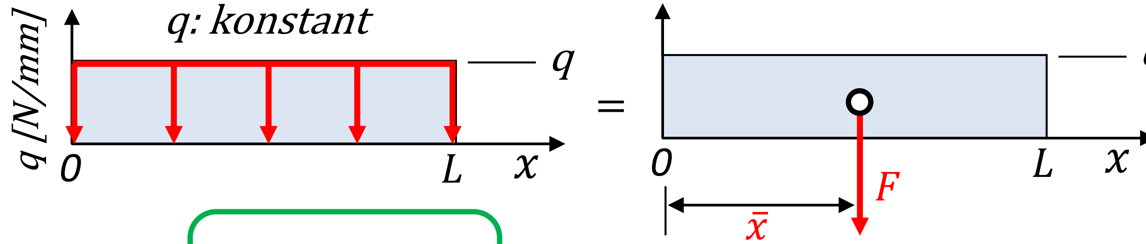
$$M_O = F \cdot \bar{x}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{M_O}{F} \quad ③$$

② $\boxed{F = \int_0^L q \cdot dx}$ **[A]**

① & ② in ③: $\underbrace{\bar{x} = \frac{M_O}{F}}_{③}$ $\Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{\overbrace{\int_0^L x \cdot q \cdot dx}^{①}}{\underbrace{\int_0^L q \cdot dx}_{②}}}$ **[B]**

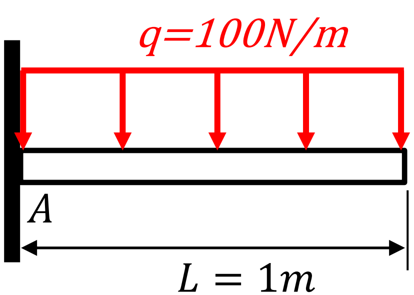
Linienlast Konstant



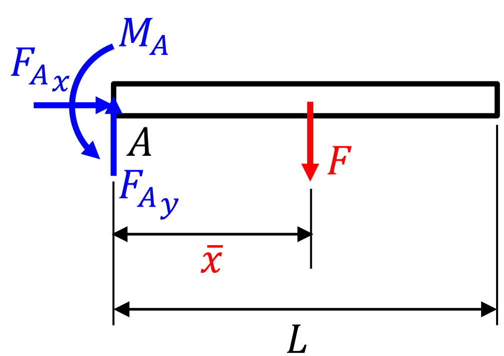
[A] $\boxed{F = \int_0^L q \cdot dx} = [q \cdot x]_0^L$ $\boxed{\Rightarrow F = q \cdot L}$

[B] $\boxed{\bar{x} = \dfrac{\int_0^L x \cdot q \cdot dx}{\int_0^L q \cdot dx}} = \dfrac{[q \cdot x^2/2]_0^L}{[q \cdot x]_0^L} = \dfrac{q \cdot L^2/2}{q \cdot L}$ $\boxed{\Rightarrow \bar{x} = L/2}$

Beispiel: Gesucht sind die Reaktionskräfte bei A



i) *Freikörperbild*



ii) *Statik* (F_{A_x}, F_{A_y}, M_A *gesucht*)

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_{A_x} = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{A_y} - F = 0$

③ $\Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow M_A - F \cdot \bar{x} = 0$

iii) *Lösung*

① $F_{A_x} = 0$

② $F_{A_y} = F = 100N$

③ $M_A = F \cdot \bar{x}$

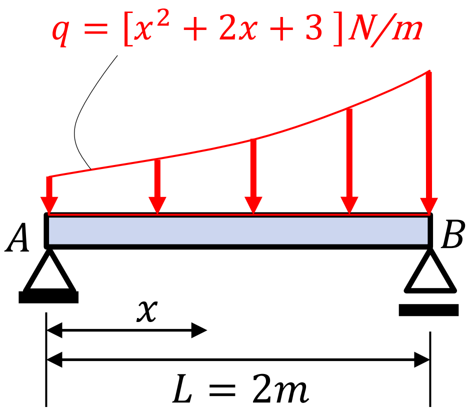
$\Rightarrow M_A = 100N \cdot 0{,}5m = 50Nm$

Linienlast Konstant

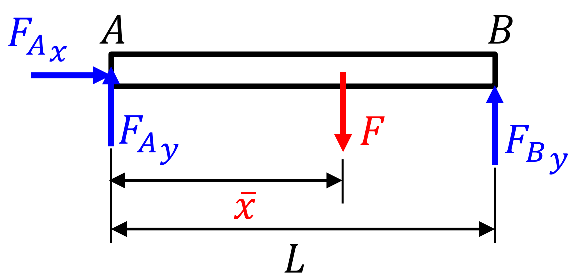
$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{F = q \cdot L} = 100N/m \cdot 1m = 100N \\ \boxed{\bar{x} = L/2} = 1m/2 = 0{,}5m \end{array} \right.$$

Linienlast q Quadratisch verteilt

Beispiel: Gesucht sind die Reaktionskräfte bei A & B



i) *Freikörperbild*



[A]

$$\boxed{F = \int_0^L q \cdot dx} = \int_0^{L=2m} \left(x^2 + 2x + 3\,\right) \cdot dx = [x^3/3 + x^2 + 3x]_{0m}^{2m}$$

$$\Rightarrow F = 12{,}7N$$

[B]

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_0^L x \cdot q \cdot dx}{\int_0^L q \cdot dx}} = \frac{\int_0^L x \cdot \left(x^2 + 2x + 3\,\right) \cdot dx}{\int_0^L (x^2 + 2x + 3\,) \cdot dx} = \frac{[x^4/4 + 2x^3/3 + 3x^2/2]_{0m}^{2m}}{[x^3/3 + x^2 + 3x]_{0m}^{2m}}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 1{,}21m$$

ii) *Statik*

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_{A_x} = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{A_y} + F_{B_y} - F = 0$

③ $\Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow -F \cdot \bar{x} + F_{B_y} \cdot L = 0$

iii) *Lösung*

① $F_{A_x} = 0$

③ $F_{B_y} = F \cdot \bar{x}/L$

$\Rightarrow F_{B_y} = 12{,}7N \cdot 1{,}21m/2m$

$\Rightarrow F_{B_y} = 7{,}68N$

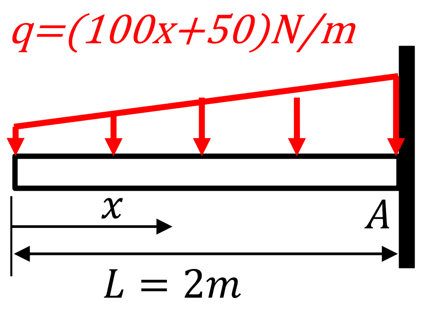
② $F_{A_y} = F - F_{B_y}$

$\Rightarrow F_{A_y} = 12{,}7N - 8{,}33N$

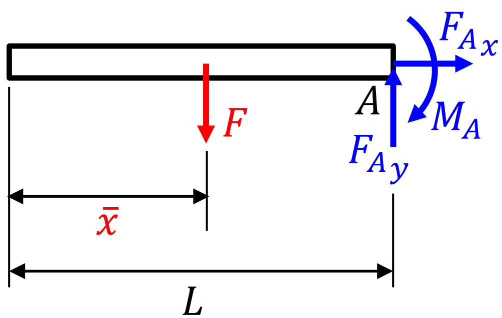
$\Rightarrow F_{A_y} = 5{,}02N$

Aufgabe: Linienlast *q* linear verteilt

Gesucht sind die Reaktionskräfte bei A



i) *Freikörperbild*



[A]

$$F = \int_0^L q \cdot dx = \int_0^{L=2m} (100x + 50\,) \cdot dx = [50x^2 + 50x]_{0m}^{2m}$$

$$\Rightarrow F = 300N$$

[B]

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \cdot q \cdot dx}{\int_0^L q \cdot dx} = \frac{\int_0^L x \cdot (100x + 50\,) \cdot dx}{\int_0^L (100x + 50) \cdot dx} = \frac{[100x^3/3 + 25x^2]_{0m}^{2m}}{[50x^2 + 50x]_{0m}^{2m}}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 1{,}22m$$

ii) *Statik*

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_{A_x} = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{A_y} - F = 0$

③ $\Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow F \cdot (L - \bar{x}) - M_A = 0$

iii) *Lösung*

① $F_{A_x} = 0$

③ $F_{A_y} = F$

$\Rightarrow F_{A_y} = 300N$

② $M_A = F \cdot (L - \bar{x})$

$\Rightarrow M_A = 300N \cdot (2m - 1{,}22m)$

$\Rightarrow M_A = 234Nm$

Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

10. SCHNITTGRÖßEN

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

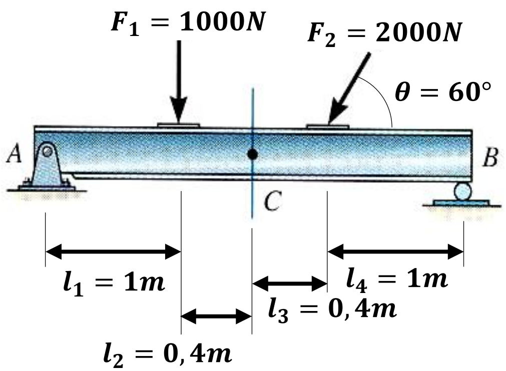
Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton'schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

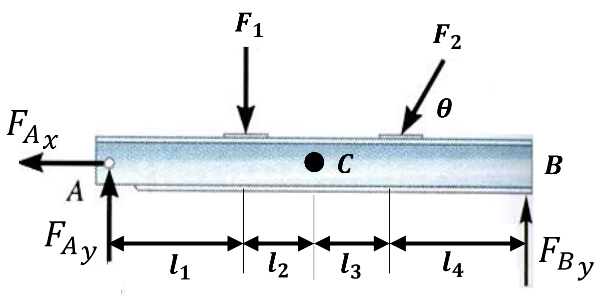
12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke'sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

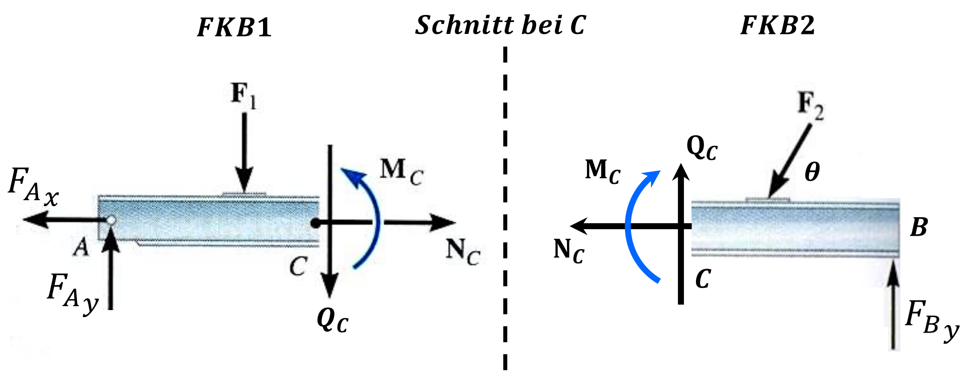
Schnittgrößen



Innerekräfte finden damit sichergestellt werden kann, dass das Material die Beanspruchung aufnehmen kann.

Als Beispiel sollen die inneren Kräfte an Punkt C bestimmt werden. Die Reaktionskräfte (bei A & B) müssen zuerst bestimmt werden.

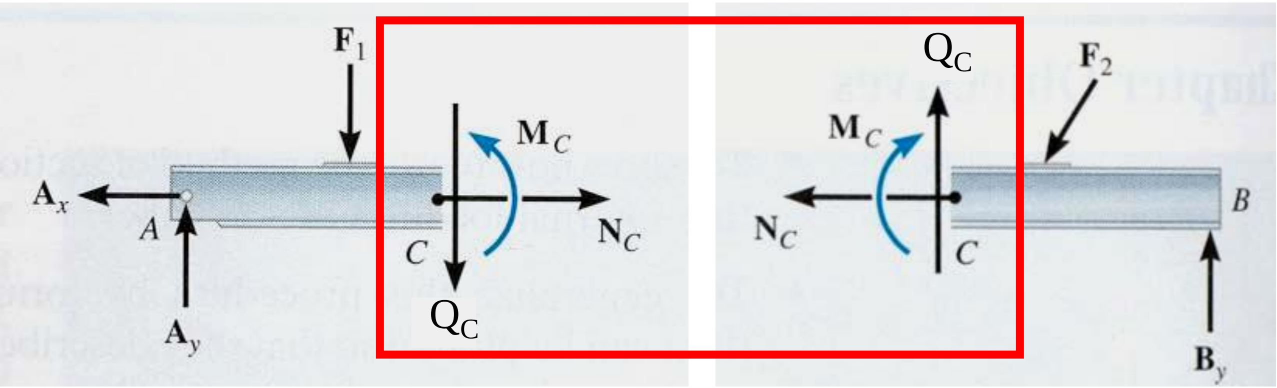




Der Balken wird durch Punkt C geschnitten. Freikörperbilder können von beiden Seiten gezeigt, inklusive der Schnittgrößen an C. Gleichgewichtsgleichungen werden verwendet um die unbekannten Variablen zu bestimmen.

Schnittgrößen

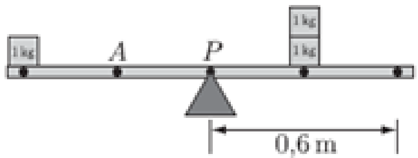
Konvention für Schnittkräfte in Balken



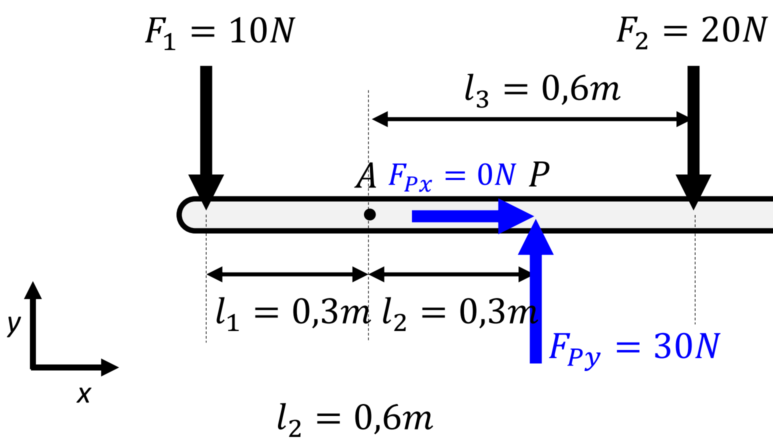
- Normalkraft (N) +Zug –Druck
- Scherkraft (Querkraft) (Q) +Scherung –Scherung
- Biegemoment (M) +Biegung nach unten –Biegung nach oben

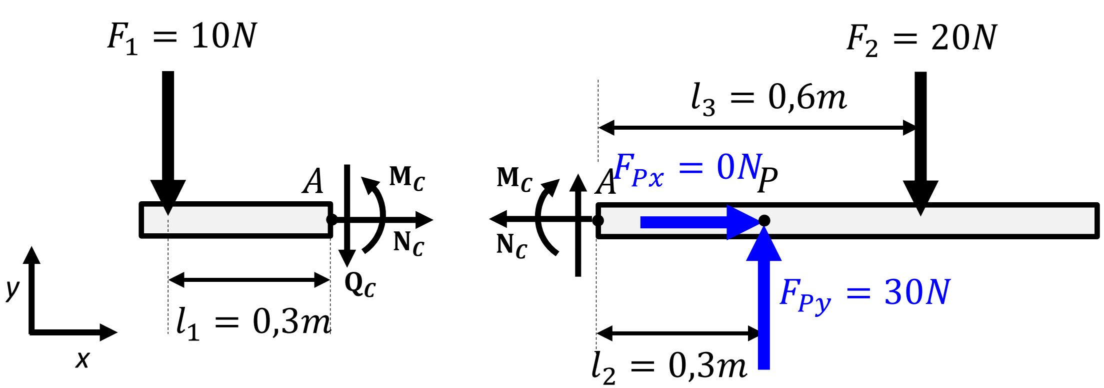
Die Kräfte an Punkt C haben auf beiden Seiten den gleichen Betrag aber wirken in Gegenrichtung (Newton III: Kräftepaare). Wenn die Teile wieder verbunden sind, ergibt die interne Kraftsumme Null (Statik!)

Beispiel : Innerekräfte (aus Kap. 7)



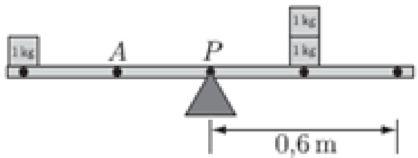
Gesucht: Innerekräfte bei A





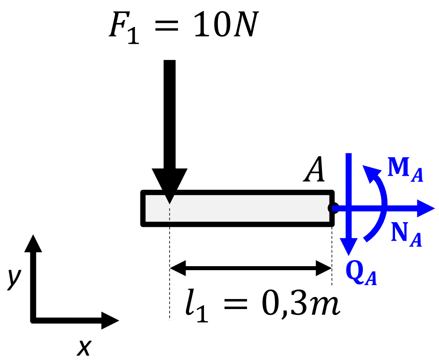
1. Entscheiden Sie wo der Körper geschnitten wird, um innere Kräfte zu bestimmen. Entscheiden Sie welcher Teil am einfachsten analysiert werden kann.
2. Bestimmen Sie die nötigen Reaktionskräfte. Zeichnen Sie dafür ein Freikörperbild von den gesamten Struktur.
3. Zeichnen Sie ein Freikörperbild desjenigen Teils des Körpers der analysiert wird. Schnittgrößen N, Q und M werden gezeigt.
4. Gleichgewichtsgleichungen werden an dem Freikörperbild angewendet und für die unbekannten inneren Kräfte gelöst.

Beispiel : Innerekräfte (aus Kap. 7)



Gesucht: Innerekräfte bei A

Linke Seite



i) Freikörperbild (gegeben!)

ii) 3 Gleichungen (2D Statik)

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow N_A = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow -F_1 - Q_A = 0$

③ $\Sigma M_A = 0$ (Drehachse um A)

$\Rightarrow M_A + F_1 \cdot l_1 = 0$

iii) Gleichungen lösen

(für 3 unbekannten N_A, Q_A, M_A)

① lösen für N_A:

$N_A = 0N$

② lösen für Q_A:

$Q_A = -F_1$

$\Rightarrow Q_A = -10N$

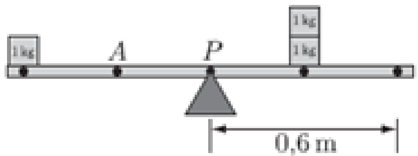
③ lösen für M_A:

$M_A = -F_1 \cdot l_1$

$\Rightarrow M_A = -10N \cdot 0,3m = -3Nm$

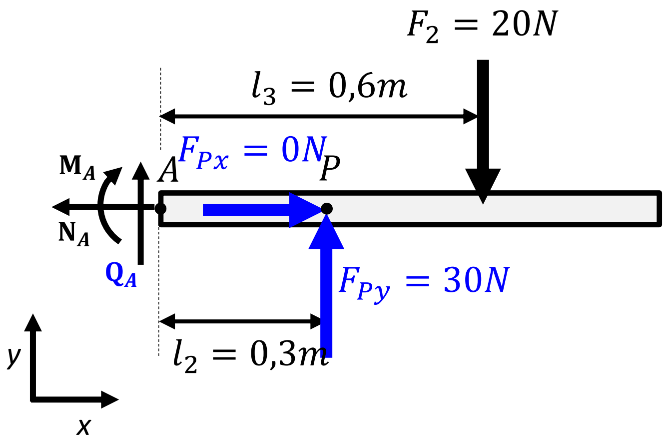
Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

Beispiel : Innerekräfte (aus Kap. 7)



Gesucht: Innerekräfte bei A

Rechte Seite



i) Freikörperbild (gegeben!)

ii) 3 Gleichungen (2D Statik)

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow -N_C + F_{Px} = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow Q_A + F_{py} - F_2 = 0$

③ $\Sigma M_A = 0$ (Drehachse um A)

$\Rightarrow -M_A + F_{py} \cdot l_2 - F_2 \cdot l_3 = 0$

iii) Gleichungen lösen

(für 3 unbekannten N_A, Q_A, M_A)

① lösen für N_A:

$N_A = 0N$

② lösen für Q_A:

$Q_A = F_2 - F_{py}$

$\Rightarrow Q_A = 20N - 30N = -10N$

③ lösen für M_A:

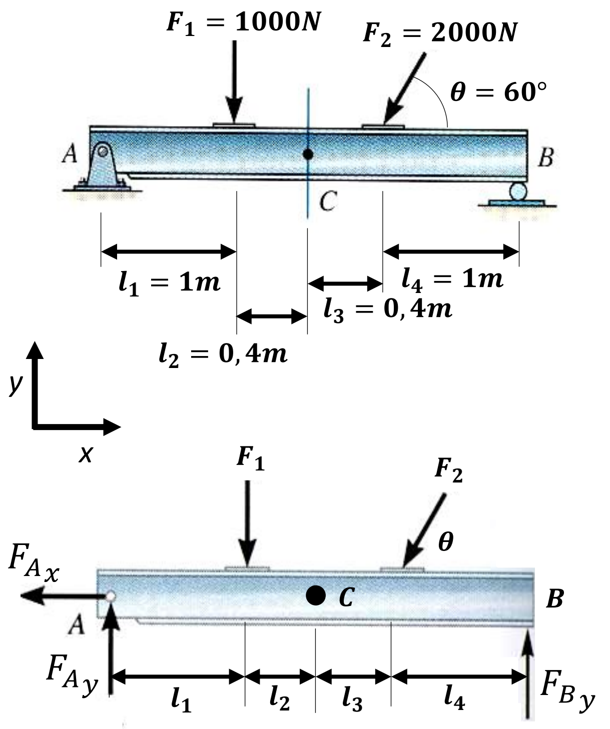
$M_A = F_{py} \cdot l_2 - F_2 \cdot l_3$

$\Rightarrow M_A = 30N \cdot 0{,}3m - 20N \cdot 0{,}3m = -3Nm$

Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

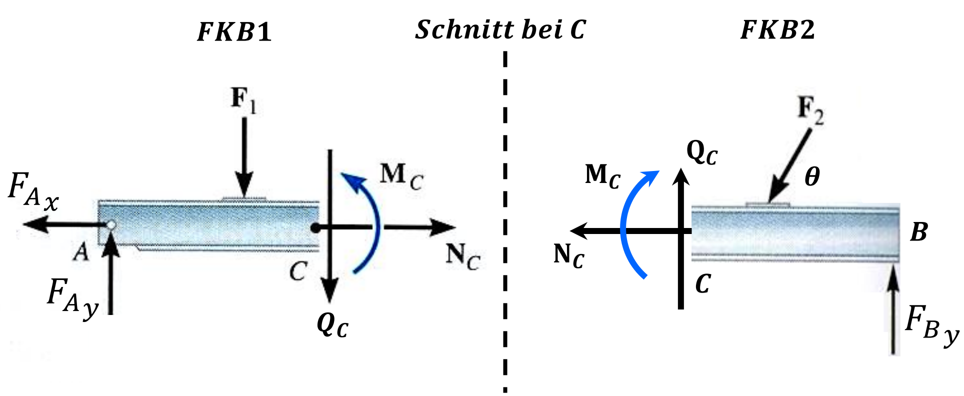
Beachten Sie, dass die Ergebnisse mit denen für die linke Seite auf der vorherigen Folie übereinstimmen!

Aufgabe



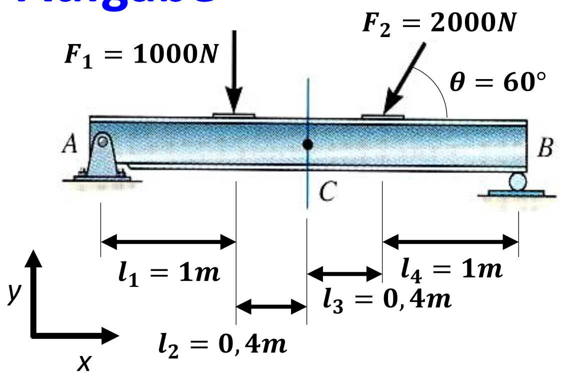
Innerekräfte damit sichergestellt werden kann, dass das Material die Beanspruchung aufnehmen kann.

Als Beispiel sollen die inneren Kräfte an Punkt C bestimmt werden. Die Reaktionskräfte (bei A & B) müssen zuerst bestimmt werden.

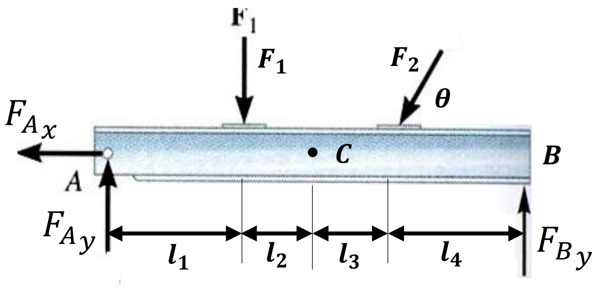


Der Balken wird durch Punkt C geschnitten. Freikörperbilder können von beiden Seiten gezeigt, inklusive der Schnittgrößen an C. Gleichgewichtsgleichungen werden verwendet um die unbekannten Variablen zu bestimmen.

Aufgabe

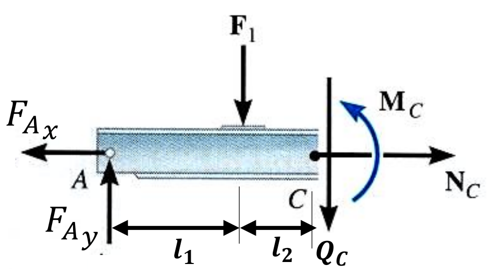


i) <u>Freikörperbild (Externekräfte)</u>



i) <u>Freikörperbild (Innerekräfte)</u>

FKB1



1. Externekräfte finden

ii) <u>3 Gleichungen (2D Statik)</u>

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow -F_{Ax} - F_2 \cdot \cos(\boldsymbol{\theta}) = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{Ay} - F_1 - F_2 \cdot \sin(\boldsymbol{\theta}) + F_{By} = 0$

③ $\Sigma M_A = 0$ (Drehachse um A)

$\Rightarrow -F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot \sin(\boldsymbol{\theta}) \cdot (l_1 + l_2 + l_3) + F_{By} \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) = 0$

iii) <u>Gleichungen lösen</u>

(für 3 unbekannten N_A, Q_A, M_A)

① lösen für F_{Ax}:

$F_{Ax} = -F_2 \cdot \cos(\theta)$

$\Rightarrow F_{Ax} = -2000N \cdot \cos(60°) = -1000N$

③ lösen für F_{By}:

$F_{By} = (F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot \sin(\theta) \cdot (l_1 + l_2 + l_3))/(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)$

$\Rightarrow F_{By} = (1000N \cdot 1m + 2000N \cdot \sin(60°) \cdot (1m + 0{,}4m + 0{,}4m))/(1m + 0{,}4m + 0{,}4m + 1m) = 1470N$

② lösen für F_{Ay}:

$F_{Ay} = F_1 + F_2 \cdot \sin(\theta) - F_{By}$

$\Rightarrow F_{Ay} = 1000N + 2000N \cdot \sin(60°) - 1470N$

$\Rightarrow F_{Ay} = 1261N$

2. Innerekräfte finden (N,Q,M Konvention beachten)

ii) <u>3 Gleichungen (2D Statik)</u>

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow N_C - F_{Ax} = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{Ay} - F_1 - Q_C = 0$

③ $\Sigma M_C = 0$ (Drehachse um C)

$\Rightarrow -F_{Ay} \cdot (l_1 + l_2) + F_1 \cdot l_2 + M_C = 0$

iii) <u>Gleichungen lösen</u>

(für 3 unbekannten N_C, Q_C, M_C)

① lösen für N_C:

$N_C = F_{Ax}$

$\Rightarrow N_C = -1000N$ (Minus⇒Drückkraft)

② lösen für Q_C:

$Q_C = F_{Ay} - F_1$

$\Rightarrow Q_C = F_{Ay} - F_1 = 1261N - 1000N = 261N$

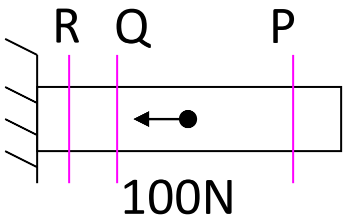
③ lösen für M_C:

$\Rightarrow M_C = F_{Ay} \cdot (l_1 + l_2) - F_1 \cdot l_2$

$\Rightarrow M_C = 1261N \cdot (1m + 0{,}4m) - 1000N \cdot 0{,}4m = 1370Nm$ (Positiv⇒Biegung nach unten)

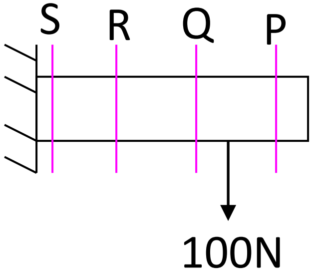
QUIZ

1. Eine Säule wird mit 100 N belastet. An welchen Schnitten sind die inneren Kräfte gleich?



A) P, Q, und R
B) P und Q
C) Q und R
D) An keinem davon.

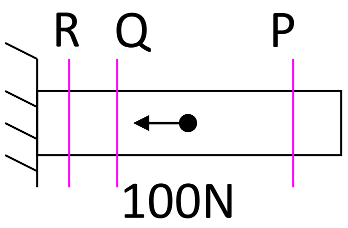
2. Eine Säule wird mit einer Scherkraft belastet. An welchem Schnitt sind die inneren Kräfte am größten?



A) P
B) Q
C) R
D) S

QUIZ

1. Eine Säule wird mit 100 N belastet. An welchen Schnitten sind die inneren Kräfte gleich?



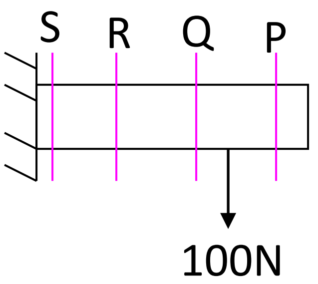
A) P, Q, und R
B) P und Q
C) Q und R
D) An keinem davon.

$N_R = N_Q = -100N; N_P = 0N$

$Q_R = Q_Q = Q_P = 0N$

$M_R = M_Q = M_P = 0N$

2. Eine Säule wird mit einer Scherkraft belastet. An welchem Schnitt sind die inneren Kräfte am größten?



A) P
B) Q
C) R
D) S

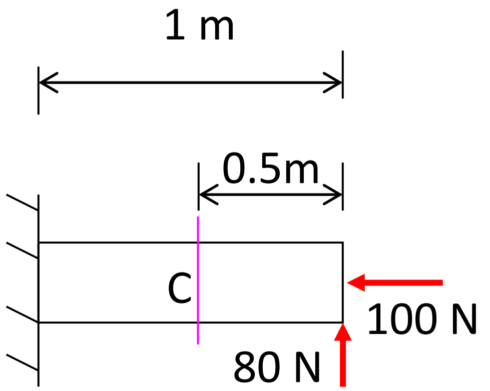
$N_S = N_R = N_Q = N_P = 0N$

$Q_S = Q_R = Q_Q = 100N; Q_P = 0N$

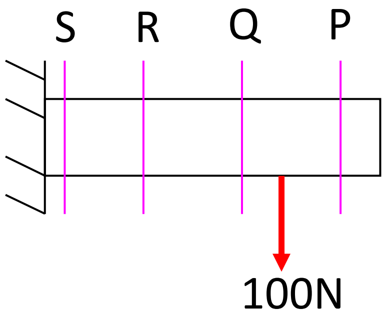
$M_S > M_R > M_Q; M_P = 0Nm$

QUIZ

1. Bestimmen Sie die inneren Kräfte (Normal, Scher, Beigung) an Punkt C
   - A) (-100 N, -80 N, 80 N·m)
   - B) (-100 N, -80 N, 40 N·m)
   - C) (80 N, 100 N, 40 N·m)
   - D) (80 N, 100 N, 0 N·m)



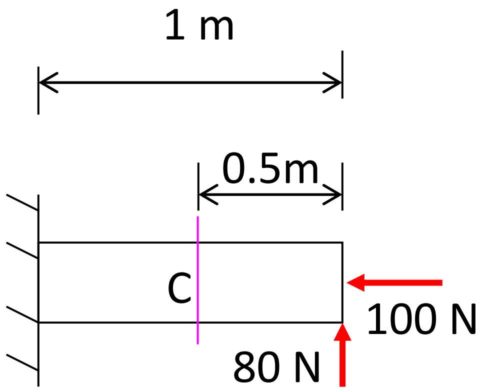
2. Eine Säule wird mit 100N belastet. An welchem Schnitt sind inneren Kräfte am kleinsten?

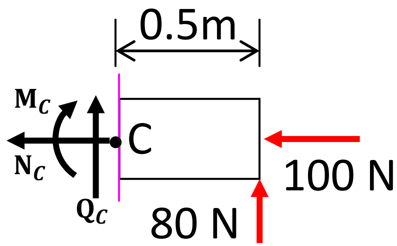


A) P
B) Q
C) R
D) S

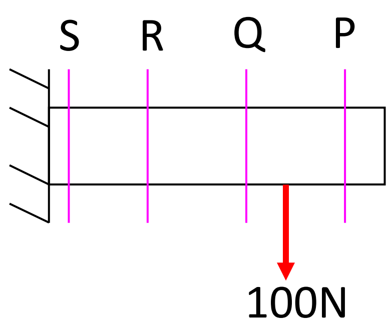
QUIZ

1. Bestimmen Sie die inneren Kräfte (Normal, Scher, Beigung) an Punkt C
   - A) (-100 N, -80 N, 80 N·m)
   - B) (-100 N, -80 N, 40 N·m)
   - C) (80 N, 100 N, 40 N·m)
   - D) (80 N, 100 N, 0 N·m)





2. Eine Säule wird mit 100N belastet. An welchem Schnitt sind inneren Kräfte am kleinsten?
   - A) P
   - B) Q
   - C) R
   - D) S



$$N_S = N_R = N_Q = N_P = 0N$$
$$Q_S = Q_R = Q_Q = 100N; Q_P = 0N$$
$$M_S > M_R > M_Q; M_P = 0Nm$$

Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

11. INNERELAST VERLAUF

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

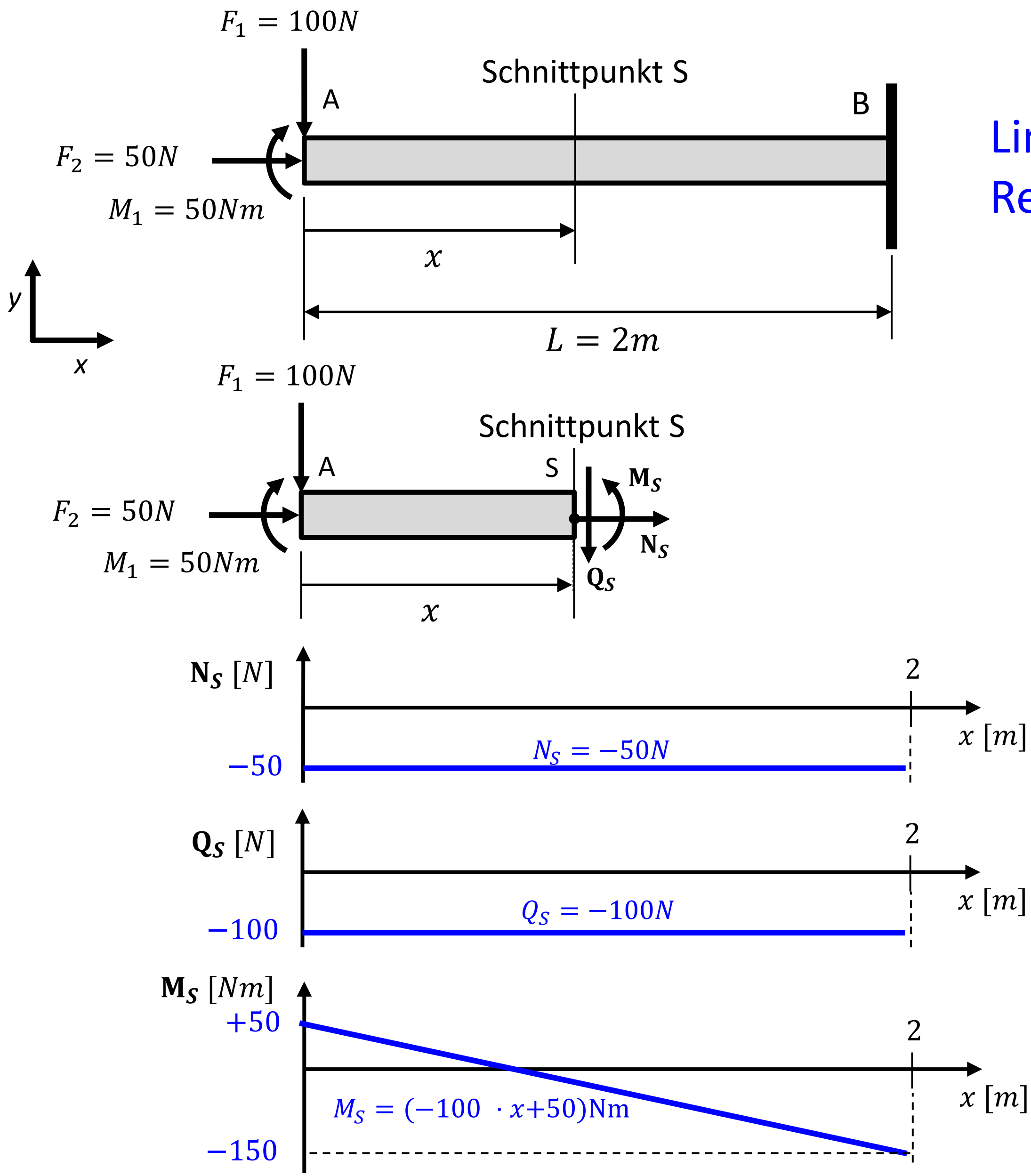
Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton’schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke’sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

Innere Kräfte bei Position x für $(0 \leq x \leq L)$



Linke Seite am einfachsten (Keine Reaktionskräfte zu finden)

Gesucht: N_S, Q_S, M_S

i) Freikörperbild (gegeben!)

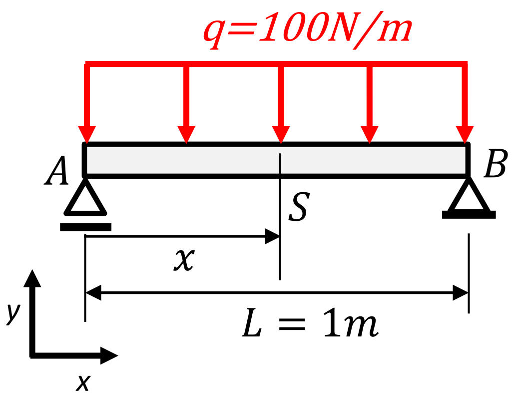
ii) 3 Gleichungen (2D Statik)

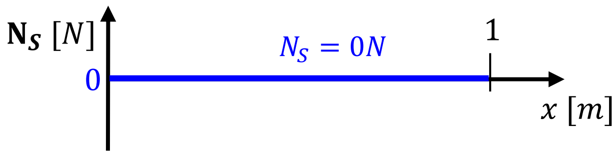
① $\Sigma F_x = 0$
$\Rightarrow F_2 + N_S = 0$
② $\Sigma F_y = 0$
$\Rightarrow -F_1 - Q_S = 0$
③ $\Sigma M_S = 0$ (Drehachse um S)
$\Rightarrow F_1 \cdot x + M_S - M_1 = 0$

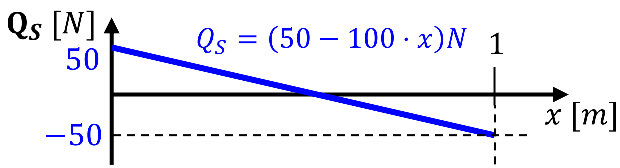
iii) Gleichungen lösen
(für 3 unbekannten N_S, Q_S, M_S)
① lösen für N_S:
$N_S = -F_2$
$\Rightarrow N_S = -50N$
② lösen für Q_S:
$Q_S = -F_1$
$\Rightarrow Q_S = -100N$
③ lösen für M_S:
$M_S = -F_1 \cdot x + M_1$
$\Rightarrow M_S = -100N \cdot x + 50Nm$
$\Rightarrow M_S = (-100 \cdot x + 50)\mathrm{Nm}$

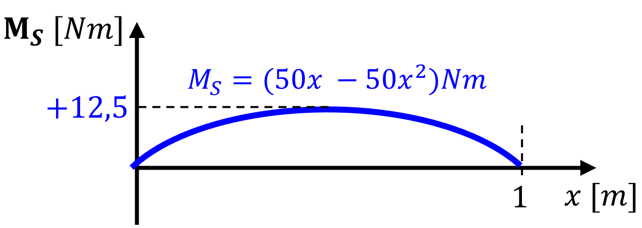
Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

Innere Kräfte bei Position x für $(0 \le x \le L)$

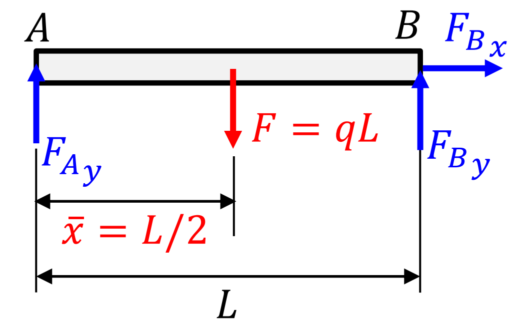








i) *Freikörperbild (Gesamt)*



ii) <u>3 Gleichungen (2D Statik)</u>

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow F_{Bx} = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{Ay} + F_{By} - F = 0$

③ $\Sigma M_B = 0$ (Drehachse um B)

$\Rightarrow -F_{Ay} \cdot L + F(L - \bar{x}) = 0$

iii) <u>Gleichungen lösen</u>

(für 3 unbekannten F_{Ay}, F_{Bx}, F_{By})

① lösen für F_{Bx}:

$F_{Bx} = 0$

③ lösen für F_{Ay}:

$F_{Ay} = F \cdot (L - \bar{x})/L$

$\Rightarrow F_{Ay} = 100N \cdot (1m - 0{,}5m)/1m = 50N$

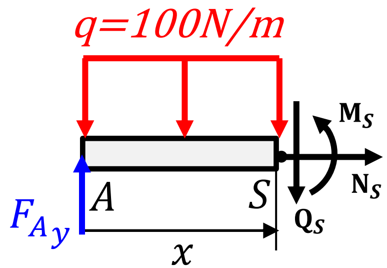
② lösen für F_{By}:

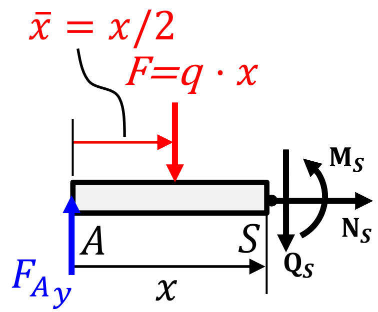
$F_{By} = F - F_{Ay}$

$\Rightarrow F_{By} = 100N - 50N = 50N$

Externe Kräfte bei A & B

i) *Freikörperbild (Links)*





ii) <u>3 Gleichungen (2D Statik)</u>

① $\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow N_S = 0$

② $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{Ay} - Q_S - F = 0$

③ $\Sigma M_S = 0$ (Drehachse um S)

$\Rightarrow -F_{Ay} \cdot x + F(x - \bar{x}) + M_S = 0$

iii) <u>Gleichungen lösen</u>

(für 3 unbekannten N_S, Q_S, M_S)

① lösen für N_S:

$N_S = 0N$

② lösen für Q_S:

$Q_S = F_{Ay} - F$

$\Rightarrow Q_S = 50N - q \cdot x = (50 - 100 \cdot x)N$

③ lösen für M_S:

$M_S = F_{Ay} \cdot x - F(x - \bar{x})$

$\Rightarrow M_S = F_{Ay} \cdot x - qx(x - x/2)$

$\Rightarrow M_S = F_{Ay} \cdot x - q \cdot x^2/2$

$\Rightarrow M_S = 50N \cdot x - 100N/m \cdot x^2/2$

$\Rightarrow M_S = (50x - 50x^2)Nm$

Externe Kräfte bei S

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton'schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke'sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

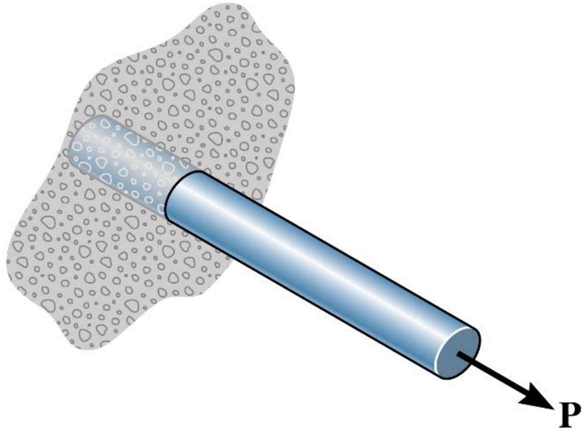
N. Bishop
HAW Hamburg

12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher

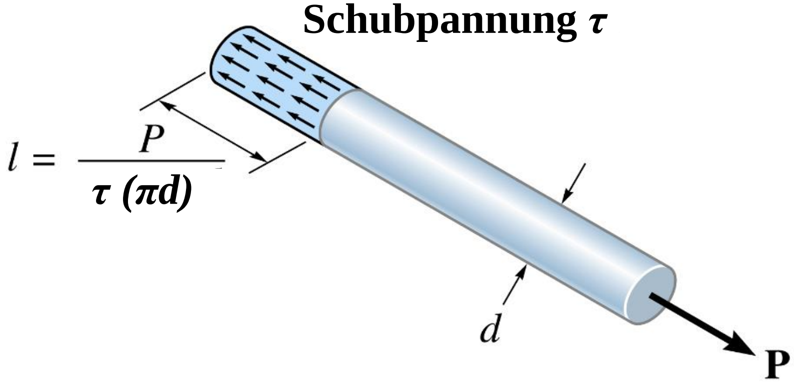
ANWENDUNGEN

$$\sigma[N/m^2] = \frac{N[N]}{A[m^2]}$$

ANWENDUNGEN



(a)



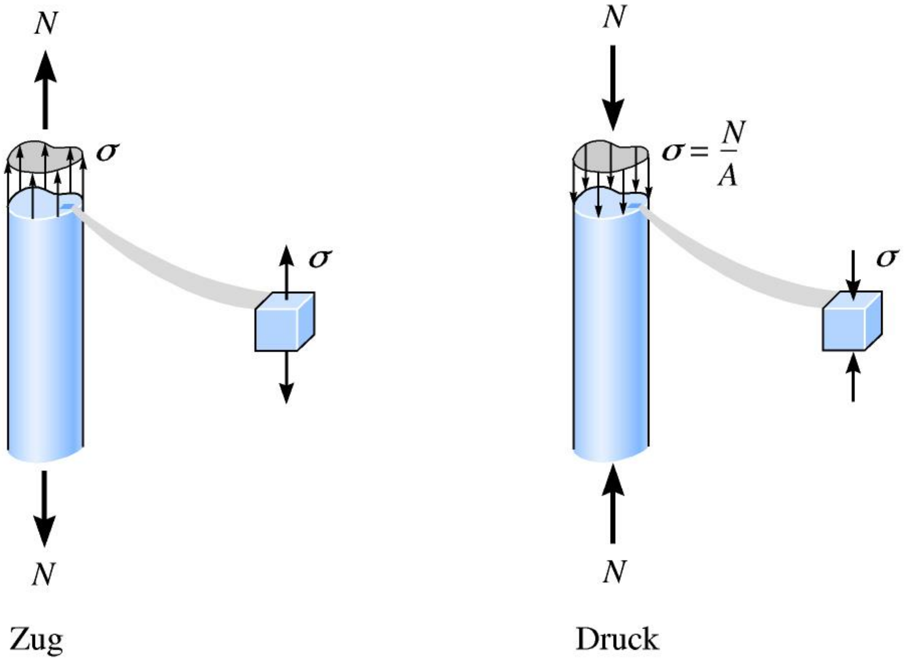
(b)

Welche Implantationstiefe $\boldsymbol{l}$ ist erforderlich, um zu verhindern, dass die Stange aus der Wand gezogen wird?

Gegeben: Schufestigkeit zwischen Stange und Beton $\boldsymbol{\tau}$ (experimentell für eine Standardoberfläche bestimmt), Durchmesser $\boldsymbol{d}$, Kraft $\boldsymbol{P}$

$$\tau[N/m^2] = \frac{Q[N]}{A[m^2]} = \frac{P[N]}{\pi \cdot d[m] \cdot l[m]}$$

MITTLERE NORMALSPANNUNG



N/m² ≡ 1 Pa (Pascal) **(N/mm² ≡ 1 MPa)**

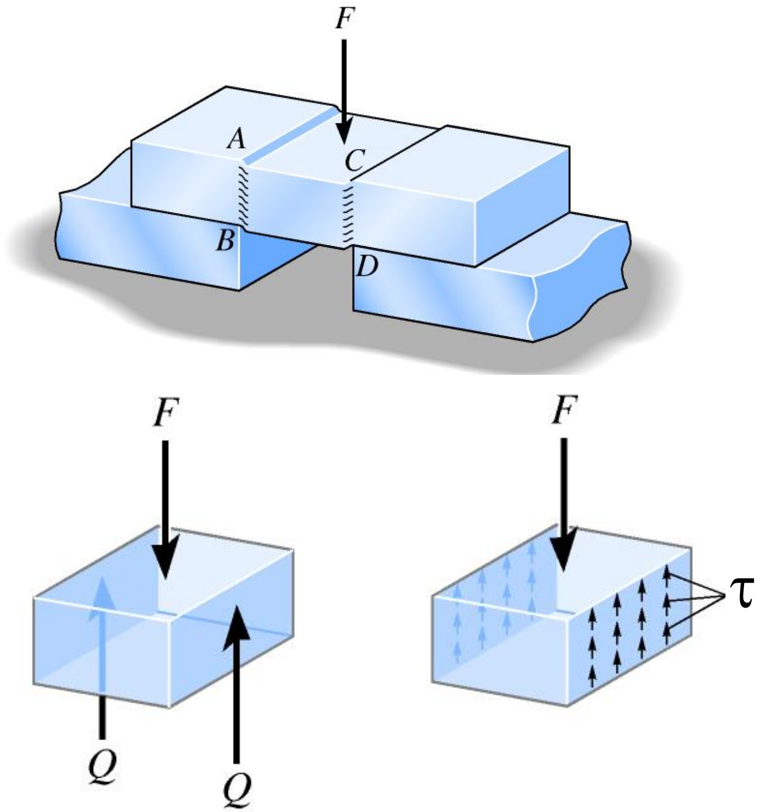
$$\sigma[Pa] = \frac{N[N]}{A[m^2]}$$

σ: Normalspannung

N: Normalkraft

A: Querfläche

MITTLERE SCHUBSPANNUNG

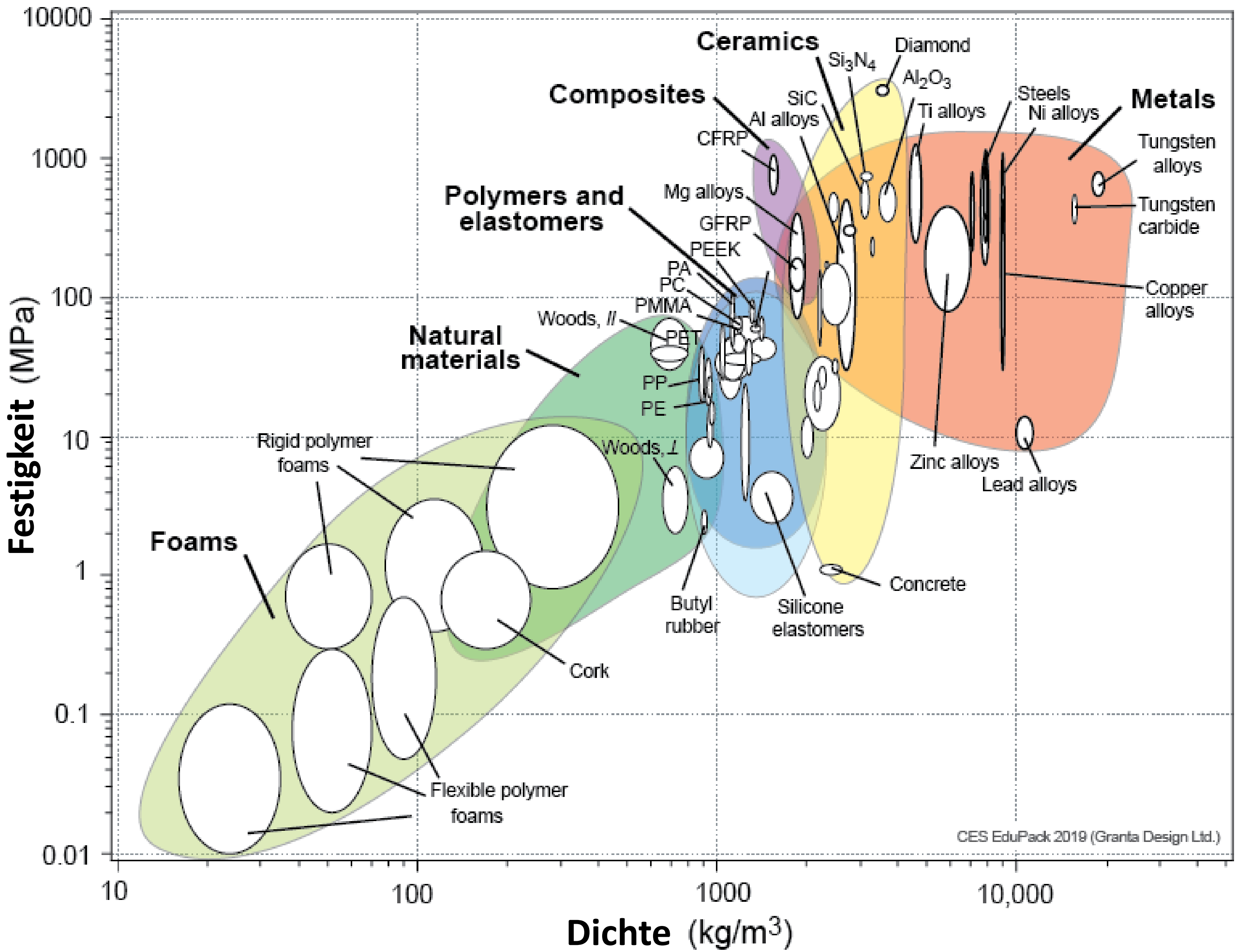


$$\tau[Pa] = \frac{Q[N]}{A[m^2]}$$

τ: Schubspannung

Q: Schubkraft

A: Querfläche

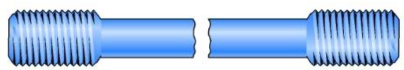


Festigkeit (MPa)
Dichte (kg/m³)
10000
1000
100
10
1
0.1
0.01
10
100
1000
10,000
Ceramics
Composites
Metals
Polymers and elastomers
Natural materials
Foams
Diamond
Si3N4
Al2O3
SiC
Al alloys
Ti alloys
Steels
Ni alloys
Tungsten alloys
Tungsten carbide
CFRP
Mg alloys
GFRP
PEEK
PA
PC
PMMA
Woods, //
PET
PP
PE
Woods, ⊥
Copper alloys
Zinc alloys
Lead alloys
Rigid polymer foams
Butyl rubber
Silicone elastomers
Concrete
Cork
Flexible polymer foams
CES EduPack 2019 (Granta Design Ltd.)

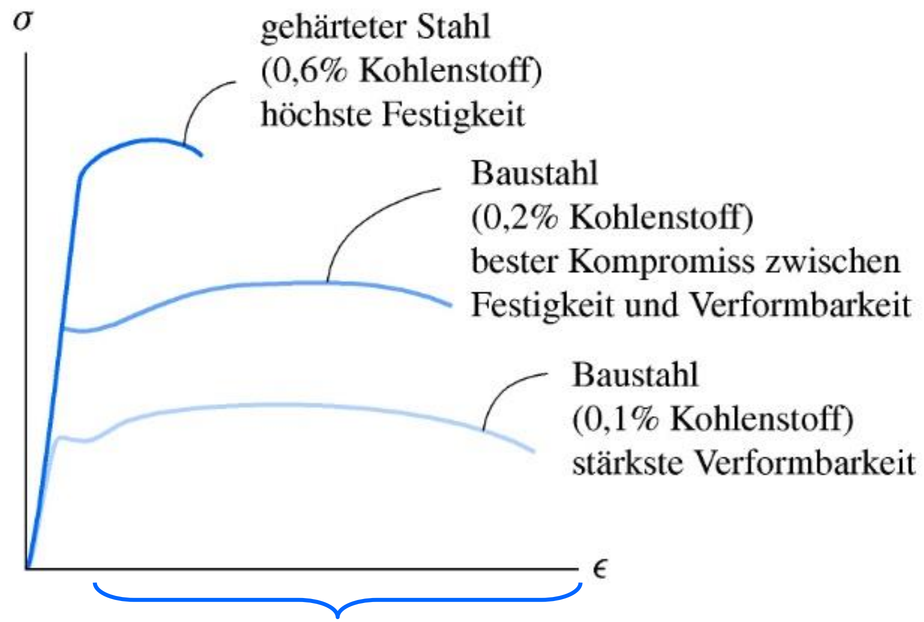
SPANNUNGS-DEHNUNGS- DIAGRAM

STAHL: Festigkeit

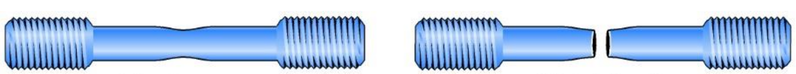
Spröde (Wenig Plastische Verformung)



Versagen eines spröden Materials
durch Zugbeanspruchung



Duktil (Plastische Verformung)



Einschnürung
(a)

Materialbruch
(b)

QUIZ

1. Wie groß ist die Normalspannung in der Stange mit N=10 kN and 500mm²?

A) 0.02 kPa (kN/m²)

B) 20 Pa (N/m²)

C) 20 kPa (kN/m²)

D) 200 N/mm² (0,2kN/mm²)

E) 20 MPa (20MN/m²)

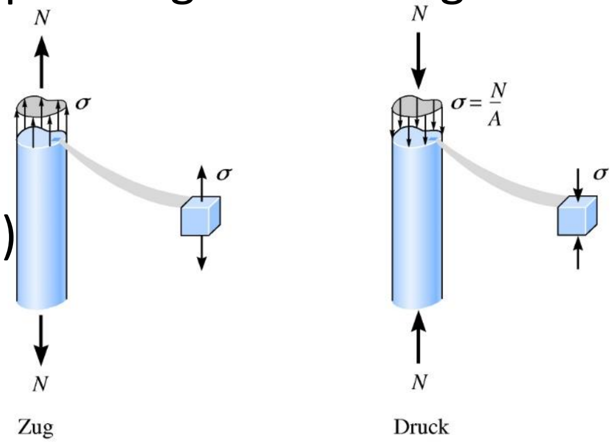


Figure 1.15

QUIZ

1. Wie groß ist die Normalspannung in der Stange mit N=10 kN and 500mm²?

A) 0.02 kPa (kN/m²)

B) 20 Pa (N/m²)

C) 20 kPa (kN/m²)

D) 200 N/mm² (0,2kN/mm²)

E) 20 MPa (20MN/m²)

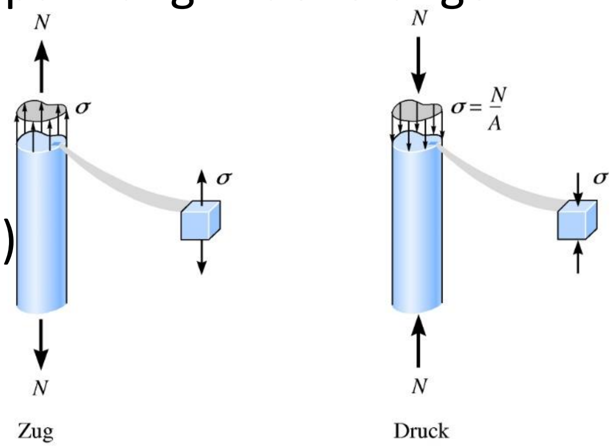
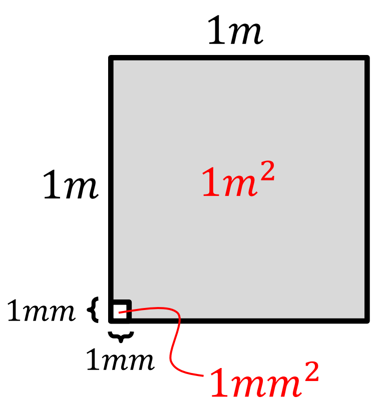


Figure 1.15

$$\sigma[N/m^2] = \frac{N[N]}{A[m^2]} = \frac{10kN}{500mm^2} = 0{,}02kN/mm^2 = 20N/mm^2 = 20MPa$$



$$A = 1m^2 = 1m \cdot 1m = 1000mm \cdot 1000mm = 10^6 mm^2$$

$$\Rightarrow 1mm^2 = 1/10^6 m^2 = 10^{-6} m^2$$

$$\Rightarrow 1N/mm^2 = 1N/10^{-6} m^2 = 10^6 N/m^2 = 1MPa$$

2. Welchen mittlere Schubspannung wirkt auf Fläche AB (oder CD), mit F=20kN, und $A_{AB}=A_{CD}=1000mm^2$?

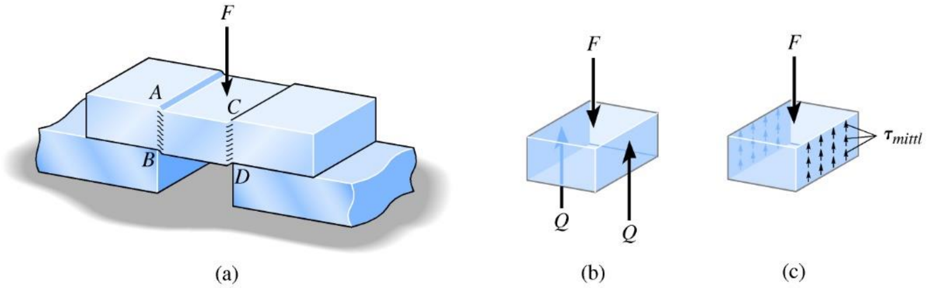
A) 20 N/mm^2

B) 10 N/mm^2

C) 10 kPa

D) 200 kN/m^2

E) 20 MPa



2. Welchen mittlere Schubspannung wirkt auf Fläche AB (oder CD), mit F=20kN, und A_{AB}=A_{CD}=1000mm²?

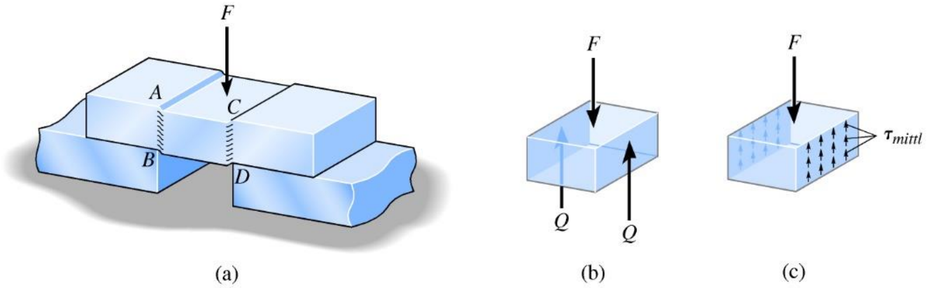
A) 20 N/mm²

B) 10 N/mm²

C) 10 kPa

D) 200 kN/m²

E) 20 MPa



Statik:

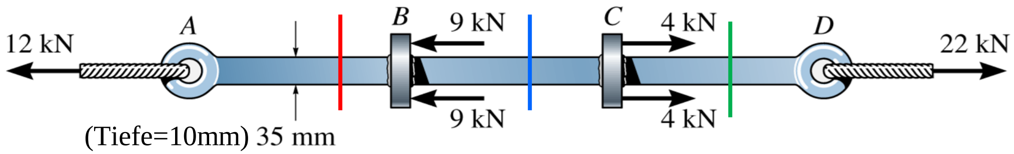
$\uparrow \Sigma F = 0$

$\Rightarrow 2Q - F = 0$

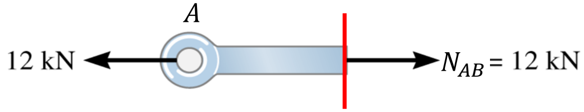
$\Rightarrow Q -= F/2$

$$\tau[N/m^2] = \frac{Q[N]}{A[m^2]} = \frac{F/2N}{A[m^2]} = \frac{20kN/2}{1000mm^2} = 0{,}01kN/mm^2 = 10N/mm^2 = 10MPa$$

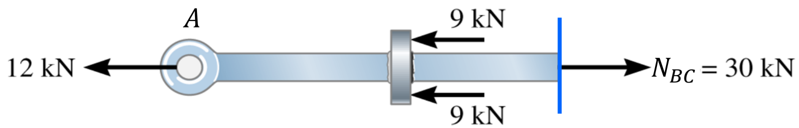
BEISPIEL: NORMALSPANNUNG



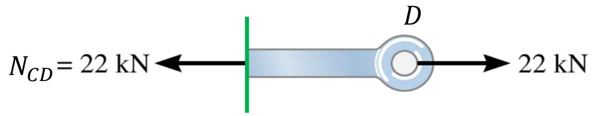
3 Schnitte $\rightarrow$ 3 Freikörperbilder $\rightarrow$ statik $\Sigma F = 0 \rightarrow$ N (Innere Kraft)



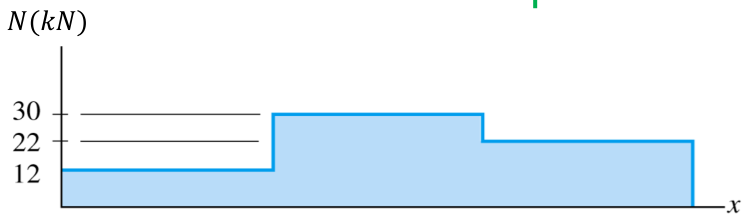
$\rightarrow x\Sigma F = 0 \Rightarrow N_{AB} - 12kN = 0 \Rightarrow N_{AB} = 12kN$



$\rightarrow x\Sigma F = 0 \Rightarrow N_{BC} - 12kN - 9kN - 9kN = 0 \Rightarrow N_{AB} = 30kN$

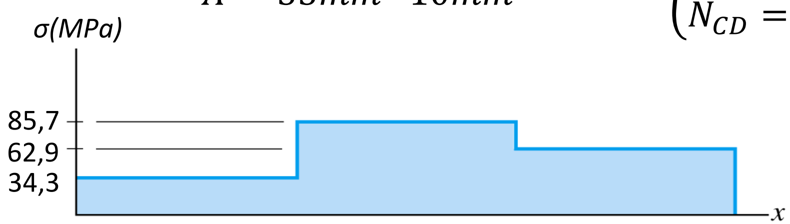


$\rightarrow x\Sigma F = 0 \Rightarrow 22kN - N_{AB} = 0 \Rightarrow N_{CD} = 22kN$



Innere Kräfte N

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{35mm \cdot 10mm} \qquad N = \begin{cases} N_{AB} = +12kN\ (zug) \\ N_{BC} = +30kN\ (zug) \\ N_{CD} = +22kN\ (zug) \end{cases}$$



Mittlere Normalspannung σ

MITTLERE SCHUBSPANNUNG

Einschnittige
Scherung

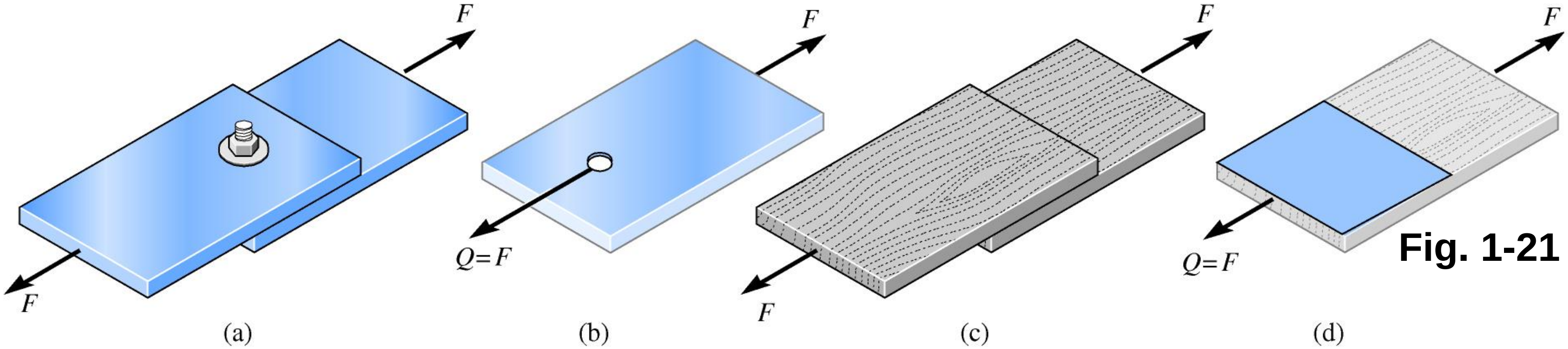


Fig. 1-21

Zweischrittige Scherung

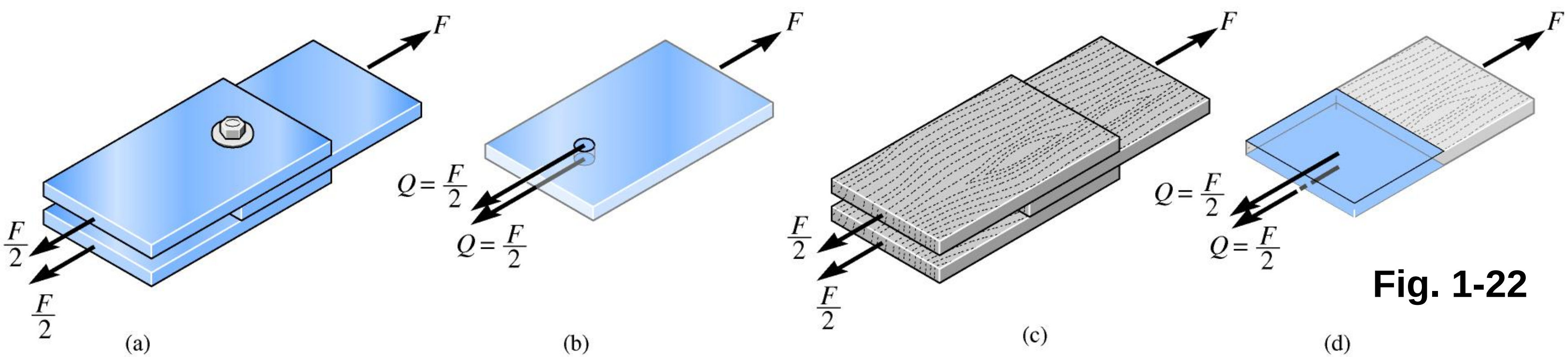


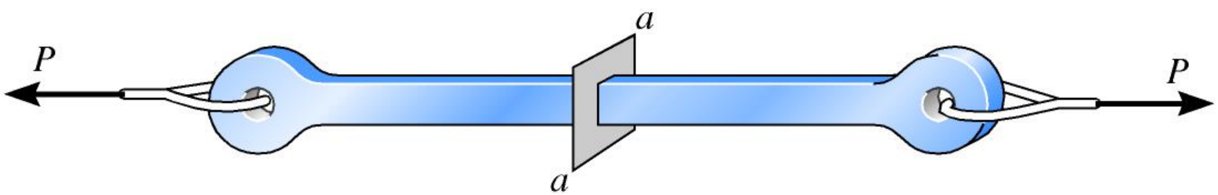
Fig. 1-22

DESIGN VON EINFACHE VERBINDUNGSELEMENTE

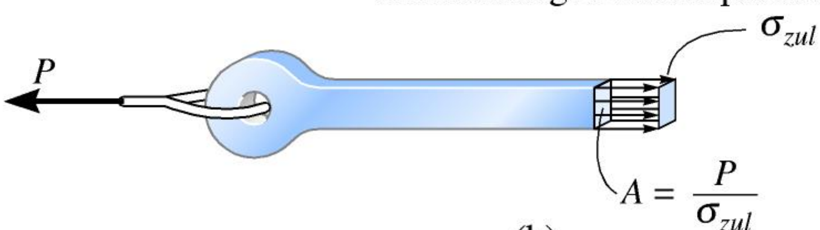
Querschnittsfläche eines Zugankers $\sigma = \dfrac{N}{A} \Rightarrow A = \dfrac{N}{\sigma_{zul}}$

$$\sigma_{zul} = \sigma_{zulässig}$$

$\sigma_{zulässig}$ wird experimentell für ein Material bestimmt



(a)



(b)

DESIGN VON EINFACHE VERBINDUNGSELEMENTE

Querschnittsfläche einer auf Schub beanspruchten Verbindung

$$\tau = \frac{Q}{A} \Rightarrow A = \frac{Q}{\tau_{zul}}$$

$\tau_{zul} = \tau_{zulässig}$

$\tau_{zulässig}$ wird experimentell für ein Material bestimmt

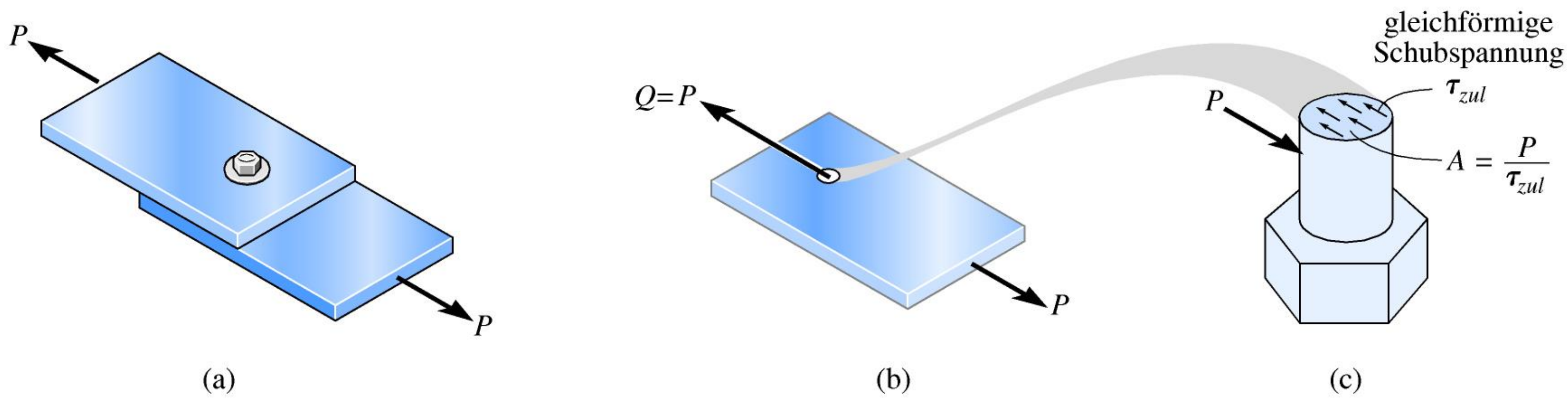
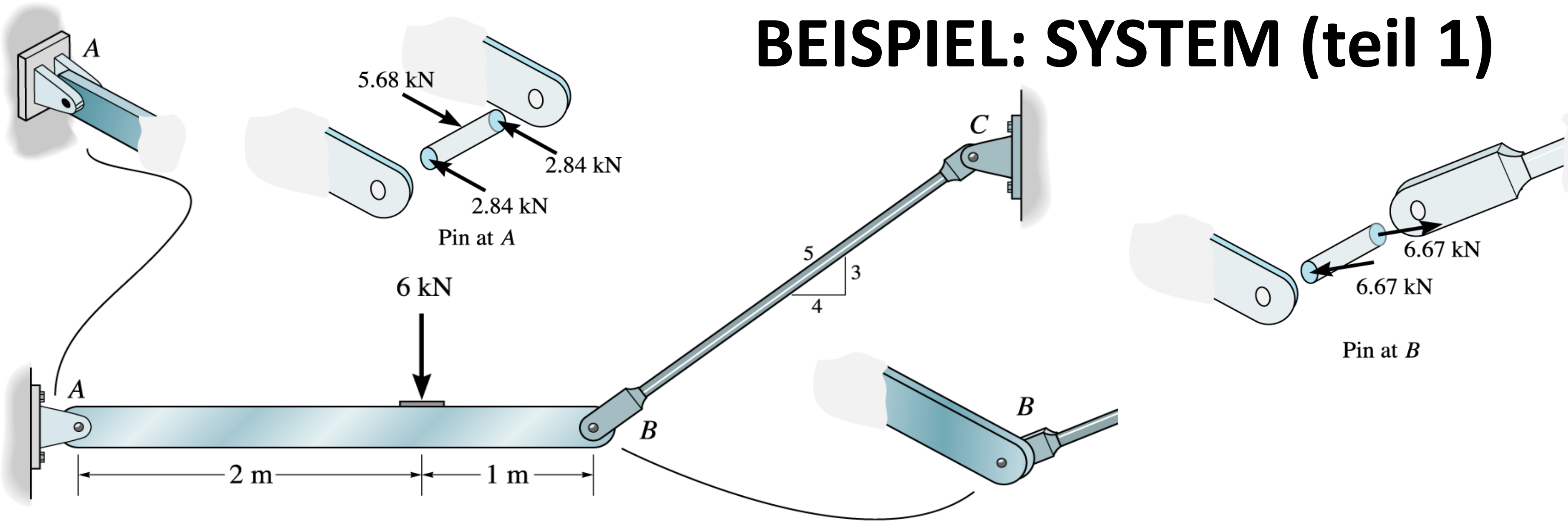


Fig. 1-28

BEISPIEL: SYSTEM (teil 1)



τ_{zul}=90MPa σ_{zul}=115MPa

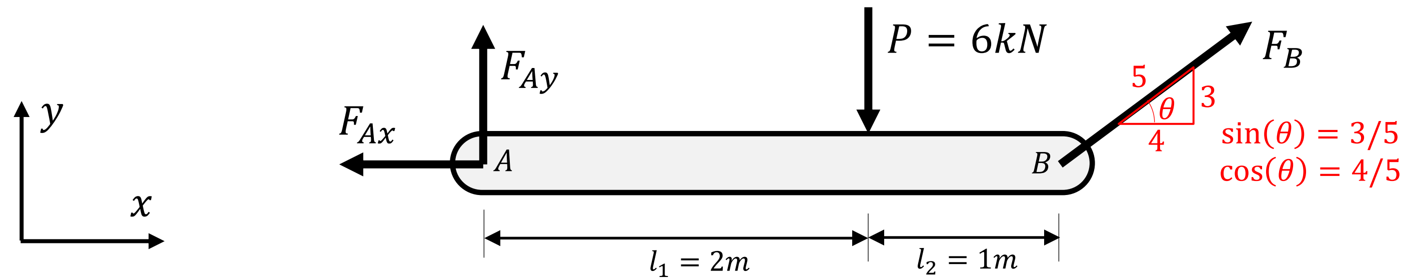
Gesucht: Durchmesser der Gelenkbolzen:

i) Freikörperbild

ii) Statik (Kräfte bei A & B finden)

iiii) Spannungen

i) Freikörperbild



ii) Statik

① $\Sigma F_x = 0$ (translation)
② $\Sigma F_y = 0$ (translation)
③ $\Sigma \mathrm{M} = 0$ (rotation gegen-uhrzeigersinn positiv)

Gesucht: F_{Ax}, F_{Ay}, F_B

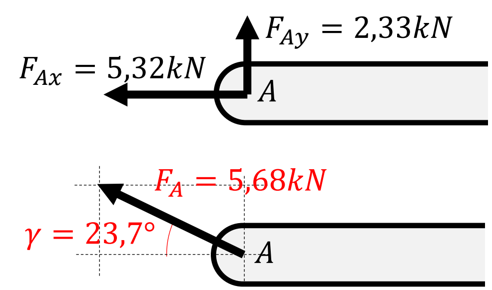
<u>Gleichungen (2D Statik)</u>

① $\Sigma F_x = 0$
$\Rightarrow -F_{Ax} + F_B \cdot \cos(\theta) = 0$
② $\Sigma F_y = 0$
$\Rightarrow F_{Ay} - P + F_B \cdot \sin(\theta) = 0$
③ $\Sigma M_A = 0$ (Drehachse um A)
$\Rightarrow -P \cdot l_1 + F_B \cdot \sin(\theta) \cdot (l_1 + l_2) = 0$

<u>Gleichungen lösen für Kräfte</u>

(für 3 unbekannten F_{Ax}, F_{AY}, F_B)
③ lösen für F_B:
$F_B = P \cdot l_1/(\sin(\theta) \cdot (l_1 + l_2))$
$\Rightarrow F_B = 6kN \cdot 2m/(3/5 \cdot (2m + 1m)) = 6{,}67kN$
① lösen für F_{Ax}:
$F_{Ax} = F_B \cdot \cos(\theta)$
$\Rightarrow F_{AX} = 6{,}67kN \cdot 4/5 = 5{,}32kN$
②lösen für F_{Ay}:
$F_{Ay} = P - F_B \cdot \sin(\theta)$
$\Rightarrow F_{Ay} = 6kN - 6{,}67kN \cdot 3/5 = 2{,}33kN$

<u>Kraft Beträge</u>

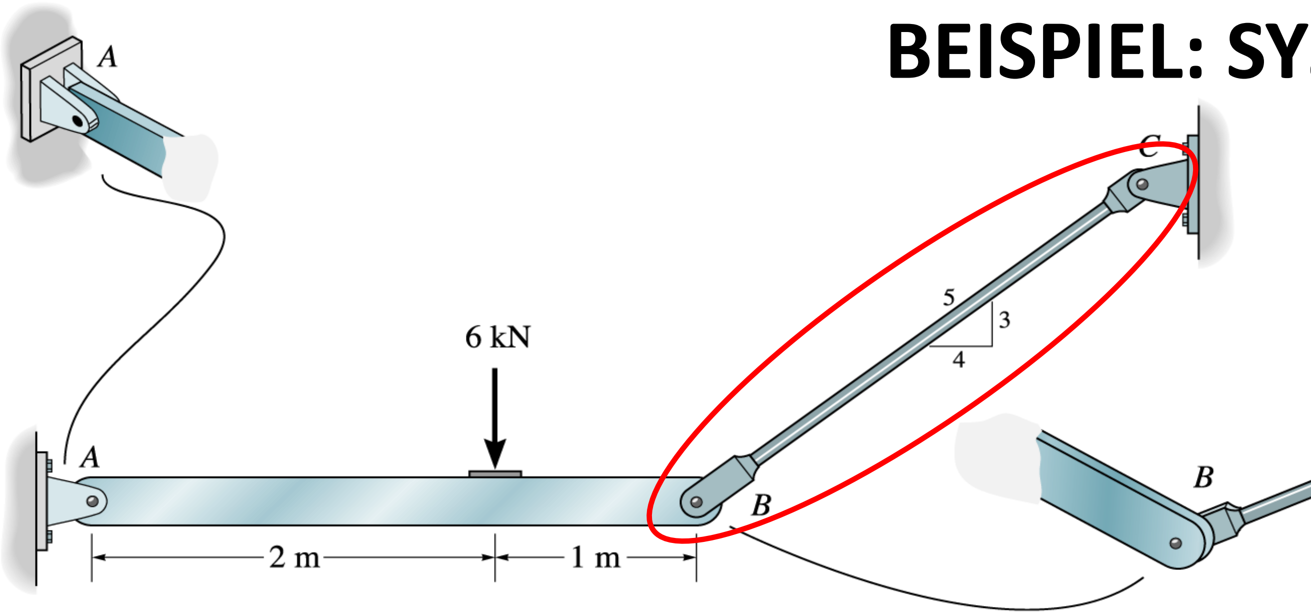


$$F_A = \sqrt{{F_{Ax}}^2 + {F_{Ay}}^2} = \sqrt{(5{,}32kN)^2 + (2{,}33kN)^2} = 5{,}68kN$$

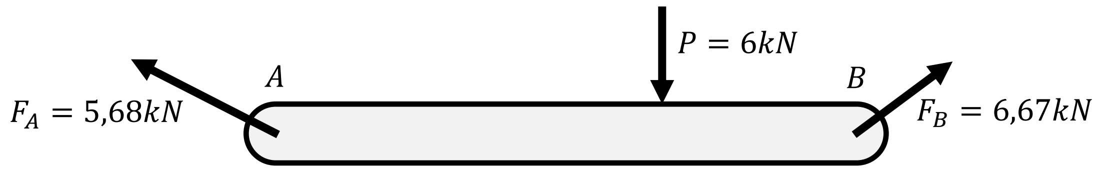
$$\tan(\gamma) = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} \Rightarrow \gamma = arctan\left(\frac{F_{Ay}}{F_{Ax}}\right) = arctan\left(\frac{2{,}33kN}{5{,}32kN}\right) = 23{,}7°$$

Ergebnisse bezogen auf Freikörperbild Pfeilen (nicht auf Koordintensystem)

BEISPIEL: SYSTEM (teil 2)



τ_{zul}=90MPa σ_{zul}=115MPa



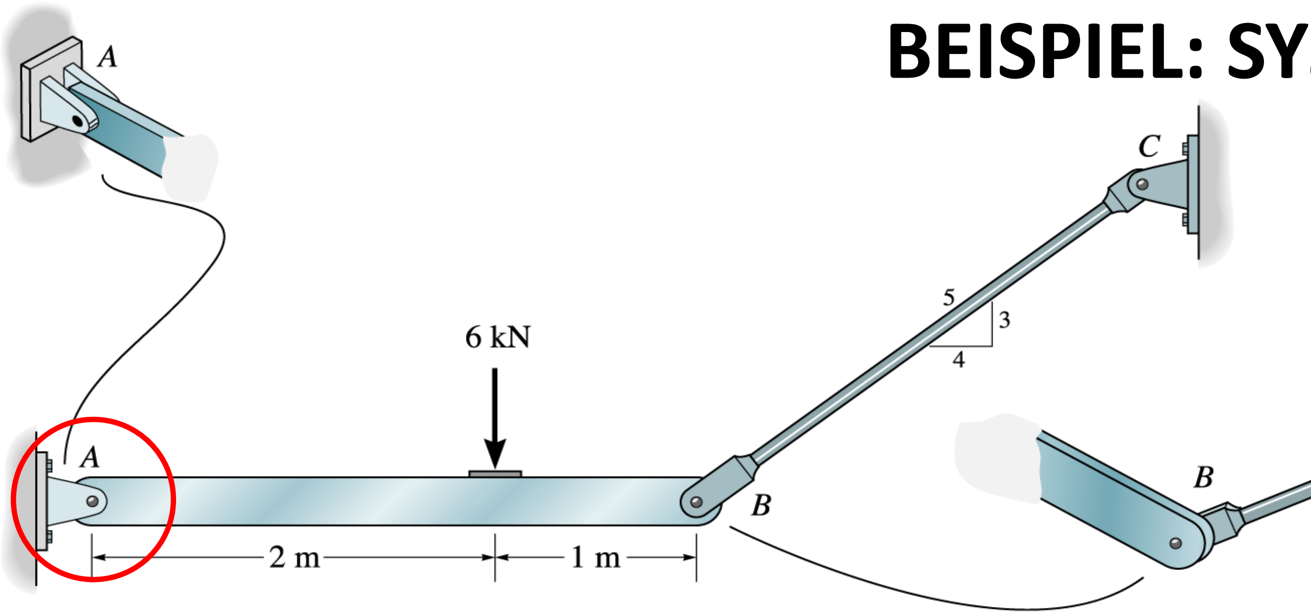
iiii) Spannungen

Durchmesser d_{BC}

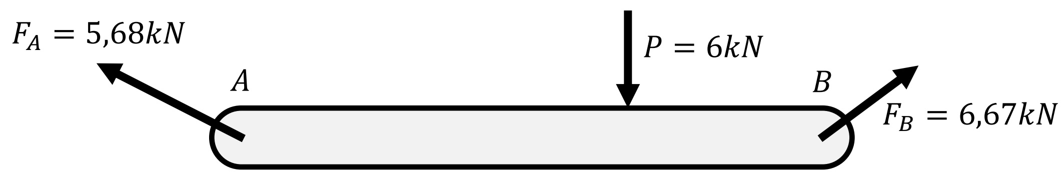
$$\sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow A = \frac{N}{\sigma_{zul}} = \frac{F_B}{\sigma_{zul}} \Rightarrow A = \frac{6{,}67kN}{115MPa} = \frac{6{,}67 \cdot 10^3 N}{115 \cdot 10^6 N/m^2} \quad \Rightarrow A = 58 \cdot 10^{-6} m^2$$

$$A = \pi \cdot {r_{BC}}^2 = \pi \left(\frac{{d_{BC}}^2}{4} \right) \Rightarrow d_{BC} = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{58 \cdot 10^{-6} m^2}{\pi}} = 4{,}29 \cdot 10^{-3} m \qquad \Rightarrow d_{BC} = 4{,}29mm$$

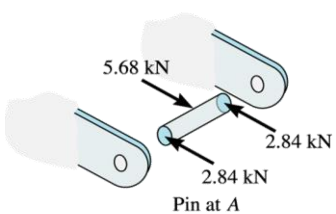
BEISPIEL: SYSTEM (teil 2)



τ_{zul}=90MPa σ_{zul}=115MPa



iiii) Spannungen

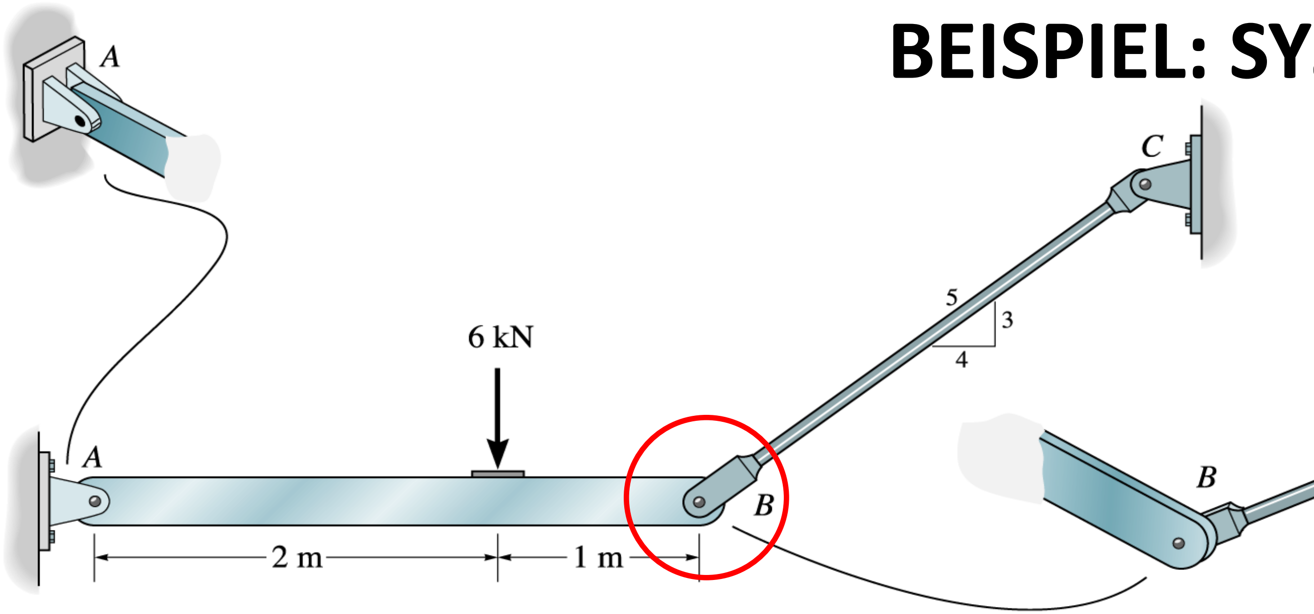


Durchmesser d_A

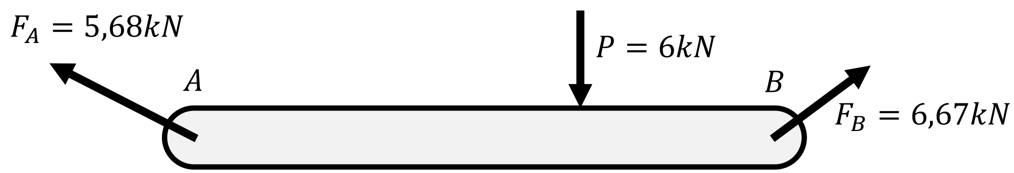
$$\tau_A = \frac{Q_A}{A_A} \Rightarrow A_A = \frac{Q_A}{\tau_{zul}} \Rightarrow A_A = \frac{F_A/2}{\tau_{zul}} = \frac{5{,}68kN/2}{90MPa} = \frac{5{,}68 \cdot 10^3 N/2}{90 \cdot 10^6 N/m^2} \qquad \Rightarrow A_A = 31{,}6 \cdot 10^{-6} m^2$$

$$A_A = \pi \cdot {r_A}^2 = \pi \left(\frac{{d_A}^2}{4}\right) \Rightarrow d_A = A_A = 2 \cdot \sqrt{\frac{A_A}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{31{,}6 \cdot 10^{-6} m^2}{\pi}} = 6{,}35 \cdot 10^{-3} m \qquad \Rightarrow d_{BC} = 6{,}35mm$$

BEISPIEL: SYSTEM (teil 2)

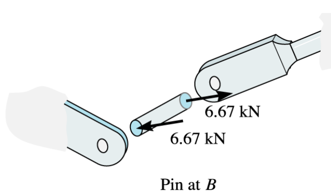


τ_{zul}=90MPa σ_{zul}=115MPa



iiii) Spannungen

Durchmesser d_B



$$\tau_B = \frac{Q_B}{A_B} \Rightarrow A_B = \frac{Q_B}{\tau_{zul}} \Rightarrow A_B = \frac{F_B}{\tau_{zul}} = \frac{6{,}67kN}{90MPa} = \frac{6{,}67 \cdot 10^3 N/2}{90 \cdot 10^6 N/m^2} \quad \Rightarrow A_B = 74{,}1 \cdot 10^{-6} m^2$$

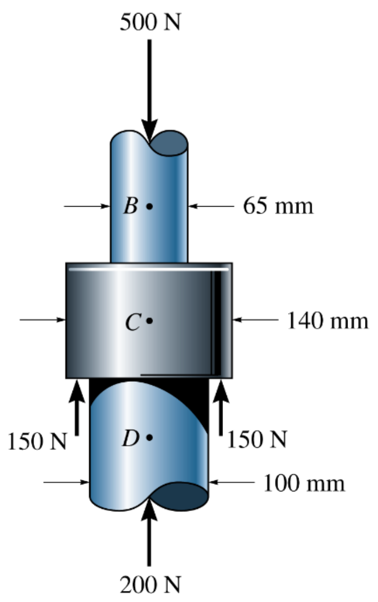
$$A_B = \pi \cdot {r_B}^2 = \pi \left(\frac{{d_B}^2}{4}\right) \Rightarrow d_B = A_B = 2 \cdot \sqrt{\frac{A_B}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{74{,}1 \cdot 10^{-6} m^2}{\pi}} = 9{,}9 \cdot 10^{-3} m \quad \Rightarrow d_{BC} = 9{,}9mm$$

CONZEPT QUIZ

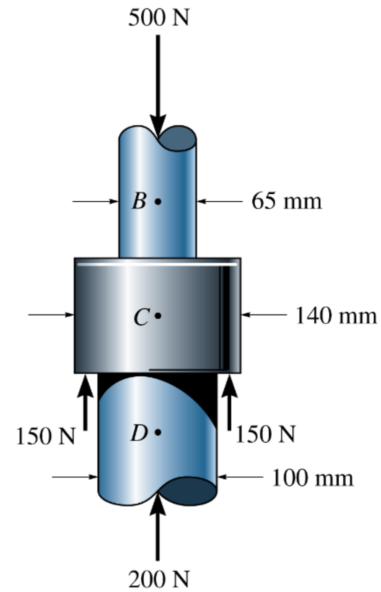
1. Kräfte wirken auf einen abgesetzten Bolzen

   Ordnen Sie die Normalspannungs Beträge von B bis D.

   A) C > B > D
   B) C > D > B
   C) B > C > D
   D) D > B > C



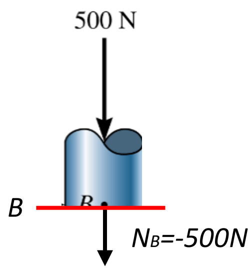
CONZEPT QUIZ

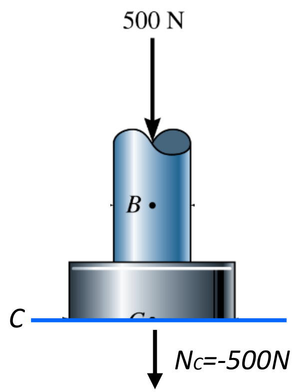


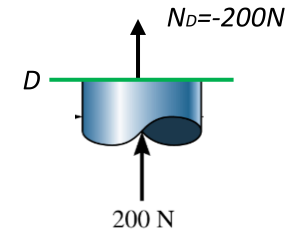
1. Kräfte wirken auf einen abgesetzten Bolzen

   Ordnen Sie die Normalspannungs Beträge von B bis D.

   A) C > B > D
   B) C > D > B
   C) B > C > D
   D) D > B > C







$$A = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{(65mm)^2}{4} = 3318mm^2$$

$$A = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{(140mm)^2}{4} = 15394mm$$

$$A = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{(100mm)^2}{4} = 7854mm^2$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-500N}{3318mm^2} = -0{,}151N/mm^2$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-500N}{15304mm^2} = -0{,}0327N/mm^2$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-200N}{7854mm^2} = -0{,}0255N/mm^2$$

Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

13. Spannung und Festigkeit – Biegung

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

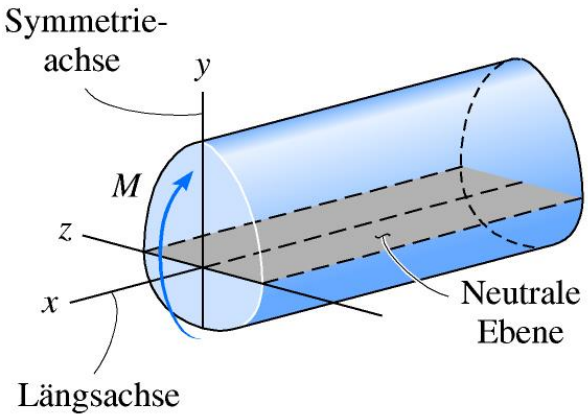
Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton’schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

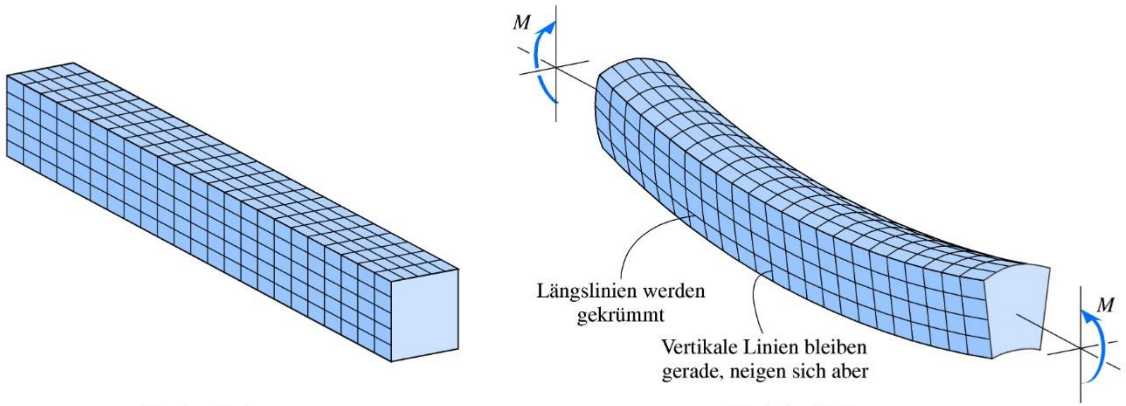
12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke’sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

BIEGEVERFORMUNG EINER GERADE BALKEN



Annahmen:

A) Querebene bleibt Eben
B) Länge der Achse bleibt unverändert
C) Querebene bleibt Senkrecht zu der Längsachse
D) Verformung in der Ebene ist vernachlässigbar



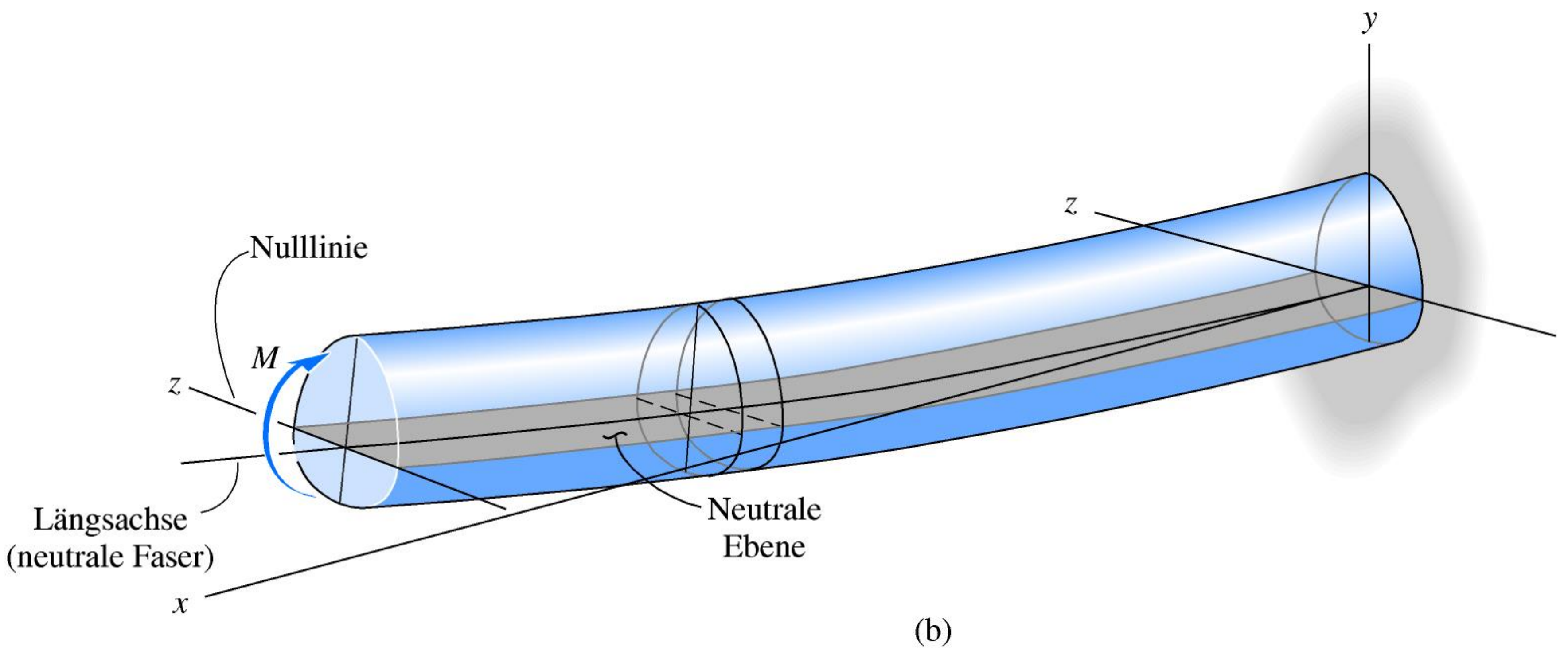
Vor der Verformung

(a)

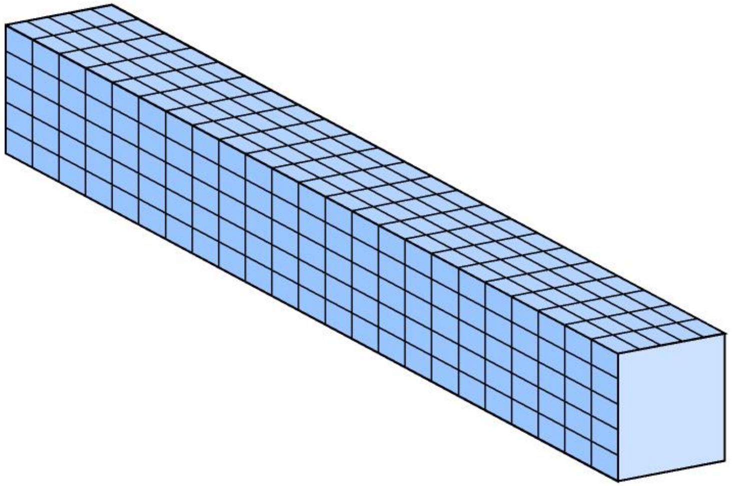
Nach der Verformung

(b)

BIEGEVERFORMUNG EINER GERADE BALKEN

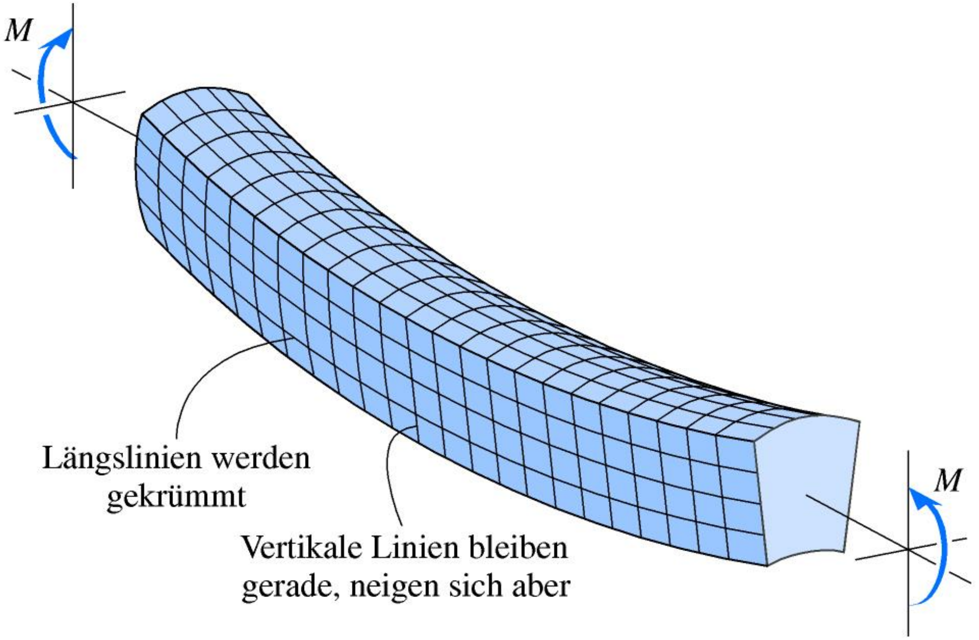


BIEGEVERFORMUNG EINER GERADE BALKEN



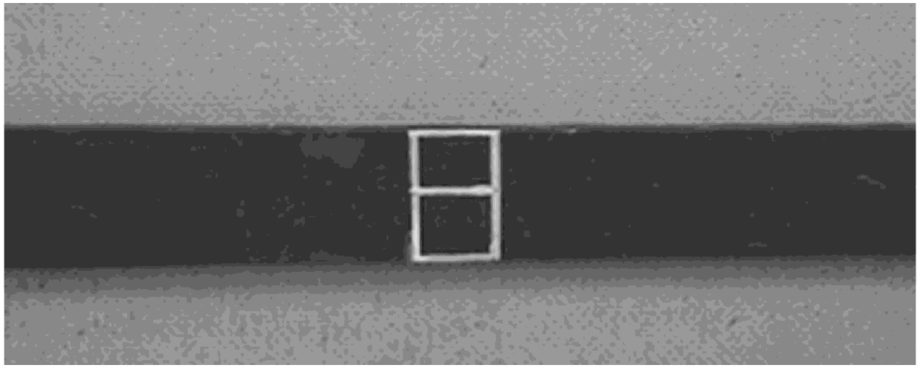
Vor der Verformung

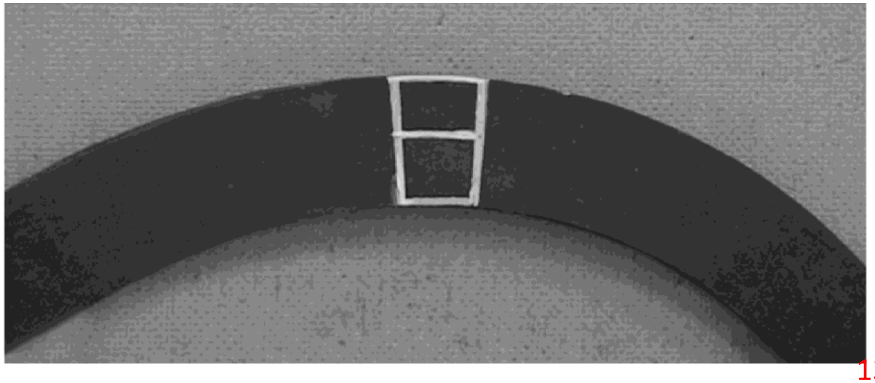
(a)



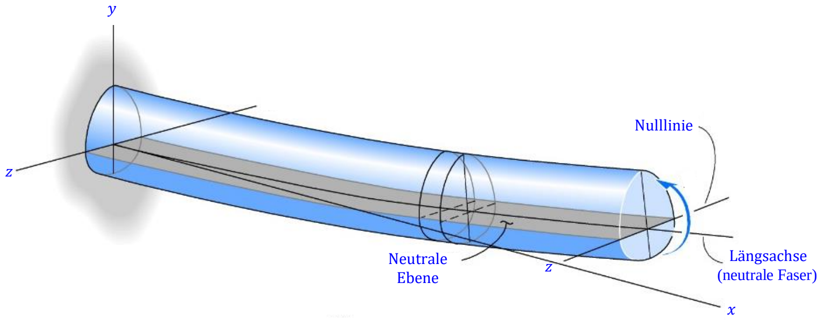
Nach der Verformung

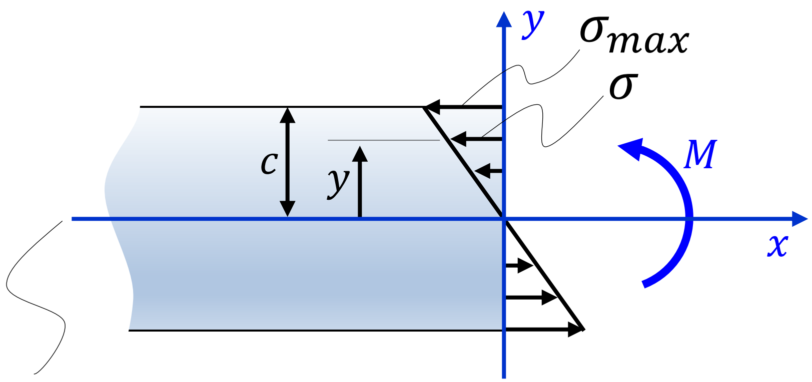
(b)





BIEGESPANNUNGSFORMEL



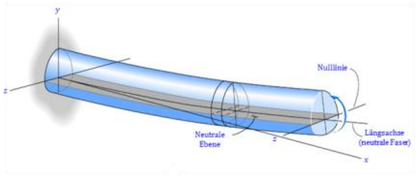


$$\frac{\sigma}{\sigma_{max}} = \frac{y}{c}$$

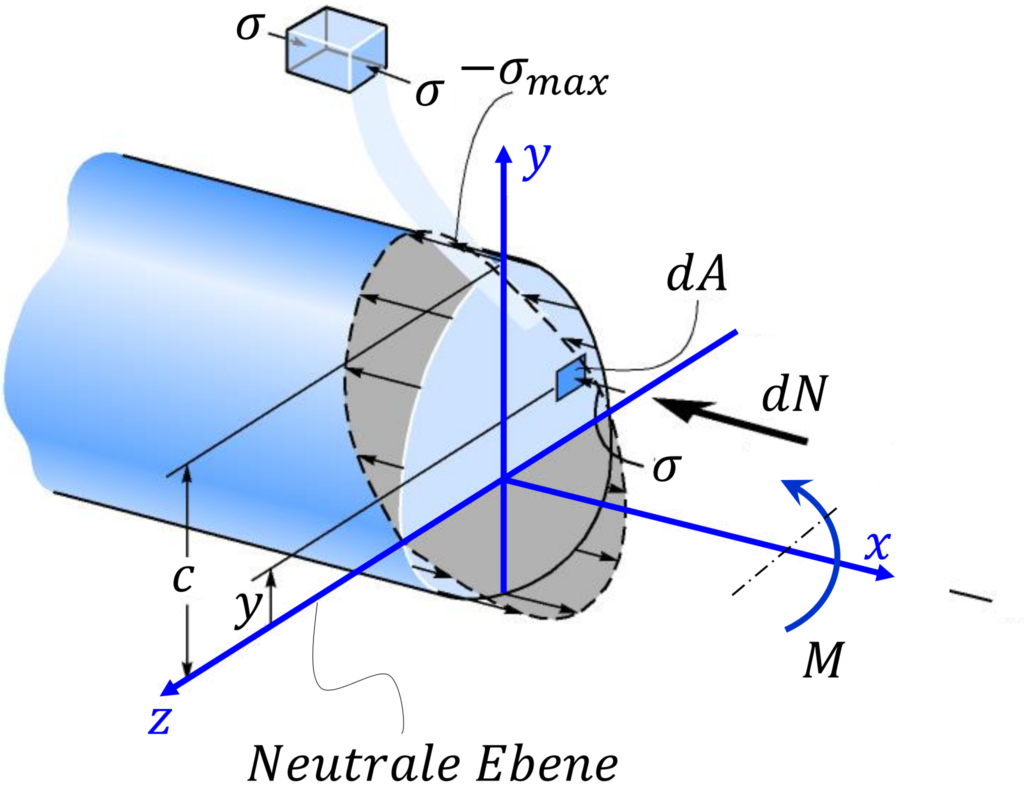
$$\sigma = \left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{max}$$

$Neutrale\ Ebene$ (Axiale Spannung = 0)

BIEGESPANNUNGSFORMEL



Gegeben:
Biegemoment M
Querschnittsgeometrie A
Gesucht:
Spannung σ



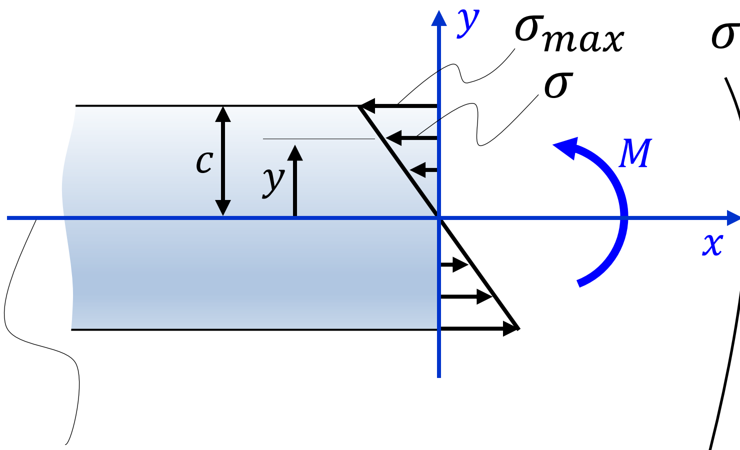
$$dM = -y \cdot dN$$

$$M = -\int_A y \cdot dN \quad \left(\sigma = \frac{N}{A} = \frac{dN}{dA}\right)$$

$$M = -\int_A y \cdot \sigma \cdot dA \quad ①$$

BIEGESPANNUNGSFORMEL

Lineare Spannungsverteilung im Querschnitt



Gegeben:

Biegemoment M

Querschnittsgeometrie A

Gesucht:

Spannung σ

$$\sigma = \left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{max}$$

$$M = -\int_A y \cdot \sigma \cdot dA \quad ①$$

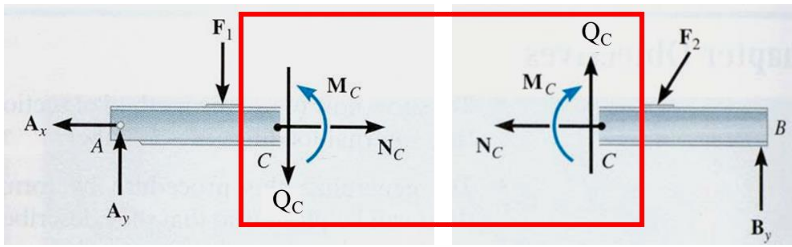
$$M = -\int_A y \cdot \left(\frac{y}{c} \cdot \sigma_{max}\right) \cdot dA$$

$$M = -\frac{\sigma_{max}}{c} \cdot \int_A y^2 \cdot dA \;\text{———}\; I$$

"Flächenträgheits-moment"

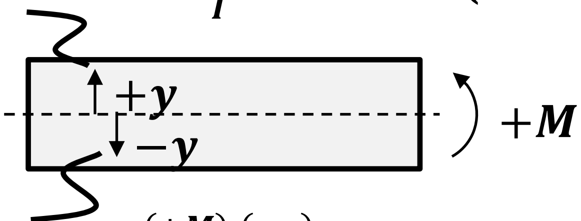
$$M = -\frac{\sigma_{max}}{c} \cdot I$$

$$\boxed{\sigma_{max} = -\frac{M \cdot c}{I} \qquad \sigma = -\frac{M \cdot y}{I} \qquad I = \int_A y^2 \cdot dA}$$



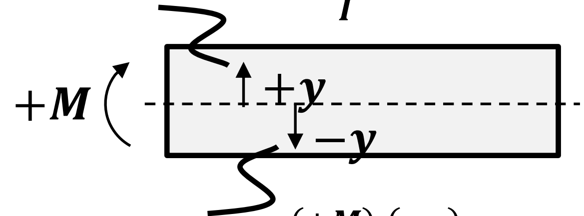
Positive Innere Momente

$$\sigma = -\frac{(+M)\cdot(+y)}{I} \Rightarrow -\,\sigma\ (\text{Druck})$$



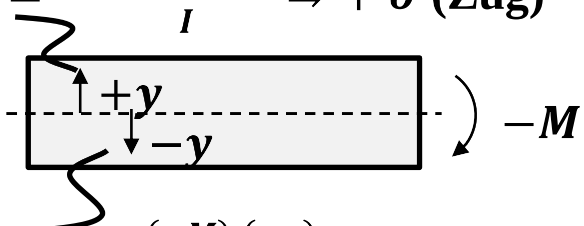
$$\sigma = -\frac{(+M)\cdot(-y)}{I} \Rightarrow +\,\sigma\ (\text{Zug})$$

$$\sigma = -\frac{(+M)\cdot(+y)}{I} \Rightarrow -\,\sigma\ (\text{Druck})$$



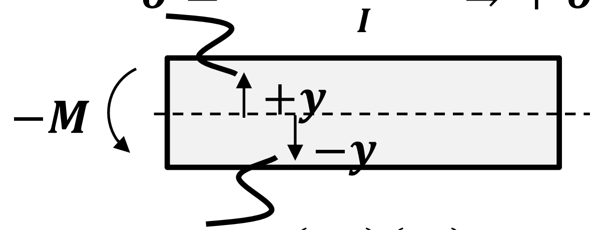
$$\sigma = -\frac{(+M)\cdot(-y)}{I} \Rightarrow +\,\sigma\ (\text{Zug})$$

$$\sigma = -\frac{(-M)\cdot(+y)}{I} \Rightarrow +\,\sigma\ (\text{Zug})$$



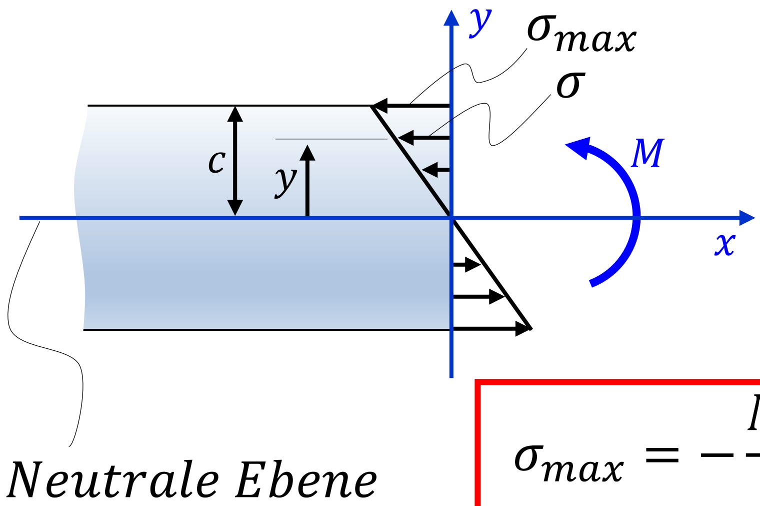
$$\sigma = -\frac{(-M)\cdot(-y)}{I} \Rightarrow -\,\sigma\ (\text{Druck})$$

$$\sigma = -\frac{(-M)\cdot(+y)}{I} \Rightarrow +\,\sigma\ (\text{Zug})$$



$$\sigma = -\frac{(-M)\cdot(-y)}{I} \Rightarrow -\,\sigma\ (\text{Druck})$$

BIEGESPANNUNGSFORMEL



$$\sigma_{max} = -\frac{M \cdot c}{I} \qquad \sigma = -\frac{M \cdot y}{I} \qquad I = \int_A y^2 \cdot dA$$

Hierin bedeuten

σ_{max} = die maximale Normalspannung im Bauteil, die an dem am *weitesten* von der z-Achse entfernt liegenden Randpunkt der Querschnittsfläche auftritt.

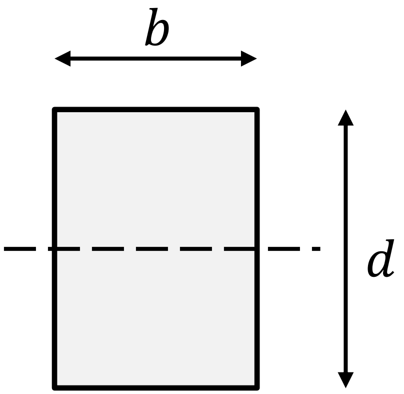
M = das resultierende Biegemoment, bestimmt mittels Freischnitt und dem Momentengleichgewicht um die z-Achse (durch den Flächenschwerpunkt S)

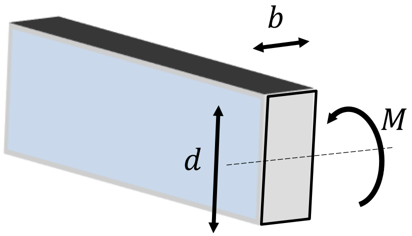
I = das axiale Flächenträgheitsmoment des Querschnitts, berechnet um die z-Achse

c_{max} = die kürzeste Entfernung von der z-Achse zu einem Randpunkt, der sich am weitesten entfernt von der z-Achse befindet, also dort, wo σ_{max} auftritt.

Flächenträgheitsmoment I

Beispiel: Viereckige Querschnitt



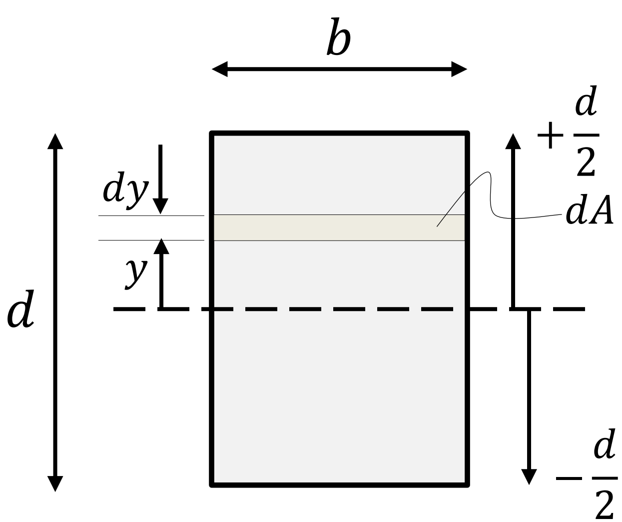


$$I = \int_A y^2 \cdot dA \qquad dA = b \cdot dy$$

$$I = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy$$

$$I = b \cdot \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} y^2 \cdot dy$$

$$I = b \cdot [y^3/3]_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}}$$



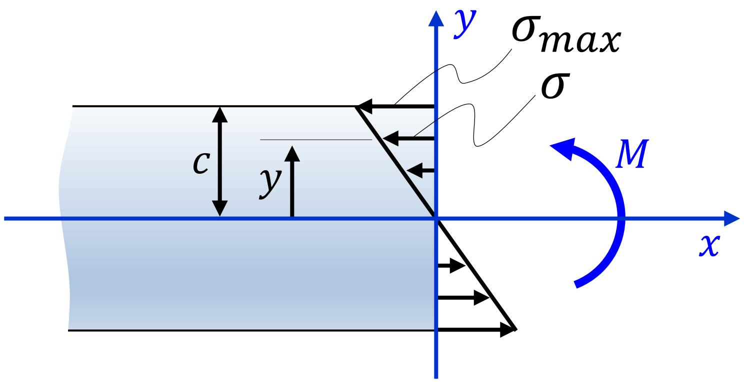
$$I = b \cdot \left(\frac{\left(+\frac{d}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{d}{2}\right)^3}{3} \right)$$

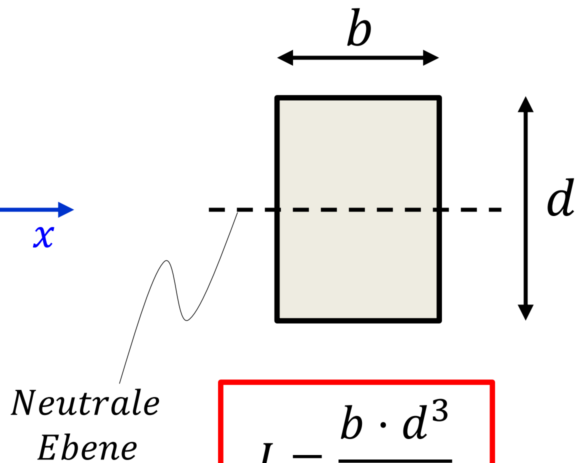
$$I = b \cdot \left(\frac{d^3}{8} + \frac{d^3}{8} \right) /3$$

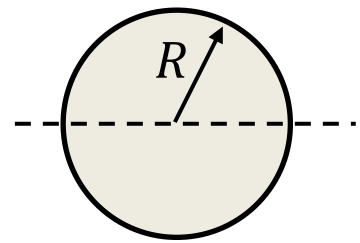
$$\boxed{I = \frac{b \cdot d^3}{12}}$$

BIEGESPANNUNGSFORMEL
und Trägheitsmoment für Rechteck und Kreis

$$\sigma_{max} = -\frac{M \cdot c}{I} \qquad \sigma = -\frac{M \cdot y}{I} \qquad I = \int_A y^2 \cdot dA \qquad I: [m^4]$$







$$I = \frac{b \cdot d^3}{12}$$

$$I = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$$

Lösungsweg

Für die Anwendung der Biegespannungsformel wird die folgende Lösungsmethode vorgeschlagen.

Inneres Biegemoment

- Schneiden Sie das Bauteil an der Stelle, an der die Normalspannung infolge Biegung bestimmt werden soll, und ermitteln Sie das innere Biegemoment M an diesem Schnitt. Der Flächenschwerpunkt muss bekannt sein, denn M *ist* aus dem Momentengleichgewicht um eine Achse durch S *zu bestimmen*.
- Soll die maximale Biegespannung berechnet werden, dann zeichnen Sie die Biegemomentenlinie, um das maximale Moment im Balken zu ermitteln.

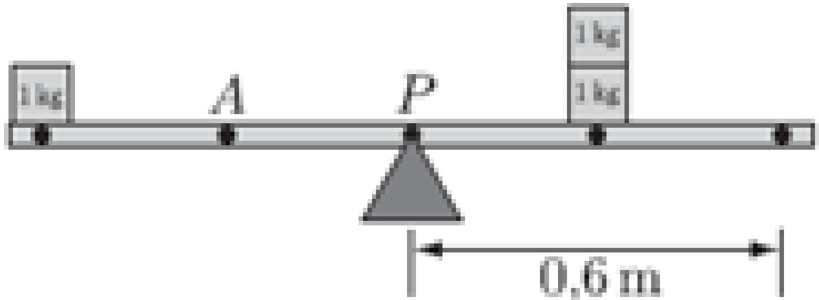
Schnittflächengeometrie

- Bestimmen Sie das axiale Trägheitsmoment der Querschnittsfläche um die z-Achse. Die dafür angewendeten Lösungsmethoden werden in *Anhang A* diskutiert. Eine Tabelle mit aufgelisteten Werten von I für gebräuchliche Querschnittsprofile befindet sich in *Anhang B*.

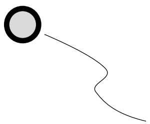
Normalspannung

- Legen Sie den Abstand y zwischen der z-Achse und dem Querschnittspunkt fest, für den die Normalspannung bestimmt werden soll. Danach wenden Sie die Gleichung $\sigma = -My/I$ an oder, wenn die maximale Biegespannung ermittelt werden soll, nutzen Sie $\sigma_{max} = Mc_{max}/I$.
- Die Spannung hat eine Richtung, dass die am zugehörigen Flächenelement hervorgerufene Kraft zu einer Momentenwirkung um die z-Achse beiträgt, die in die gleiche Richtung wie das innere Moment M wirkt, Abbildung 6.26c. In dieser Weise kann die über den gesamten Querschnitt wirkende Spannungsverteilung aufgetragen werden, oder es kann ein Volumenelement des Materials freigeschnitten werden, um grafisch die an diesem Punkt wirkende Normalspannung zu veranschaulichen.

Beispiel **Innerekräfte (aus Kap. 7)** **Gesucht: i) Schubspannung und ii) max/min Biegespannung bei Schnitt P**

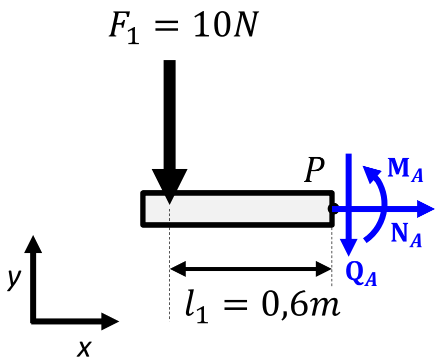


Querschnittsdurchmesser, d=10mm



Kreisförmiges Querschnitt

Gesucht: Schubspannung und max/min Biegespannung bei Schnitt P



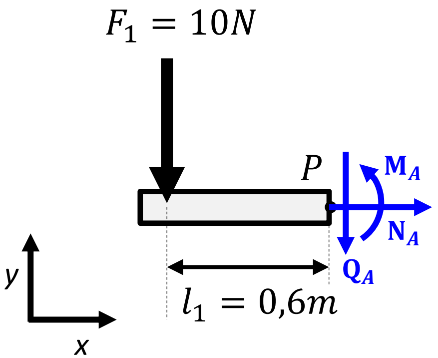
$$N_A = 0N$$
$$Q_A = -10N$$
$$M_A = -6Nm$$

i) Schubspannung: $\tau_A = \dfrac{Q_A}{A_A}$ $\quad A_A(Kreis) = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{10mm}{2}\right)^2 = 78{,}5mm^2$

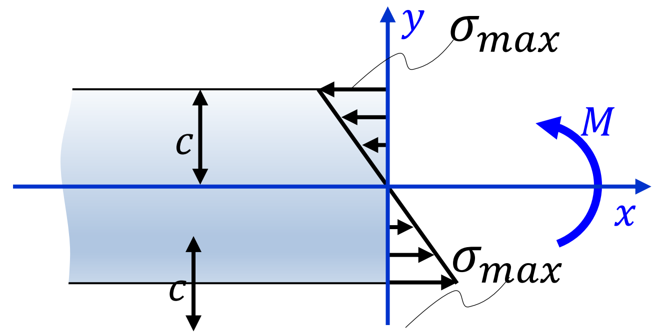
$$\tau_A = \frac{Q_A}{A_A} = \frac{-10N}{78{,}5mm^2} = -0{,}127N/mm^2$$

Beispiel Innerekräfte (aus Kap. 7)

Gesucht: i) Schubspannung und ii) max/min Biegespannung bei Schnitt P

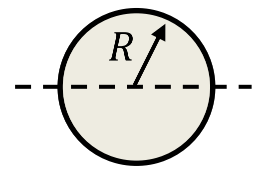


$$N_A = 0N$$
$$Q_A = -10N$$
$$M_A = -6Nm$$



ii) (max.) Biegespannung:

$$\boxed{\sigma_{max} = -\frac{M \cdot c}{I}}$$



$$\boxed{I = \frac{\pi \cdot R^4}{4}}$$

$$\sigma_{max}(oben) = -\frac{M \cdot c}{I} = -\frac{-6000Nmm \cdot (+5mm)}{491mm^4} = +61N/mm^2 (+= Zug)$$

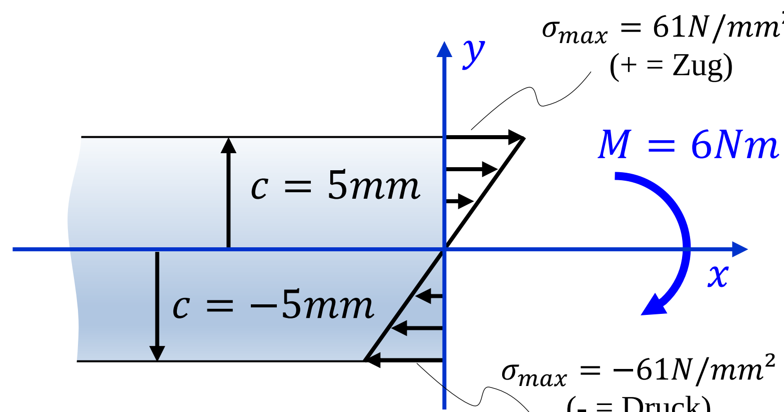
$$\sigma_{max}(unten) = -\frac{M \cdot c}{I} = -\frac{-6000Nmm \cdot (-5mm)}{491mm^4} = -61N/mm^2 (- = Druck)$$

$$M_A = -3Nm = -6000Nmm$$

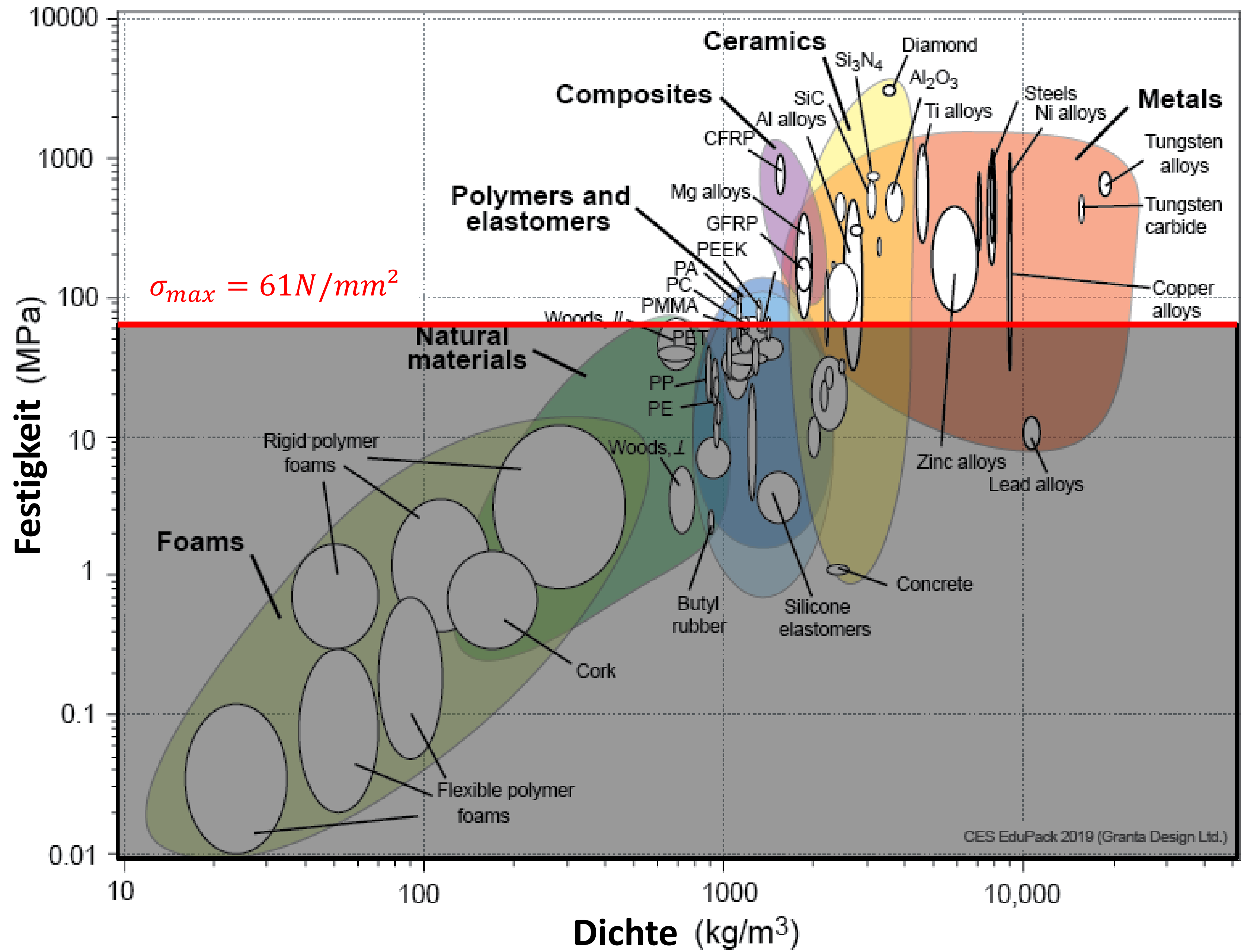
$$c(oben) = +\frac{d}{2}\,(y - richtung) = +\frac{10mm}{2} = +5mm$$

$$c(unten) = -\frac{d}{2}\,(y - richtung) = -\frac{10mm}{2} = -5mm$$

$$I = \frac{\pi \cdot R^4}{4} = \frac{\pi \cdot (d/2)^4}{4} = \frac{\pi \cdot (10mm/2)^4}{4} = 491mm^4$$

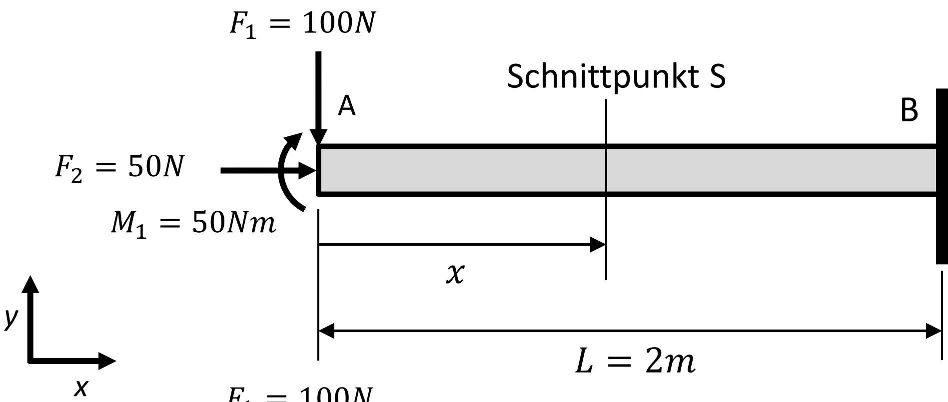


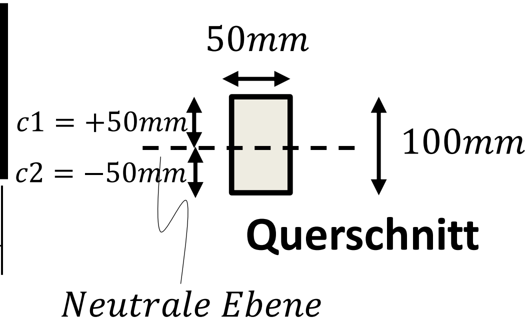
Welches Material könnte die Biegespannungen am Punkt P tragen?



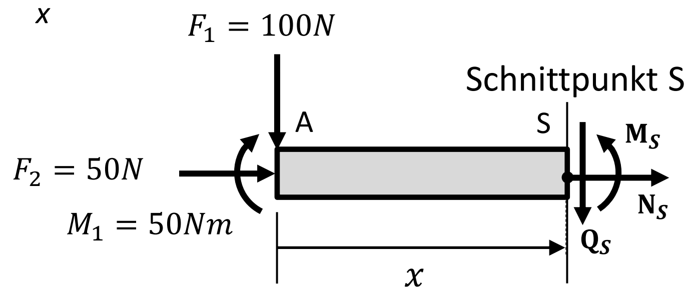
Aufgabe Innerekräfte (aus Kap. 10)

Gesucht: i) Normalspannung wegen axiale Kraft, ii) Schubspannung, iii) max Zug und Druck Biegespannung bei Schnitt B





$$I = \frac{b \cdot d^3}{12}$$



$$I = \frac{b \cdot d^3}{12} = \frac{50mm \cdot (100mm)^3}{12} = 4166667mm^4$$

i) $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-50N}{50mm \cdot 100mm} = -0.01N/mm^2$

ii) $\tau = \frac{Q}{A} = \frac{-100N}{50mm \cdot 100mm} = -0.02N/mm^2$

iii) $\sigma(max) = -\frac{M(x=2) \cdot c1}{I}$

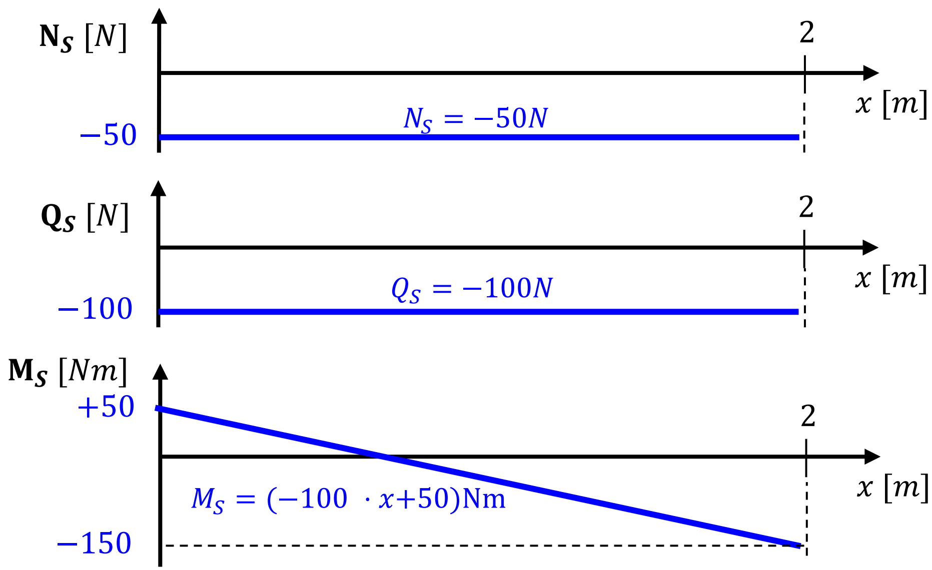
$$= -\frac{-150000Nmm \cdot 50mm}{4166667mm^4} = +1{,}8N/mm^2$$

(Zug)

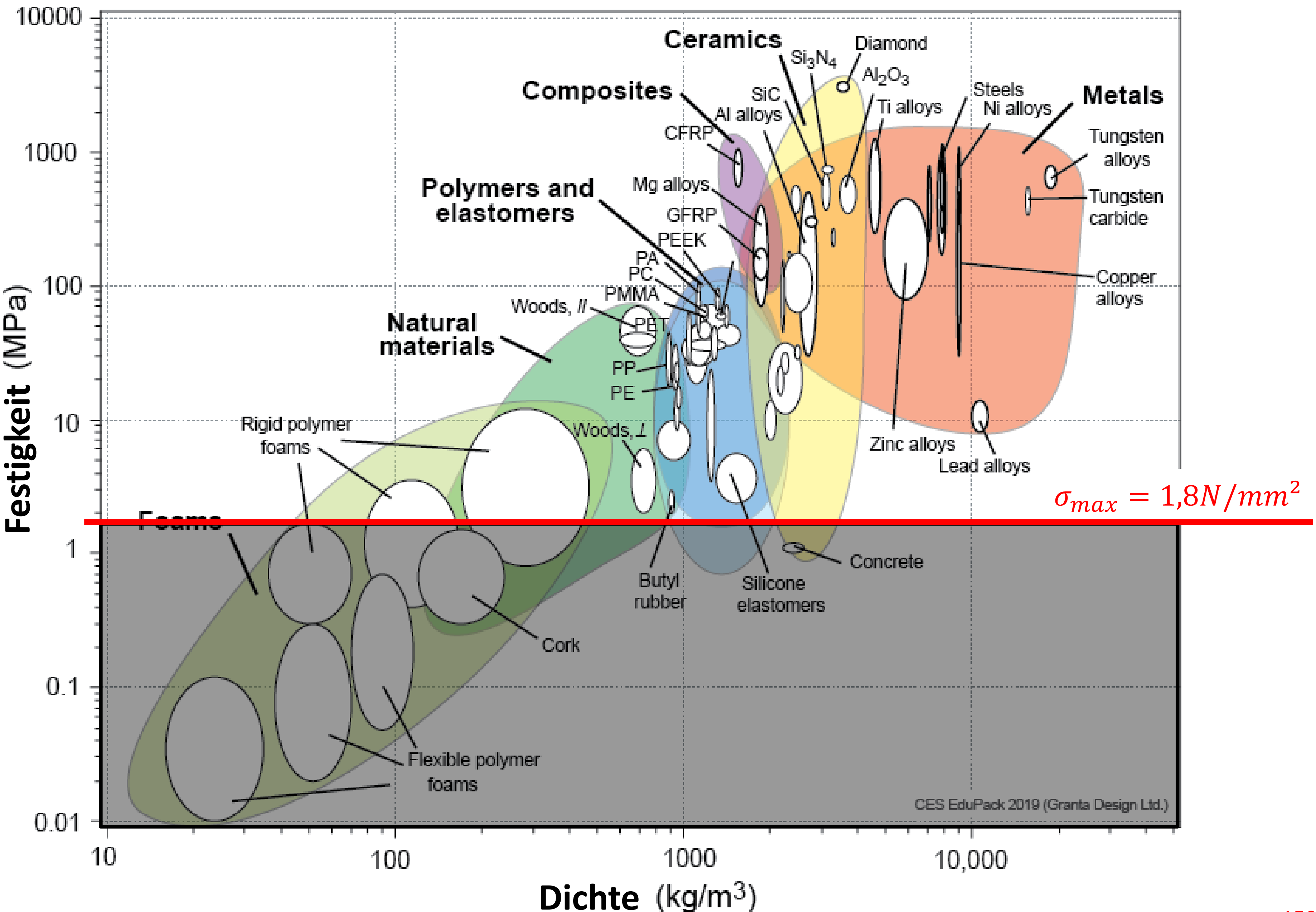
$\sigma(min) = -\frac{M(x=2) \cdot c2}{I}$

$$= -\frac{-150000Nmm \cdot (-50mm)}{4166667mm^4} = -1{,}8N/mm^2$$

$(Drück)$

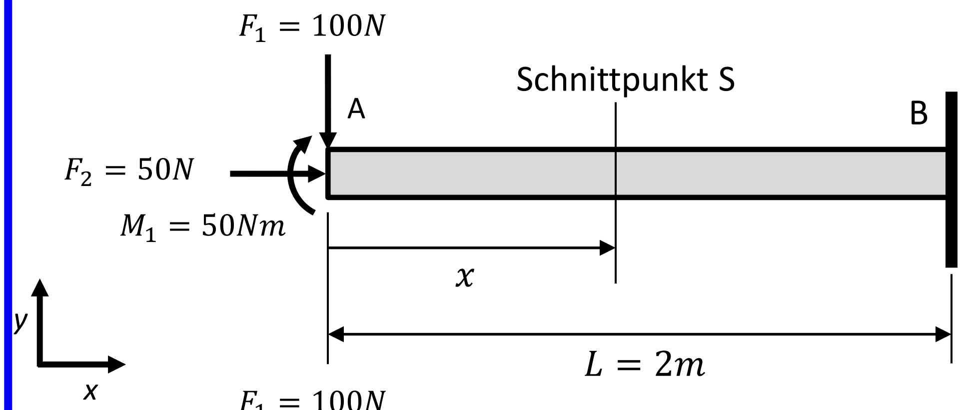


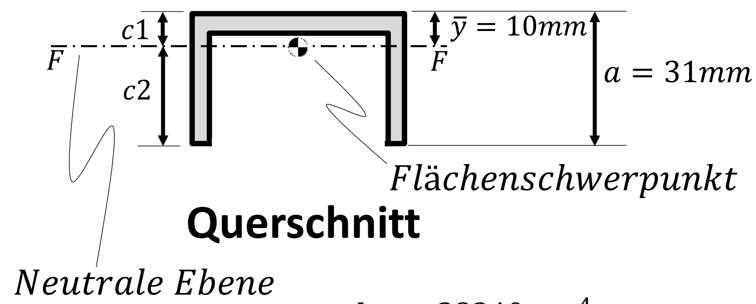
Welches Material könnte die Biegespannungen am Punkt B tragen?

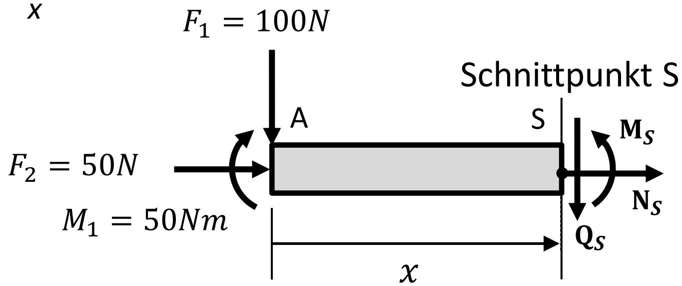


Aufgabe Innerekräfte (aus Kap. 10)

Gesucht: i) Normalspannung wegen axiale Kraft, ii) Schubspannung, iii) max Zug und Druck Biegespannung bei Schnitt B

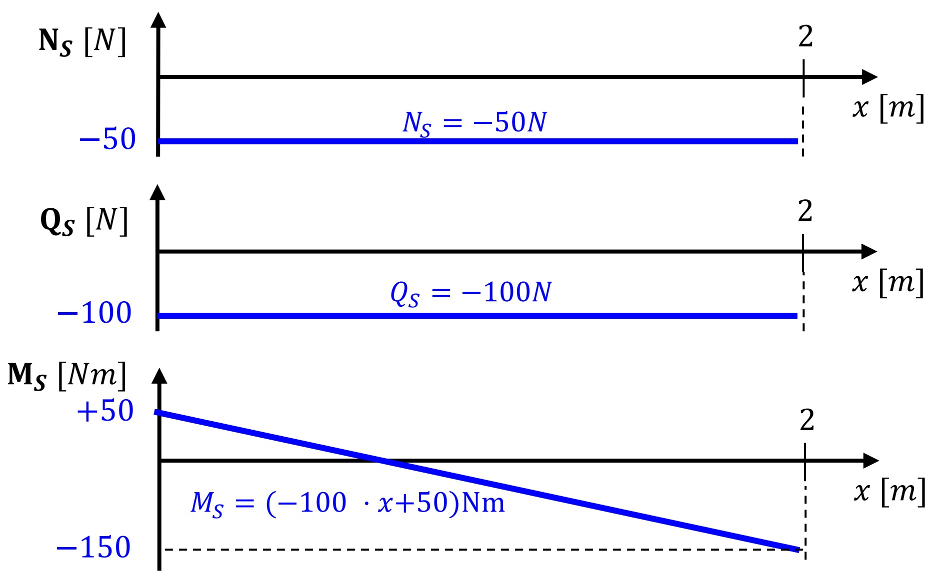






$$I_{FF} = 38340mm^4$$

$$A = 416mm^2$$



i) $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-50N}{416mm^2} = -0.120N/mm^2$

ii) $\tau = \frac{Q}{A} = \frac{-100N}{416mm^2} = -0.240N/mm^2$

iii) $\sigma(max) = -\frac{M(x=2)\cdot c1}{I_{FF}}$

$$= -\frac{-150000Nmm \cdot (+10mm)}{38340mm^4} = +39{,}3N/mm^2$$

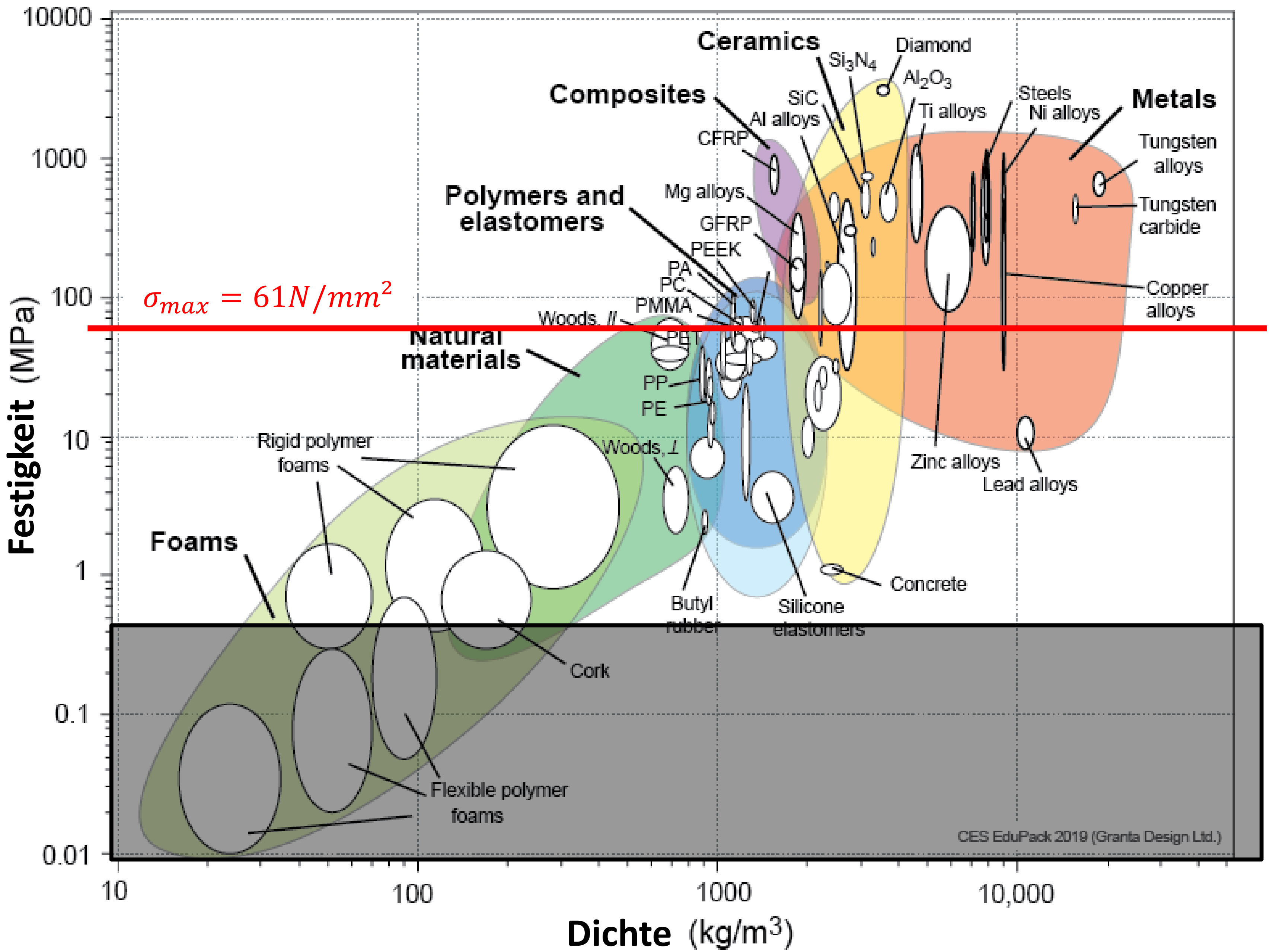
(Zug)

$\sigma(min) = -\frac{M(x=2)\cdot c2}{I_{FF}}$

$$= -\frac{-150000Nmm \cdot (-21mm)}{38340mm^4} = -82{,}0N/mm^2$$

$(Drück)$

Welches Material könnte die Biegespannungen am Punkt B tragen?



LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton'schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke'sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

Technische Mechanik I

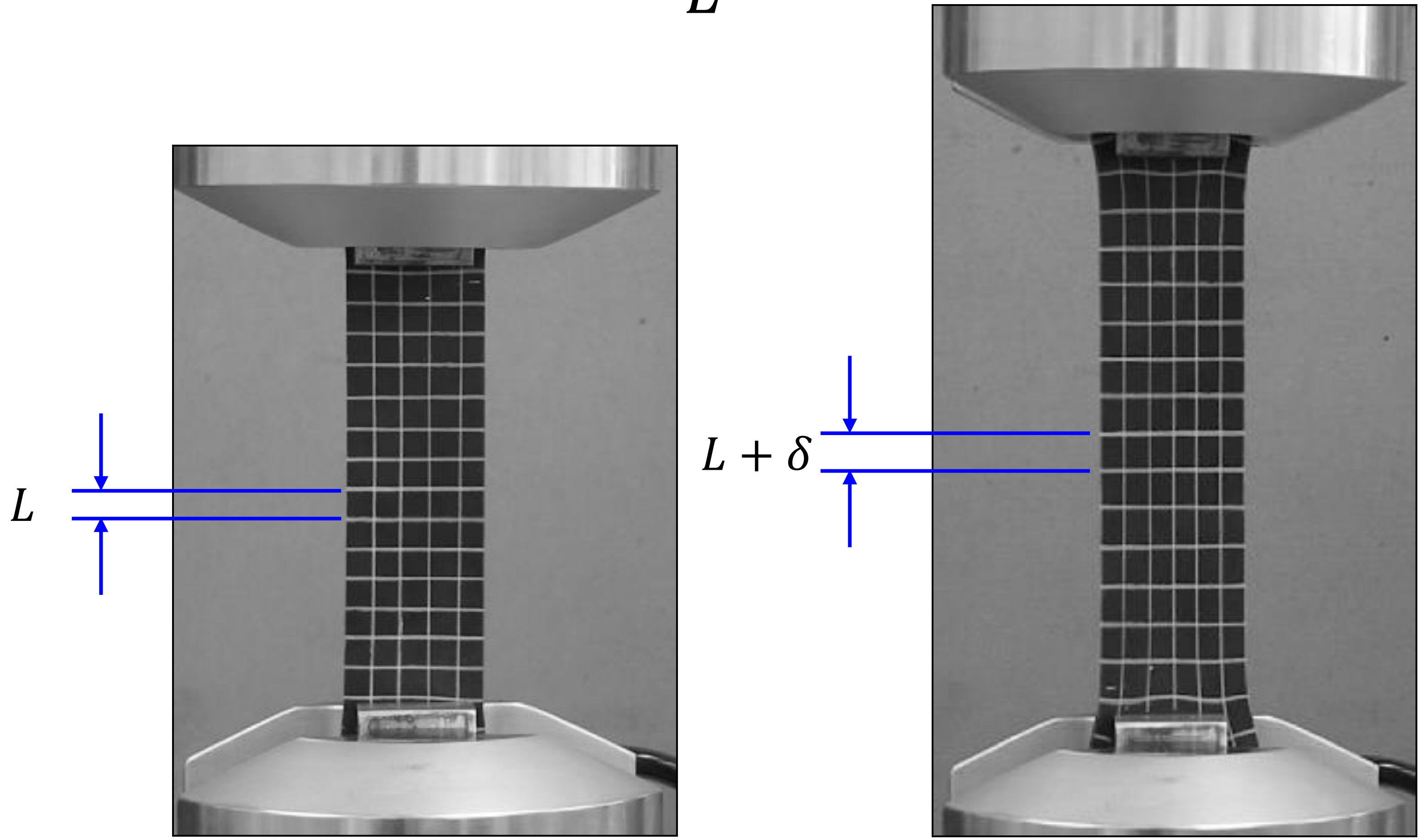
(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

14. Dehnung – Normal & Scher

DEHNUNG

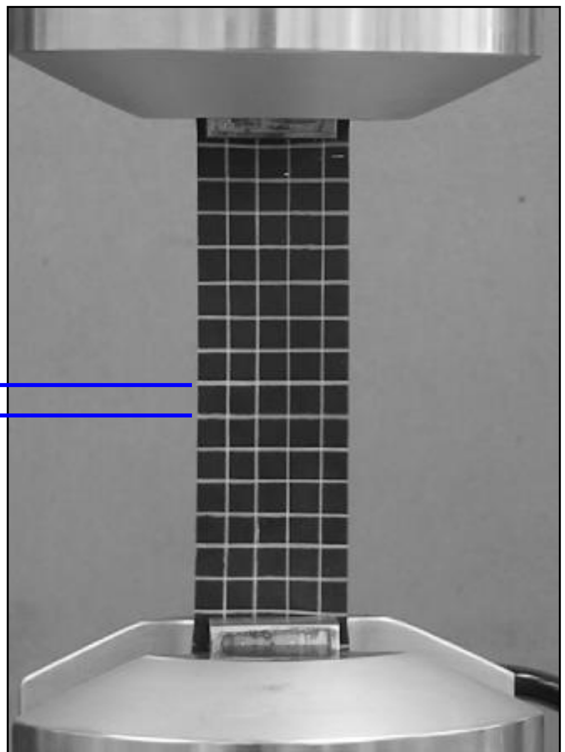
- Normaldehnung $\varepsilon = \dfrac{\delta}{L}$



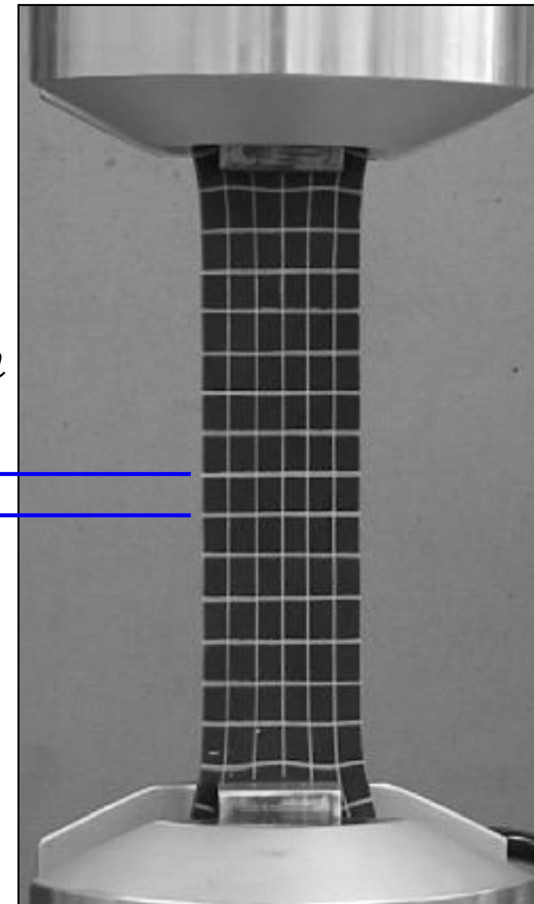
DEHNUNG

- Normaldehnung $\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1mm}{10mm} = 0{,}1 = 10\%$

$L = 10mm$

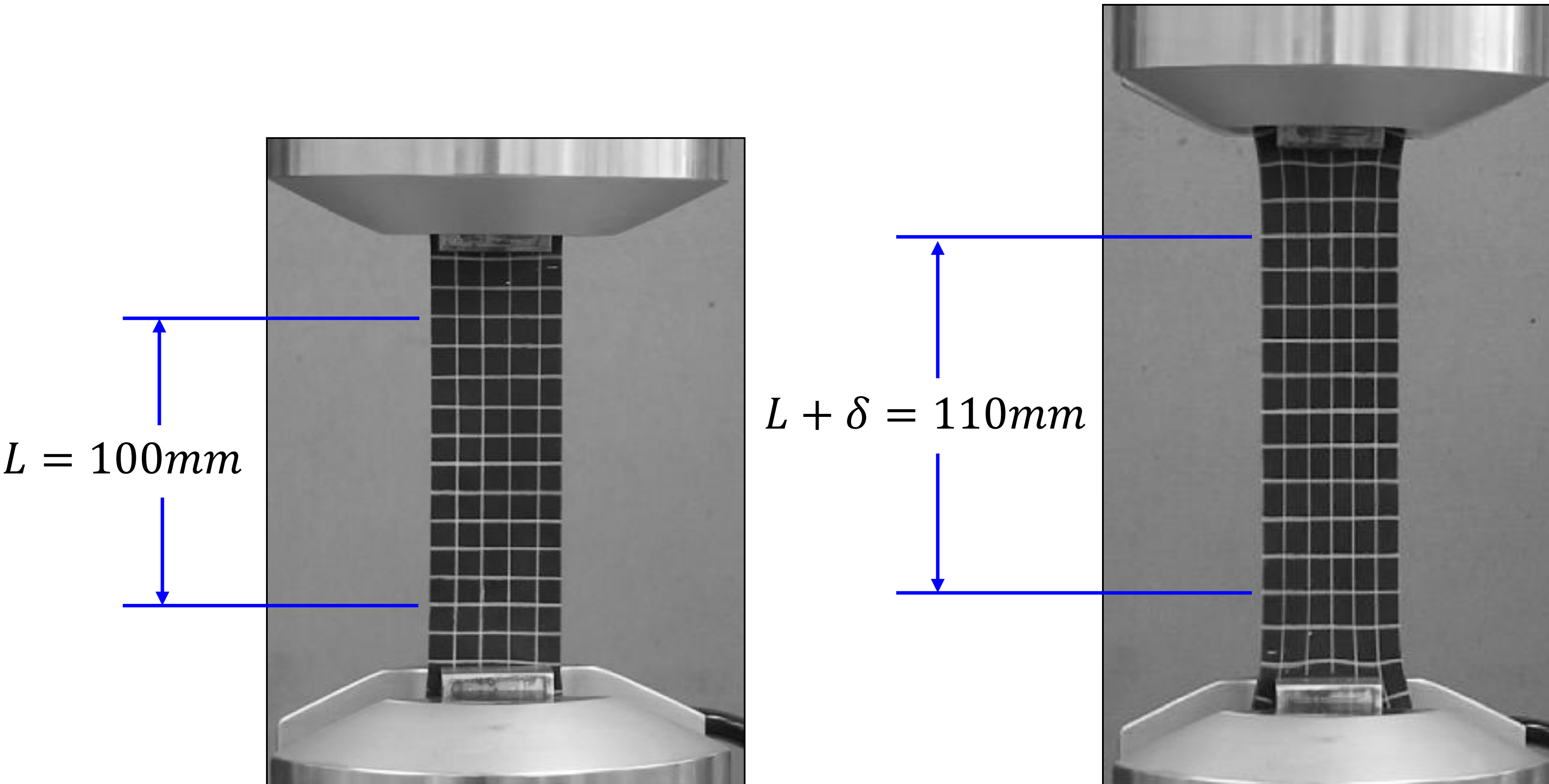


$L + \delta = 11mm$

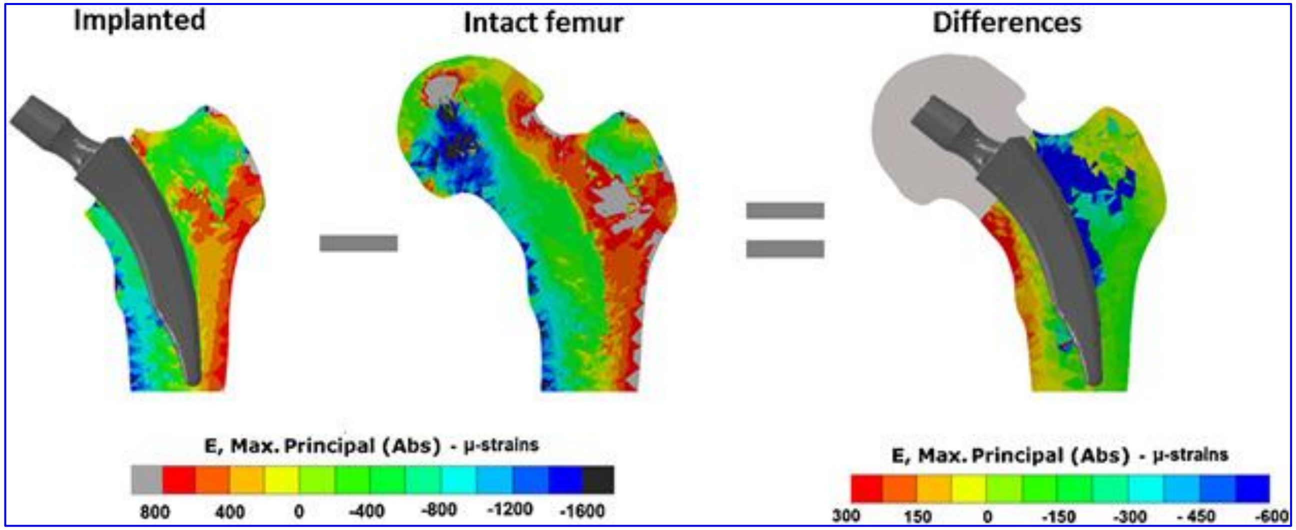


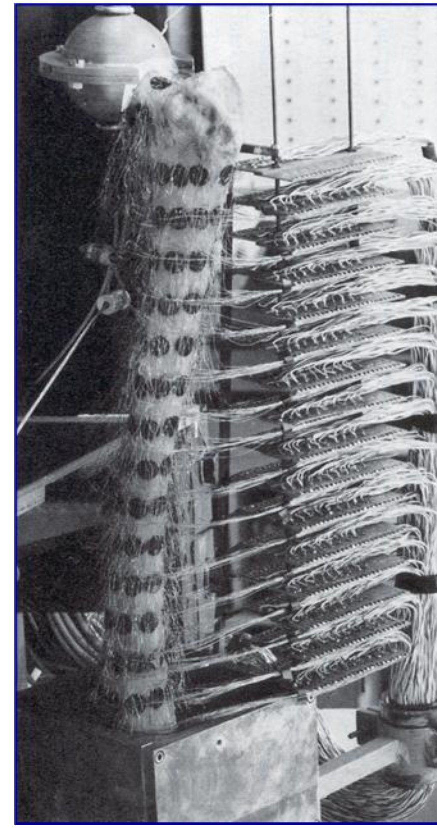
DEHNUNG

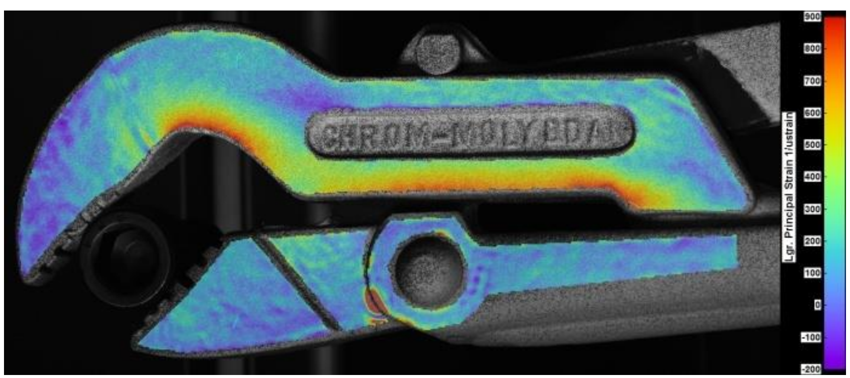
- Normaldehnung $\varepsilon = \dfrac{\delta}{L} = \dfrac{10mm}{100mm} = 0{,}1 = 10\%$

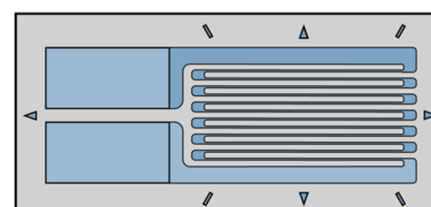


DEHNUNG als Feldvariabel





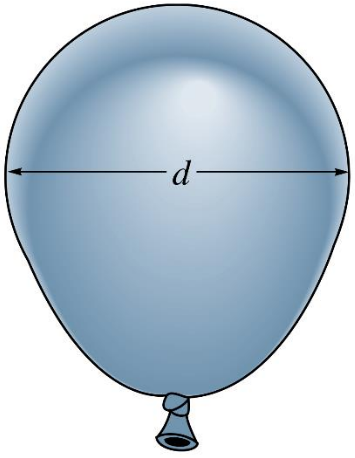




QUIZ

1) Der mittlere Teil einer Luftballon hat einen Durchmesser von d = 100 mm. Mit steigendem Luftdrück wird d = 125mm. Welchen mittlere Noramaldehnung wirkt im Gummi.

A) 0,2
B) 0,25 π
C) 0,25
D) 1,25



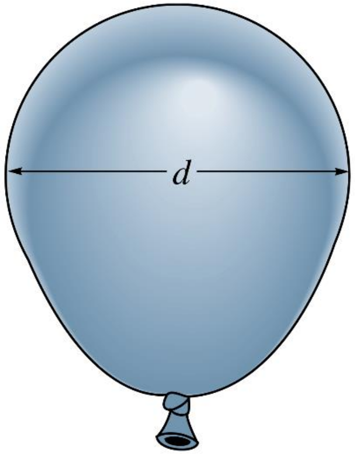
2) Welchen Einheit hat Dehnung

A) mm
B) mm/mm
C) µm
D) keine
E) %

QUIZ

1) Der mittlere Teil einer Luftballon hat einen Durchmesser von d = 100 mm. Mit steigendem Luftdrück wird d = 125mm. Welchen mittlere Noramaldehnung wirkt im Gummi.

A) 0,2 B) 0,25 π
C) 0,25 D) 1,25



2) Welchen Einheit hat Dehnung

A) mm B) mm/mm
C) µm D) keine
E) %

QUIZ

1) Einheiten für E-Modul sind ?

A) kN/mm^2
B) MPa
C) GPa
D) Alle

2) Querkontraktionszahl v liegt normalerwiese zwischen:

A) $0 \leq v \leq 1$
B) $0 \leq v \leq 0{,}5$
C) $-1 \leq v \leq 1$
D) $-0{,}5 \leq v \leq 0{,}5$

QUIZ

1) Einheiten für E-Modul sind ?

A) kN/mm^2

B) MPa

C) GPa

D) $\boxed{\text{Alle}}$

2) Querkontraktionszahl v liegt normalerweise zwischen:

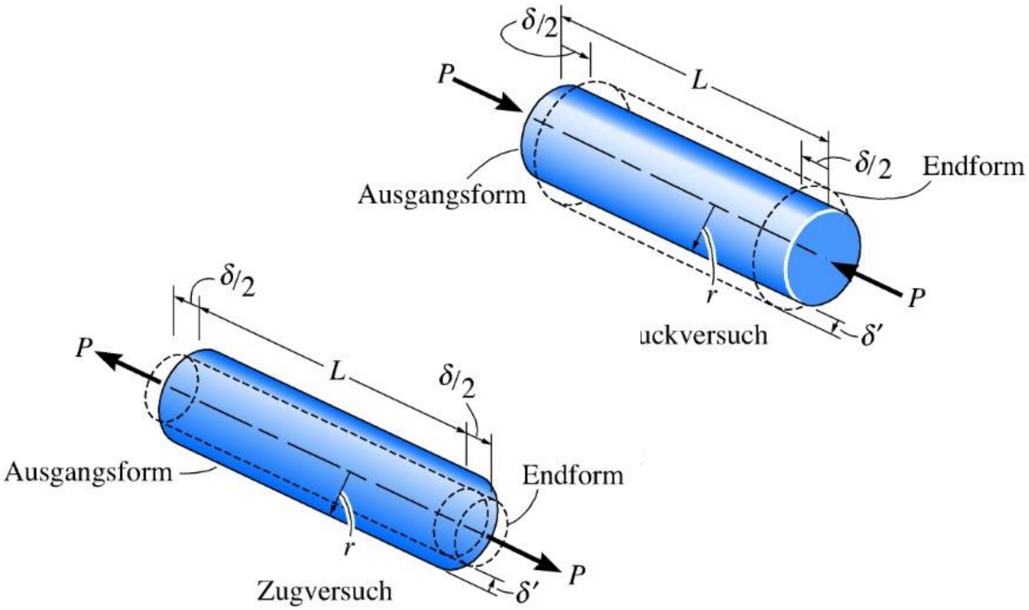
A) $\boxed{0 \leq v \leq 1}$

B) $0 \leq v \leq 0{,}5$

C) $-1 \leq v \leq 1$

D) $-0{,}5 \leq v \leq 0{,}5$

DEHNUNG



$$\varepsilon_{\text{axial}}[\text{-}] = \frac{\delta[mm]}{L[mm]}$$

ε : Dehnung (axial) [-]

δ : Verlängerung (axial) [mm]

L : Länge (axial) [mm]

$$\varepsilon_{\text{radial}}[\text{-}] = \frac{\delta'[mm]}{r[mm]}$$

ε : Dehnung (radial) [-]

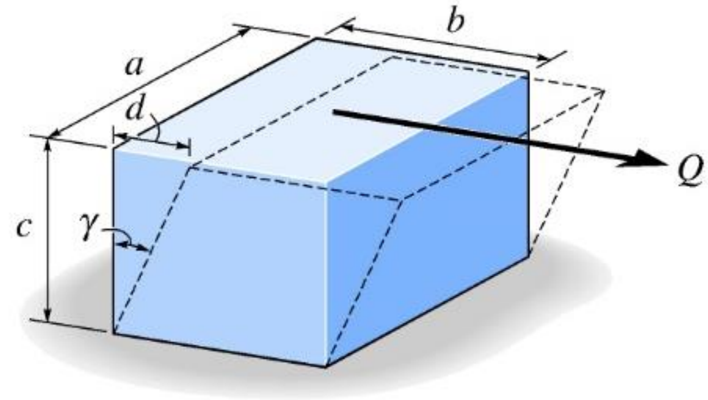
δ' : Verlängerung (radial) [mm]

r : Radius (quer) [mm]

$$\nu[-] = -\frac{\varepsilon_{radial}[-]}{\varepsilon_{axial}[-]}$$

ν : Querkontraktionszahl [-]

GLEITUNG



$$\gamma\ [\text{-}] = tan^{-1}\frac{d[mm]}{c[mm]} \approx \frac{d[mm]}{c[mm]}$$

γ: Mittlere Gleitung [-]

d: Gleitweg[mm]

c: Höhe [mm]

DEHNUNG

Gegeben: Axiale Dehnung ε_{axial} = 2% und Querkontraktionszahl ν = 0,3

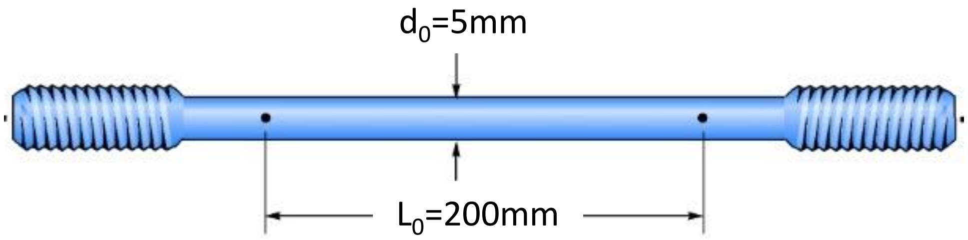
Gegeben: Länge L_0 und Durchmesser d_0

Rechnen Sie die gedehnte Länge L' und gedehnte Durchmesser d'

$$\varepsilon_{axial}[-] = \frac{\delta_{axial}[mm]}{L_0[mm]}$$

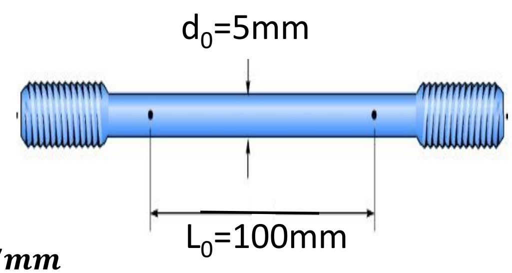
$$\varepsilon_{radial}[-] = \frac{\delta_{radial}[mm]}{d_0[mm]}$$

$$\nu[-] = -\frac{\varepsilon_{radial}[-]}{\varepsilon_{axial}[-]}$$



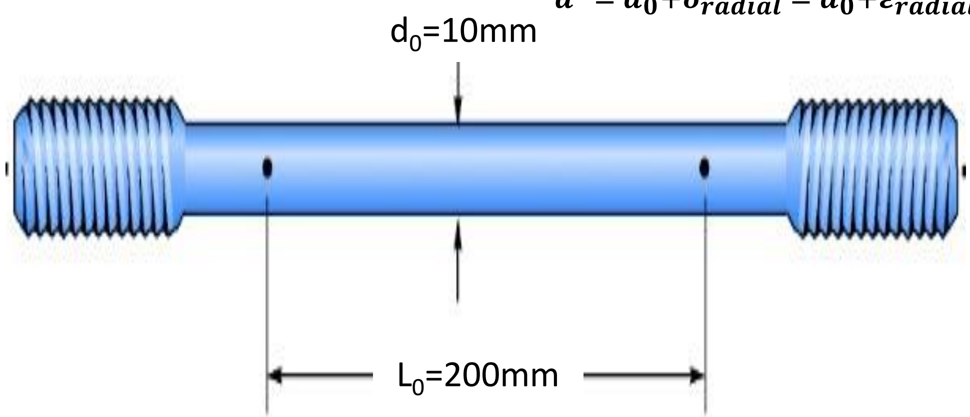
$$L' = L_0+\delta_{axial} = L_0+\varepsilon_{axial}\cdot L_0 = 200mm+0{,}02\times200mm = 204mm$$

$$d' = d_0+\delta_{radial} = d_0+\varepsilon_{radial}\cdot d_0 = d_0-\nu\cdot\varepsilon_{axial}\cdot d_0 = 5mm-0{,}3\times0{,}02\times5mm = 4{,}97mm$$



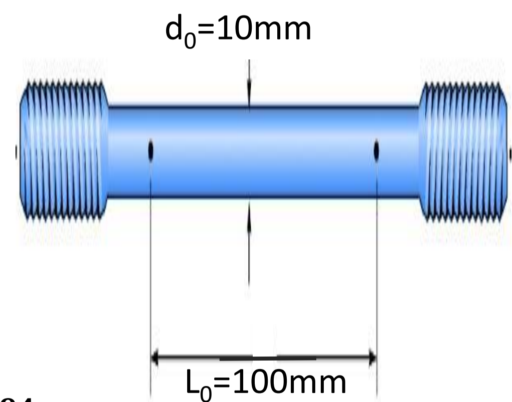
$$L' = L_0+\delta_{axial} = L_0+\varepsilon_{axial}\cdot L_0 = 100mm+0{,}02\times100mm = 102mm$$

$$d' = d_0+\delta_{radial} = d_0+\varepsilon_{radial}\cdot d_0 = d_0-\nu\cdot\varepsilon_{axial}\cdot d_0 = 5mm-0{,}3\times0{,}02\times5mm = 4{,}97mm$$



$$L' = L_0+\delta_{axial} = L_0+\varepsilon_{axial}\cdot L_0 = 200mm+0{,}02\times200mm = 204mm$$

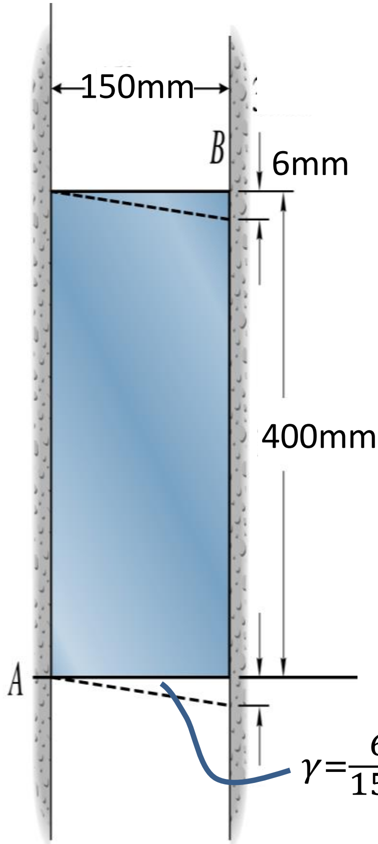
$$d' = d_0+\delta_{radial} = d_0+\varepsilon_{radial}\cdot d_0 = d_0-\nu\cdot\varepsilon_{axial}\cdot d_0 = 10mm-0{,}3\times0{,}02\times100mm = 9{,}94mm$$



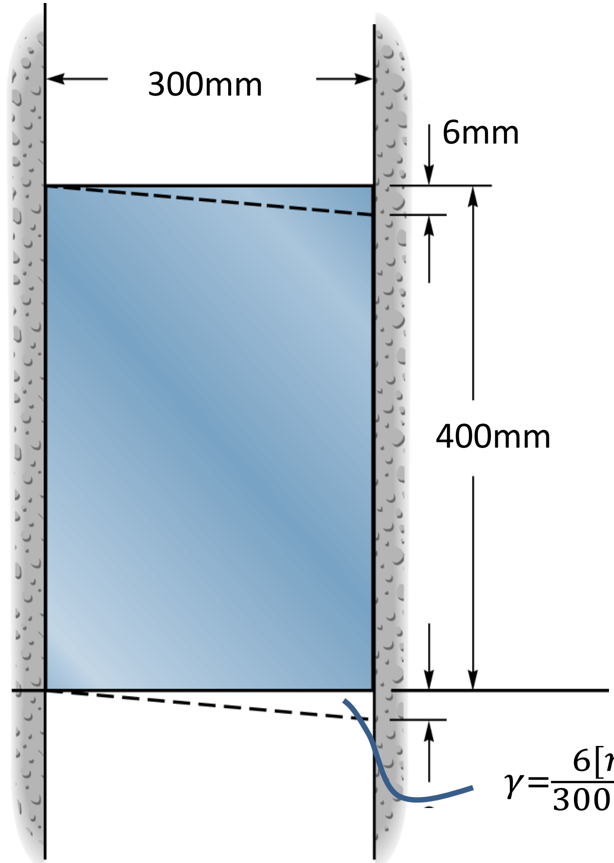
$$L' = L_0+\delta_{axial} = L_0+\varepsilon_{axial}\cdot L_0 = 100mm+0{,}02\times100mm = 102mm$$

$$d' = d_0+\delta_{radial} = d_0+\varepsilon_{radial}\cdot d_0 = d_0-\nu\cdot\varepsilon_{axial}\cdot d_0 = 10mm-0{,}3\times0{,}02\times100mm = 9{,}94mm$$

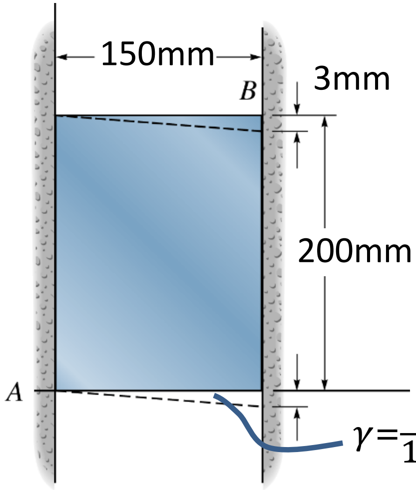
GLEITUNG



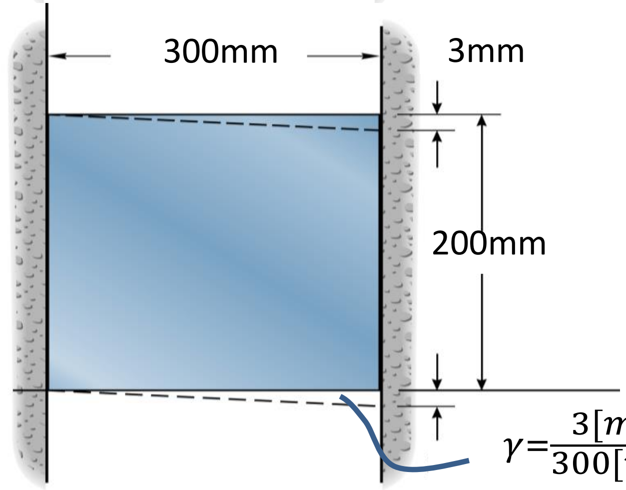
$$\gamma = \frac{6[mm]}{150[mm]} = 0{,}04 = 4\%$$



$$\gamma = \frac{6[mm]}{300[mm]} = 0{,}02 = 2\%$$



$$\gamma = \frac{3[mm]}{150[mm]} = 0{,}02 = 2\%$$



$$\gamma = \frac{3[mm]}{300[mm]} = 0{,}01 = 1\%$$

Wichtige Punkte

- Äußere Lasten verursachen bei materiellen Körpern eine Verformung. Demzufolge erfahren die Punkte im Körper eine *Verschiebung*, und es kommt zu *Längen- und Winkeländerungen*.
- Die *Dehnung* ist ein Maß der Verlängerung oder Verkürzung eines kleinen Linienelements in dem Körper, die *Gleitung* dagegen ist ein Maß für die Änderung des Winkels, der zwischen zwei ursprünglich senkrecht aufeinander stehenden Linienelementen vorliegt.
- Der Verzerrungszustand in einem Punkt wird durch sechs Verzerrungskoordinaten charakterisiert: drei Dehnungen, ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z, und drei Gleitungen, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz}. Diese Größen hängen von der Orientierung der Liniensegmente und ihrer Position im Körper ab.
- Verzerrungen sind geometrische Größen, die durch experimentelle Untersuchungen gemessen werden. Sind diese erst einmal bekannt, können danach die Spannungen im Körper aus den verknüpfenden Materialgesetzen ermittelt werden.
- Bei den meisten Konstruktionswerkstoffen treten nur kleine Verzerrungen auf; somit sind Dehnung und Gleitung sehr klein. Diese Annahmen der „Theorie kleiner Verzerrungen" erlauben beispielsweise eine vereinfachte Berechnung der Dehnung, weil Näherungen erster Ordnung hinsichtlich ihrer Größe getroffen werden können.

Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

15. Zug & Druck, Hooke'sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

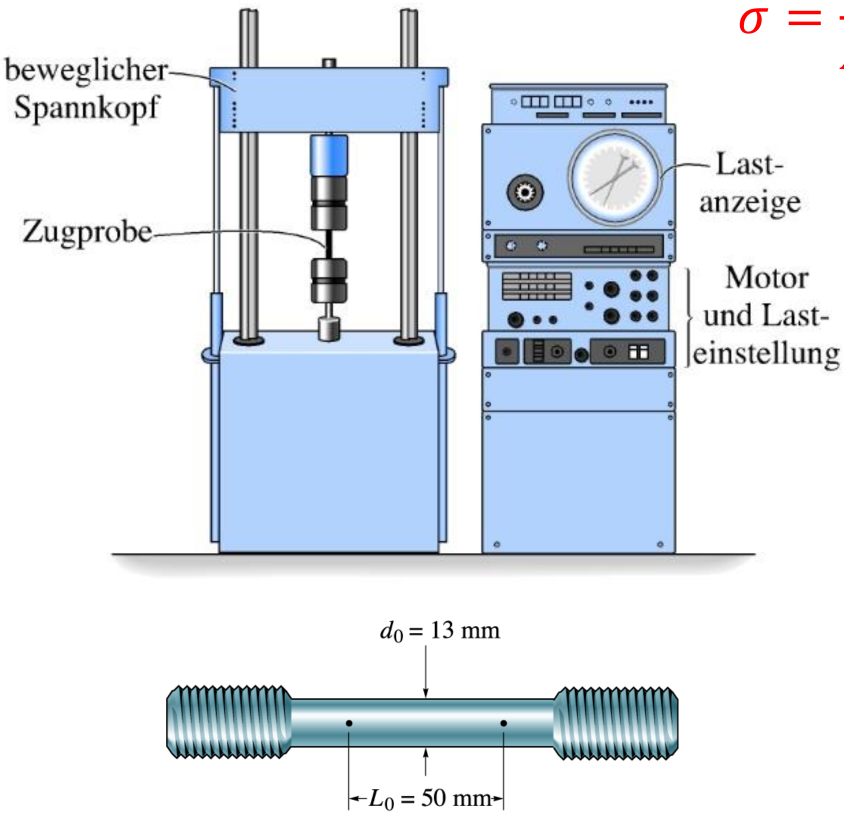
Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton'schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

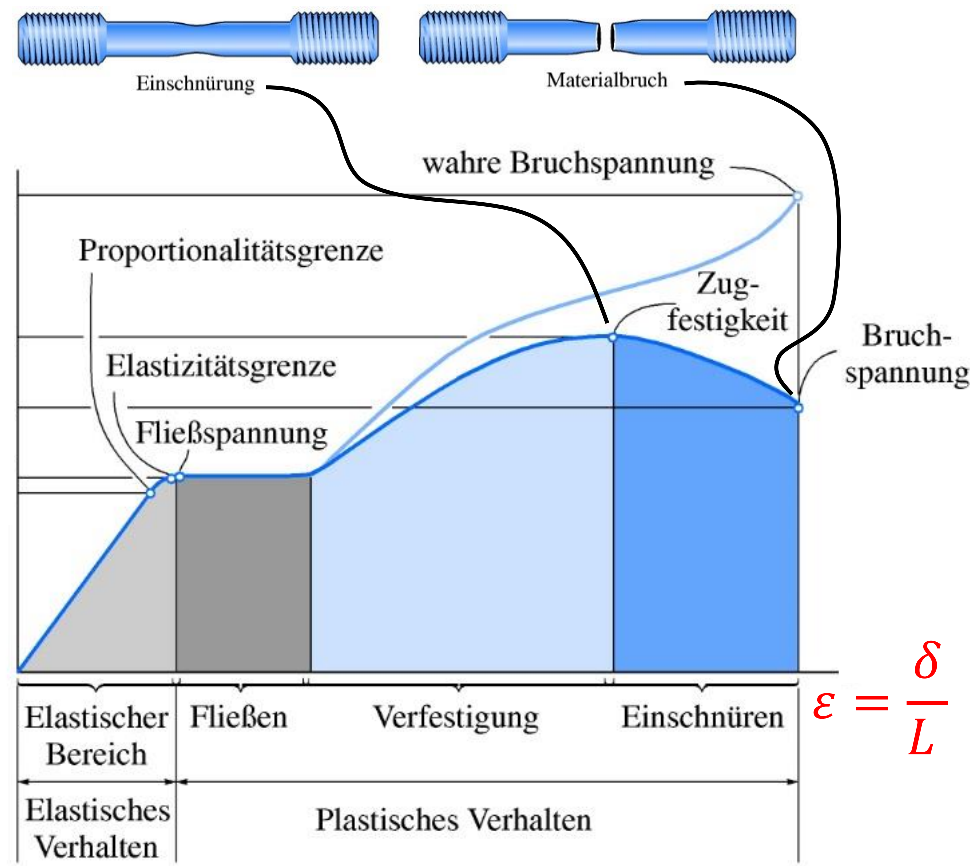
Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke'sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

SPANNUNGS-DEHNUNGS-VERHALTEN MESSUNGEN (ZUG / DRÜCK)



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

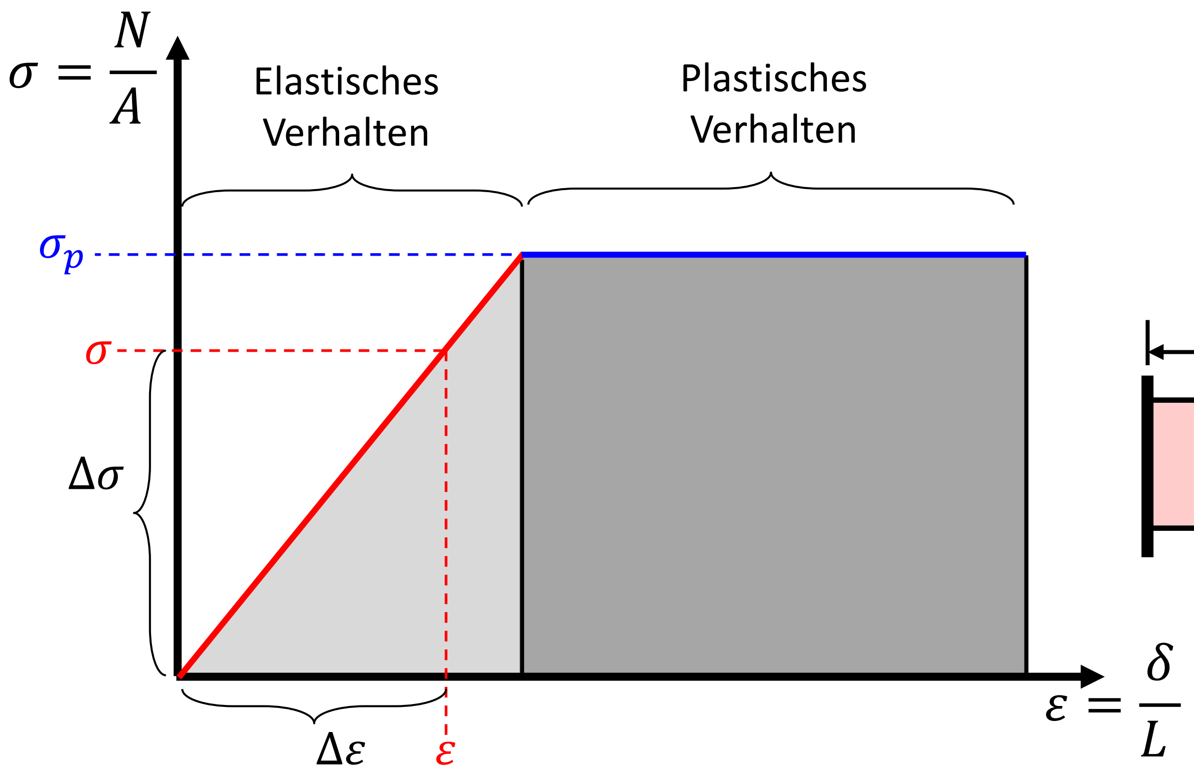


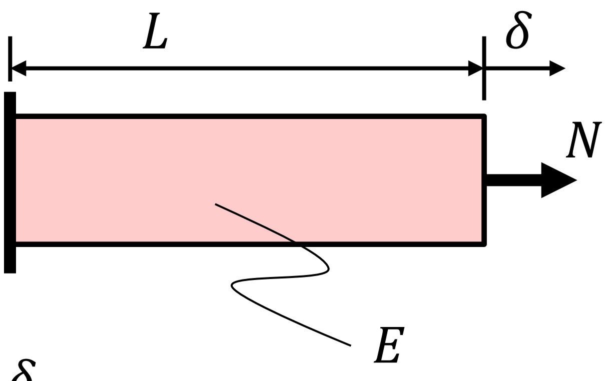
$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

Konventionelles und wahres Spannungs-Dehnungs-Diagramm für duktiles Material (Stahl), nicht maßstabsgerecht

SPANNUNG-DEHNUNG-DIAGRAM
Vereinfacht

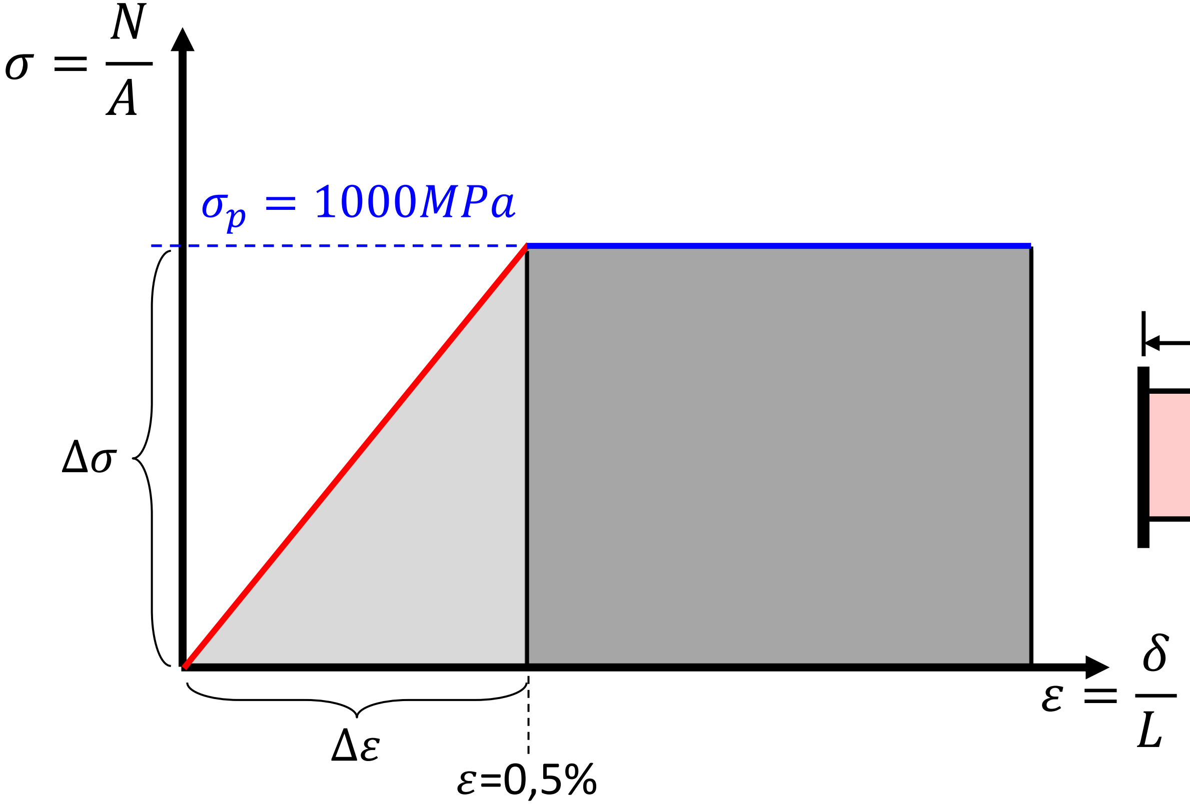
- Elastizitätsmodul (Hooke'sche Gesetz) $E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$
- Elastische Bereich
- E-Modul: Beschreibt Materialsteifigkeit

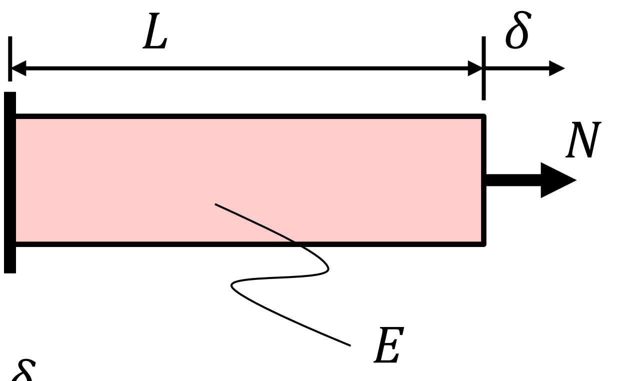


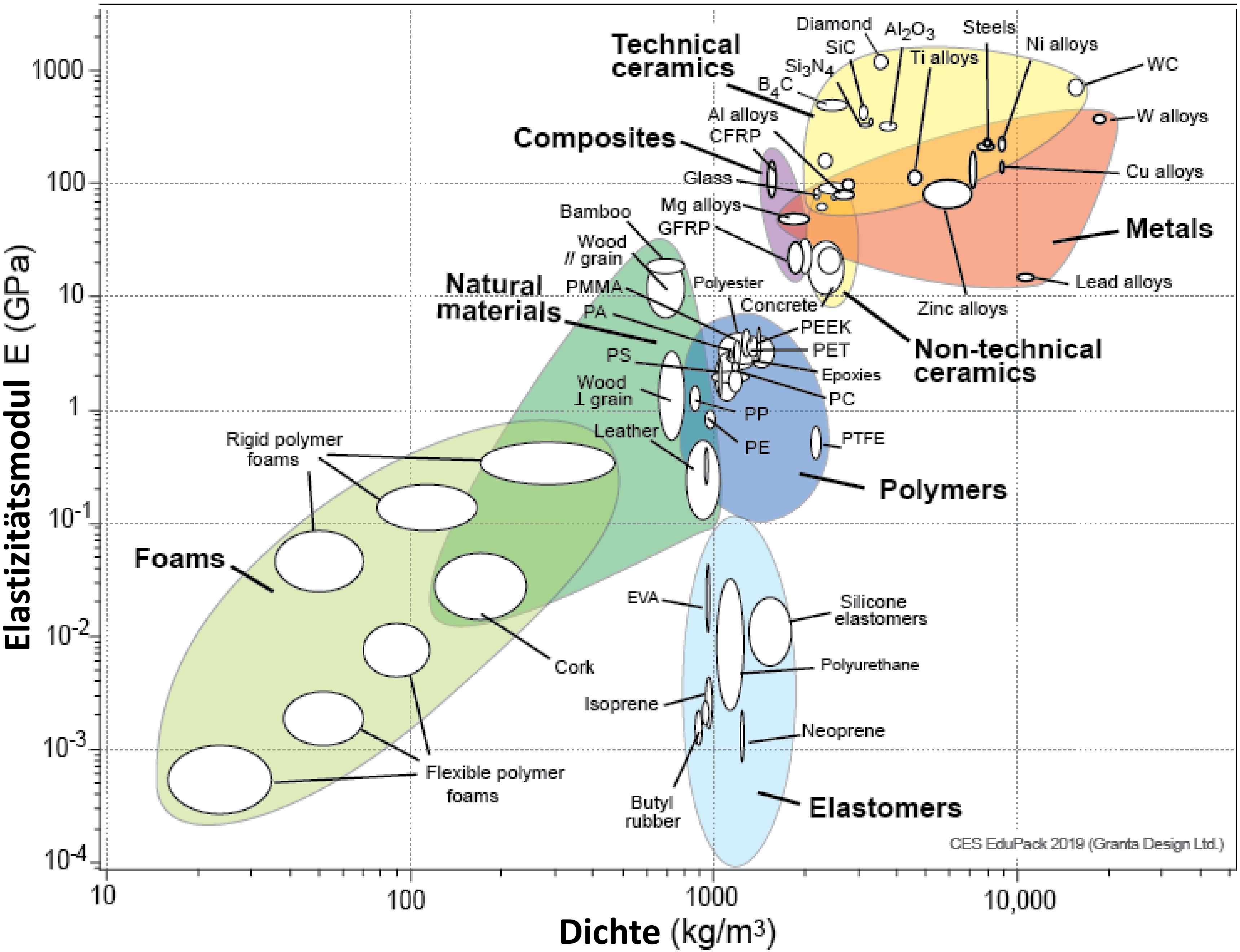


SPANNUNG-DEHNUNG-DIAGRAM

- Elastizitätsmodul $E = \dfrac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \dfrac{1000MPa}{0{,}005} = 200GPa$

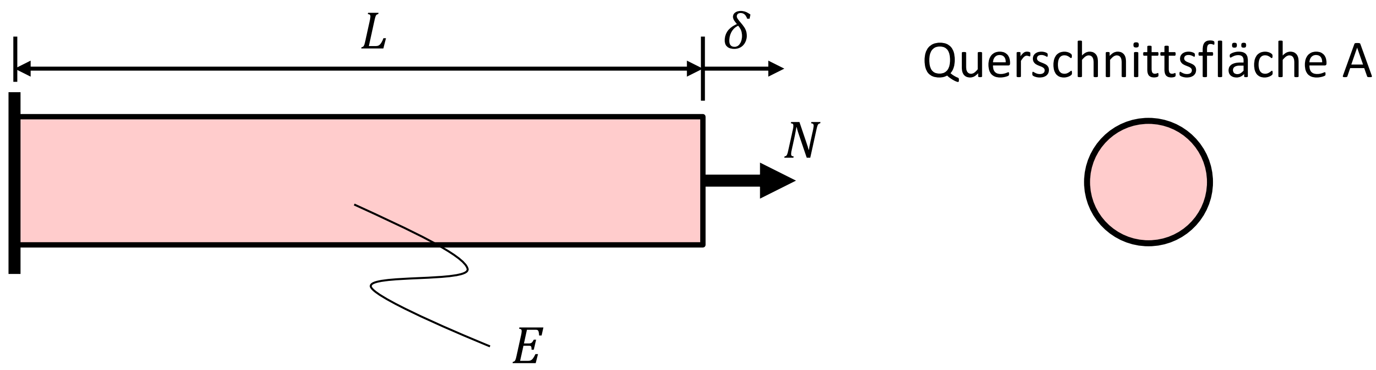






Technical ceramics
Diamond
Al_2O_3
Steels
Ni alloys
SiC
Si_3N_4
Ti alloys
WC
B_4C
Al alloys
W alloys
CFRP
Composites
Glass
Cu alloys
Mg alloys
Bamboo
GFRP
Metals
Wood // grain
Polyester
Lead alloys
Natural materials
PMMA
Concrete
Zinc alloys
PA
PEEK
PET
Non-technical ceramics
PS
Epoxies
Wood ⊥ grain
PC
PP
Leather
PE
PTFE
Rigid polymer foams
Polymers
Foams
EVA
Silicone elastomers
Cork
Polyurethane
Isoprene
Neoprene
Flexible polymer foams
Butyl rubber
Elastomers
CES EduPack 2019 (Granta Design Ltd.)
Elastizitätsmodul E (GPa)
1000
100
10
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10
100
1000
10,000
Dichte (kg/m³)

Elastizitätsmodul



Elastizitätsmodul

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{N/A}{\delta/L} = \frac{N \cdot L}{\delta \cdot A}$$

N/m² ≡ 1 Pa (Pascal)

E: E-Modul [N/m²] oder [Pa]

σ: Normal-Spannung [N/m²] oder [Pa] $\sigma = F/A$

ε: Normal-Dehnung [-] $\varepsilon = \delta/L$

N: Normalkraft [N]

L: Länge (Unverformt) [m]

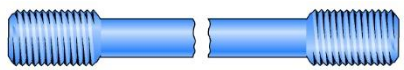
A: Querschnittsfläche [m²]

δ: Verformung (axial) [m]

SPANNUNGS-DEHNUNGS- DIAGRAM

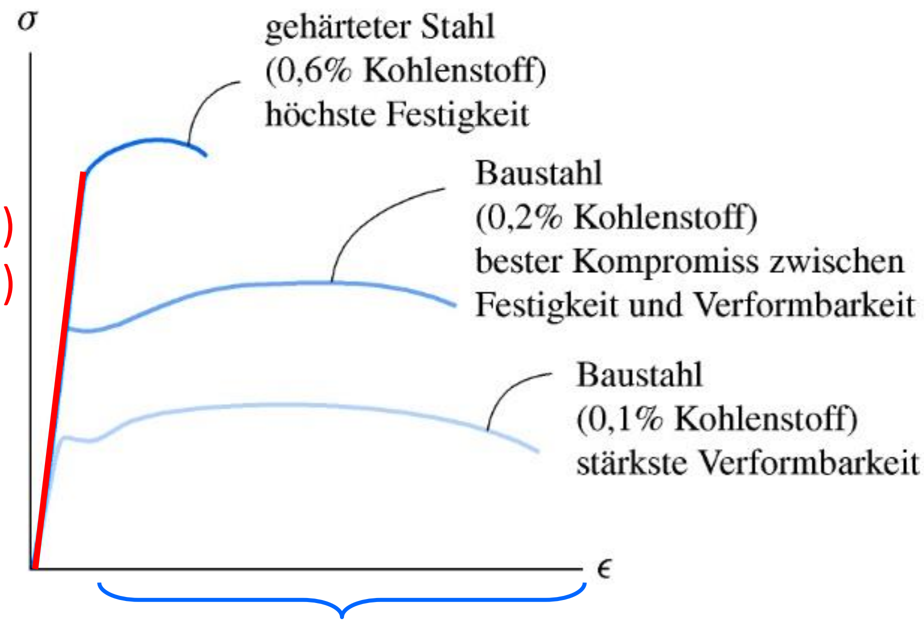
STAHL: Steifigkeit / Festigkeit

Spröde (Wenig Plastische Verformung)

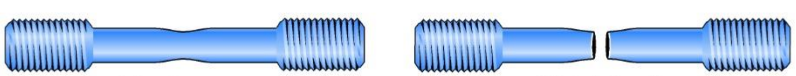


Versagen eines spröden Materials
durch Zugbeanspruchung

E-Modul (Steigung)
(bleibt konstant)



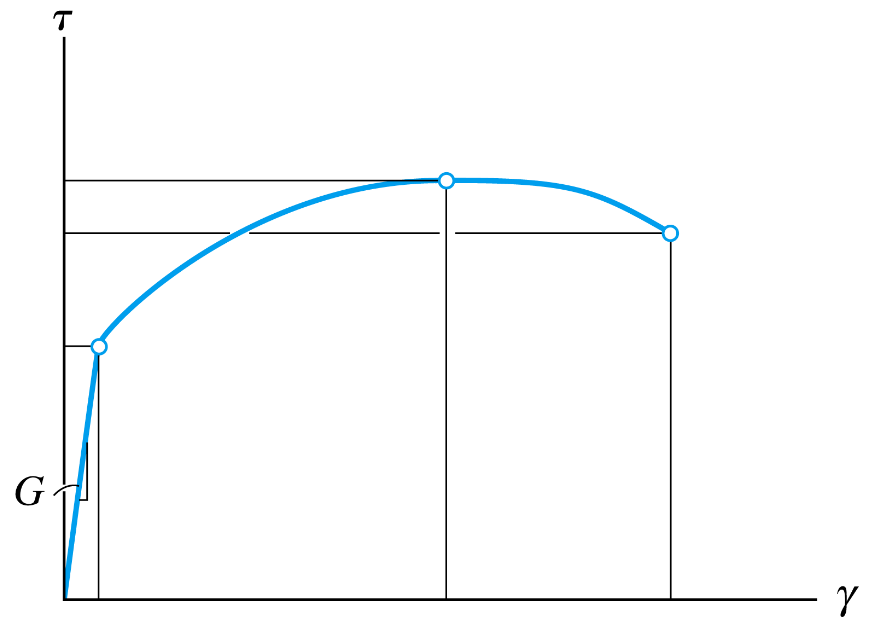
Duktil (Plastische Verformung)

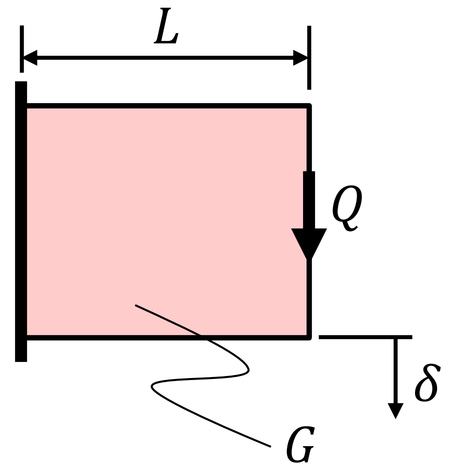


Einschnürung
(a)

Materialbruch
(b)

SCHUBSPANNUNGS-GLEITUNGS-DIAGRAM





Elastische Schubmodul

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

G: Schubmodul [N/m^2] oder [Pa]

τ: Schubspannung [N/m^2] oder [Pa]

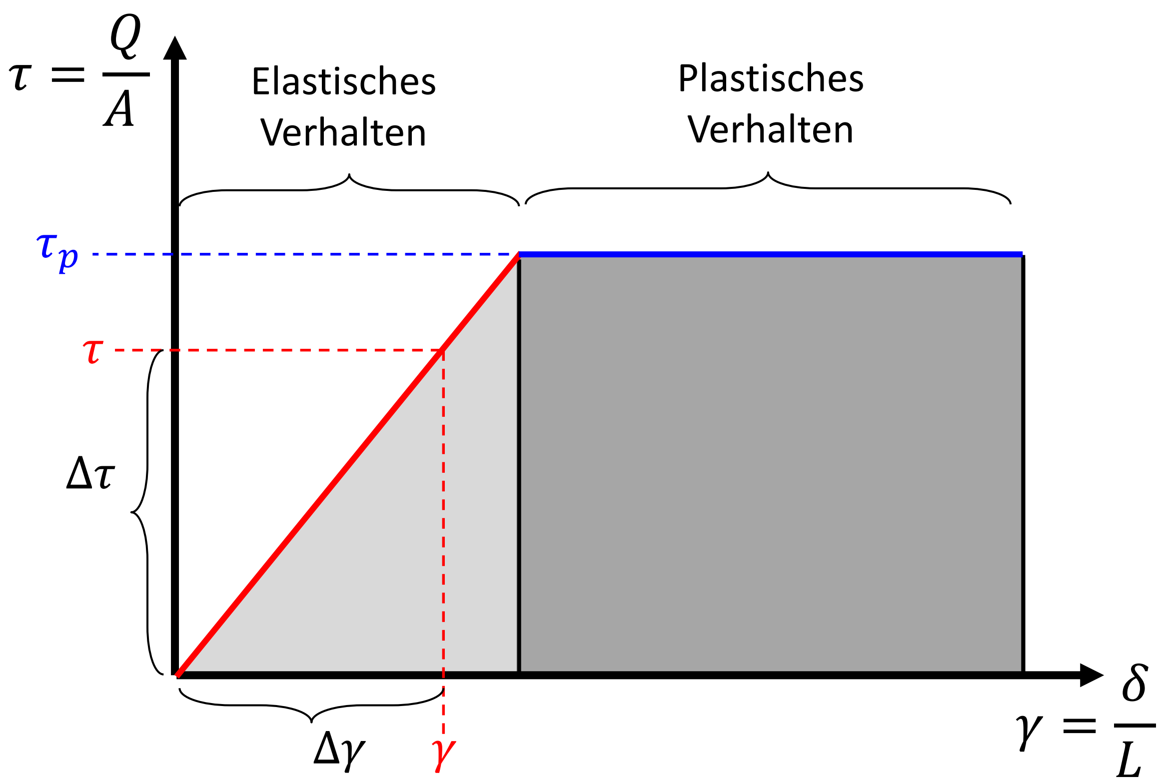
γ: Gleitung [-]

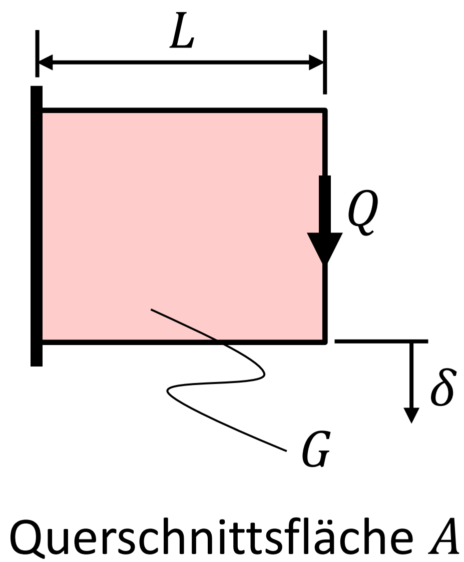
N/m^2 ≡ 1 Pa (Pascal)

SPANNUNG-DEHNUNG-DIAGRAM Vereinfacht

- Schubmodul (Hooke'sche Gesetz)
- Elastische Bereich
- G-Modul: Beschreibt Materialsteifigkeit

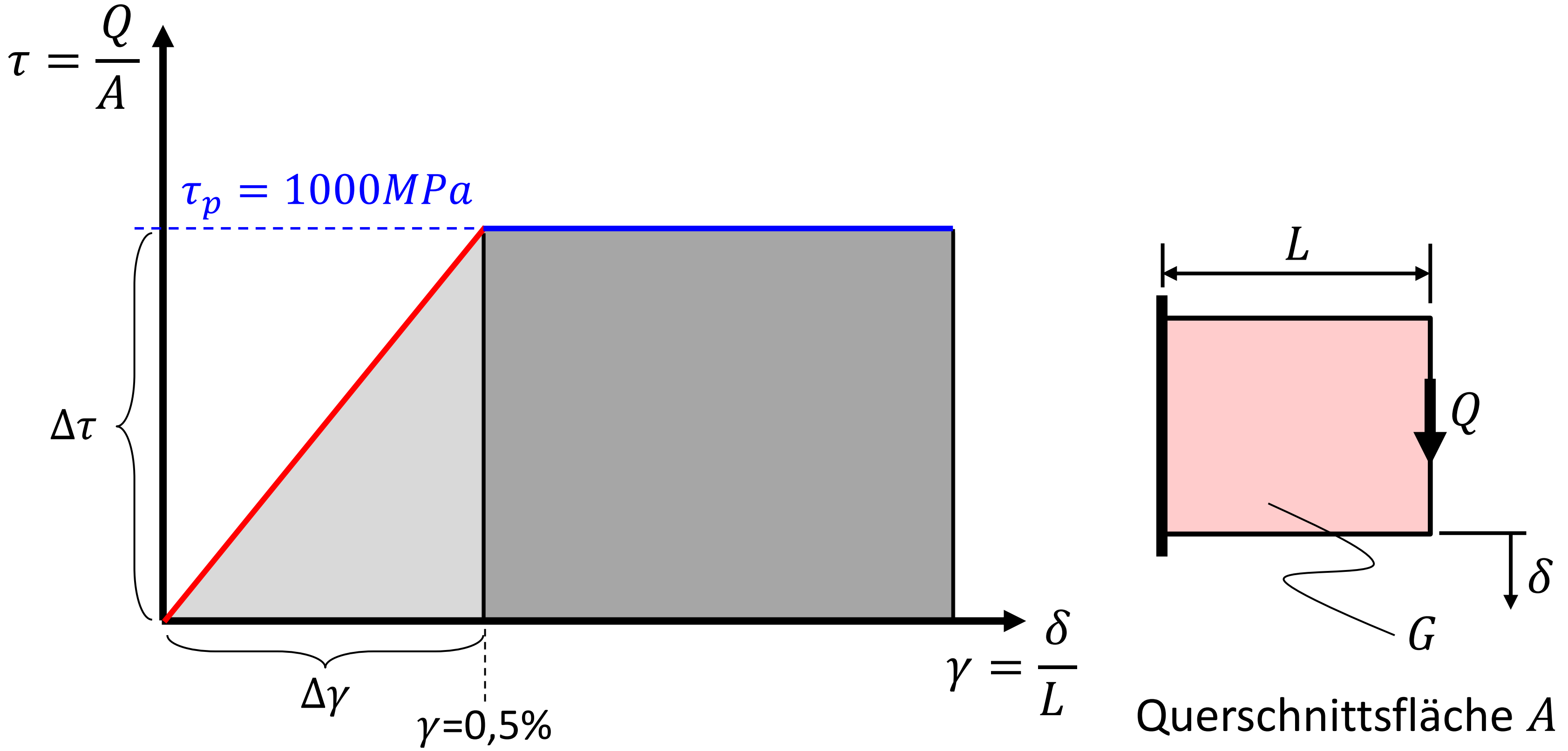
$$G = \frac{\Delta\tau}{\Delta\gamma} = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{Q/A}{\delta/L} = \frac{Q \cdot L}{\delta \cdot A}$$





SPANNUNG-DEHNUNG-DIAGRAM
Vereinfacht

- Schubmodul $$G = \frac{\Delta\tau}{\Delta\gamma} = \frac{500MPa}{0{,}005} = 100GPa$$



Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

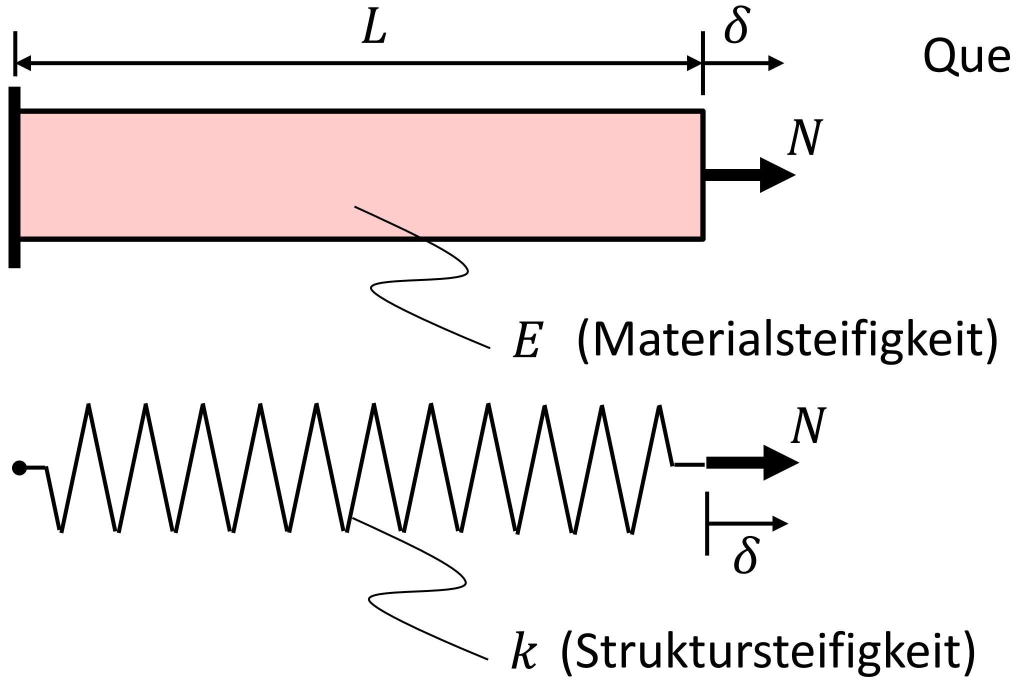
Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton’schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

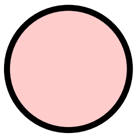
Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke’sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

Struktursteifigkeit, $\boldsymbol{k = N/\delta}$



Querschnittsfläche A

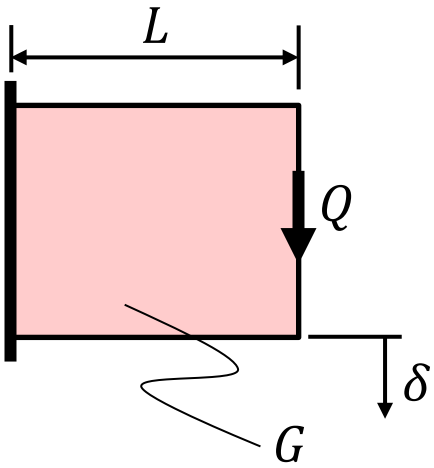


Struktursteifigkeit $\boldsymbol{k[N/m] = F/\delta}$

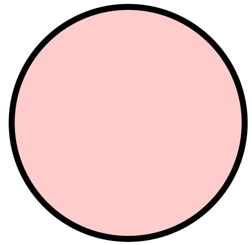
$$E = \frac{F \cdot L}{\delta \cdot A}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{k} = \overbrace{\frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{\delta}}}^{\textbf{Struktursteifigkeit}} = \underbrace{\boldsymbol{E}}_{\textbf{Materialsteifigkeit}} \cdot \frac{\overbrace{\boldsymbol{A}}^{\textbf{Geometrie}}}{\boldsymbol{L}}$$

Sher-steifigkeit & -verformung



Querschnittsfläche A



$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{Q/A}{\delta/L} = \frac{Q \cdot L}{\delta \cdot A}$$

$$\underbrace{\frac{Q}{\delta}}_{\text{Struktursteifigkeit (Scherung)}} [N/m] = \overbrace{G}^{\text{Materialsteifigkeit}} \cdot \underbrace{\frac{A}{L}}_{\text{Geometrie}}$$

G: Schermodul [N/m^2] oder [Pa]

Q: Quer-Spannung [N/m^2] oder [Pa] $\quad \tau = Q/A$

γ: Normal-Dehnung [-] $\quad \gamma = \delta/L$

Q: Querkraft [N]

L: Länge [m]

A: Querschnittsfläche [m^2]

δ: Verformung (quer) [m]

N/m^2 ≡ 1 Pa (Pascal)

Technische Mechanik I

(Lehrbuch Hibbeler)

N. Bishop
HAW Hamburg

17. Steifigkeit & Verformung – Biegung

LERNINHALTE TECHNISCHE MECHANIK 1

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 1: Statik [Kapitel]

1. Lerninhalte Technische Mechanik
2. Mechanik, Newton’schen Gesetze, Axiome der Statik [1,2]
3. Einheiten, Berechnungen, Lösungen [1,2]
4. Vektore
5. Zentrale Kräftesysteme [3]
6. Moment [4]
7. Statische Bestimmtheit und Gleichgewichtsbedingungen [5]
8. Schwerpunkt [4]
9. Linien- und Flächenlasten [4]
10. Freischneiden und Schnittgrößen [6,7]
11. Moment, Querkraft und Normalkraftverlauf in Balken

Hibbeler. Technische Mechanik Buch 2: Festigkeit [Kapitel]

12. Spannung und Festigkeit – Normal & Scher [1]
13. Spannung und Festigkeit – Biegung [7,5]
14. Dehnung – Normal & Scher [2]
15. Zug & Druck, Hooke’sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm [3]
16. Steifigkeit & Verformung – Normal & Scher [6,7]
17. Steifigkeit & Verformung – Biegung [7,8]

Biegeverformung

- Balkenelement biegt mit Winkel θ.
- Neutrale Faser x behält ihre Länge bei.
- Faser s in Abstand y von x verändert ihre Länge...

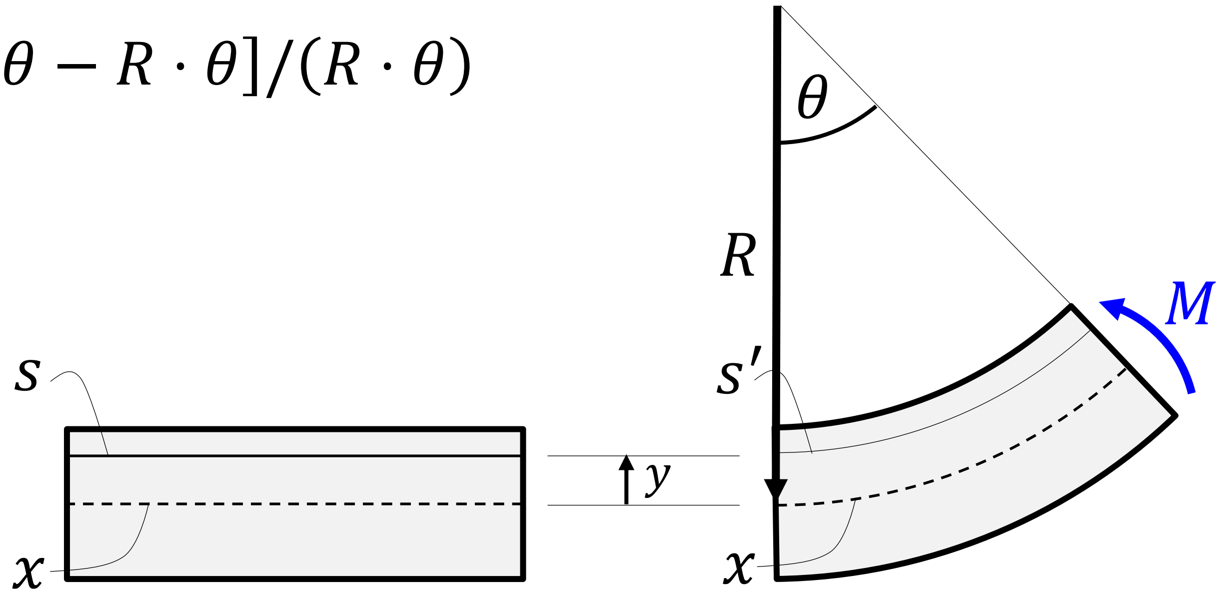
$$s = x \quad \text{in} \quad s' = (R - y) \cdot \theta$$

- Die zugehörige Längsdehnung beträgt:

$$\varepsilon = (s' - s)/s$$

$$\Rightarrow \varepsilon = [(R - y) \cdot \theta - R \cdot \theta]/(R \cdot \theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon = -\frac{y}{R}}$$



Biegeverformung

- Balkenelement biegt mit Winkel θ.
- Neutrale Faser ------- behält ihre Länge L bei.
- Faser s in Abstand y von der neutralen Faser verändert ihre Länge...

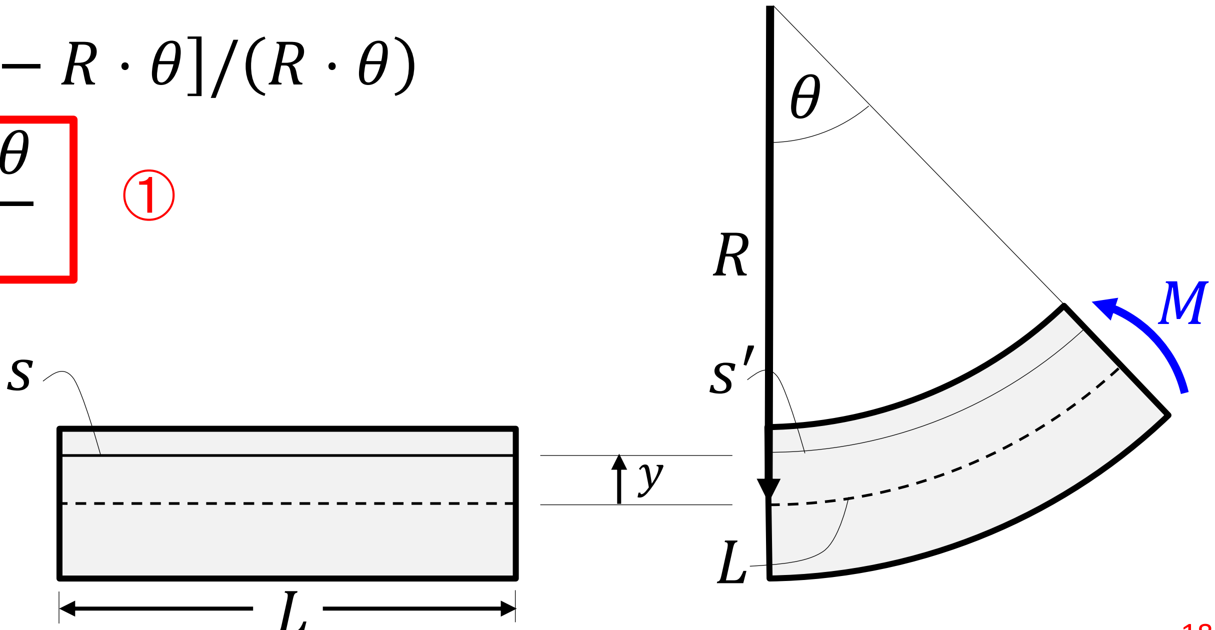
$$s = L = R \cdot \theta \quad \text{in} \quad s' = (R - y) \cdot \theta$$

- Die zugehörige Längsdehnung beträgt:

$$\varepsilon = (s' - s)/s$$

$$\Rightarrow \varepsilon = [(R - y) \cdot \theta - R \cdot \theta]/(R \cdot \theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon = -\frac{y}{R} \underset{L = R \cdot \theta}{=} -\frac{y \cdot \theta}{L}} \quad ①$$



Biegesteifigkeit

M: Moment im Balken [Nm]
E: Elastizitätsmodul [N/m²]
I: Flächenträgheitsmoment [m⁴] (Querschnittsfläche)
L: Unverformte Länge [m]
θ: Biegewinkel [Rad]

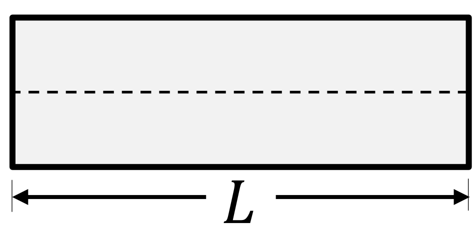
- Längsdehnung: $$\varepsilon = -\frac{y \cdot \theta}{L} \quad ①$$
- Hooke'sche Gesetz: $$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad ②$$

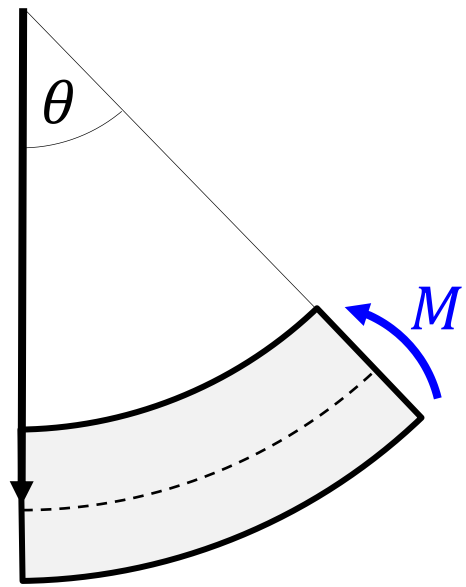
① in ② ergibt: $$\sigma = -\frac{E \cdot y \cdot \theta}{L} \quad ③$$

- Biegespannungsformel: $$\sigma = -\frac{M . y}{I} \quad ④$$

③ in ④ ergibt: $$-\frac{E \cdot y \cdot \theta}{L} = -\frac{M \cdot y}{I} \quad ⑤$$

$$\Rightarrow \boxed{\overbrace{\frac{M}{\theta}}^{\text{Struktursteifigkeit}} = \underbrace{E}_{\text{Materialsteifigkeit}} \cdot \overbrace{\frac{I}{L}}^{\text{Geometrie}}}$$





Zeigestock:
Am Ende des Semesters demonstriert Ihr Dozent die Biegeverformung und den Bruch von dem Zeigestock.

Geben Sie einige realistische Werte für die Geometrie an und kommentieren Sie, ob es möglich wäre, den Stock zu brechen und wie hoch die Winkelverformung an diesem Punkt wäre. Das Material ist GFRP (glasfaserverstärkter Kunststoff)