

1 Einführung

Die Baumechanik befasst sich mit

- der vollständigen und korrekten Erfassung der Kräfte aus Belastungen,
- der Umsetzung in charakteristische Werte, die eine Aussage über die Beanspruchung des Tragwerks ermöglichen,
- der Vorbereitung der Baustoffauswahl und Festlegung von notwendigen Bauteilabmessungen.

1.1 Grundgrößen und Einheiten

Größe	Einheit
Länge l oder Weg s	$[m]$
Masse m	$[kg]$
Zeit t	$[s]$

1.2 Abgeleitete Größen und Einheiten

Größe	Einheit
Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$	$[m/s]$
Beschleunigung $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$	$[m/s^2]$
Kraft $F = m \cdot a$	$[kg \cdot m/s^2] = [N]$
Druck $p = \frac{F}{A}$	$[kg/s^2] = [N/m^2] = [Pa]$

1.3 Empfohlene Literatur

Es gibt eine Vielzahl von Lehrbüchern für das Fach Mechanik. Die nachfolgende Liste fasst nur einige zusammen. Nutzen Sie auch die Möglichkeiten der Universitätsbibliothek. Dort stehen viele Bücher zur Ausleihe und zum Studium in der Bibliothek zur Verfügung.

- Krätzig, Wittek: Tragwerke 1 – Theorie und Berechnungsmethoden statisch bestimmter Tragwerke, Springer-Verlag, 1990.
- Meskouris, Hake: Statik der Stabtragwerke – Einführung in die Tragwerkslehre, Springer-Verlag, 1999.
- Hauger, Schnell, Gross: Technische Mechanik 1 (Statik), Springer-Verlag, 1995.
- Hauger, Schnell, Gross: Technische Mechanik 3 (Kinetik), Springer-Verlag, 1995.
- Müller, Magnus: Übungen zur Technischen Mechanik, B.G. Teubner, 1988.
- Mehlhorn (Hrsg.): Der Ingenieurbau – Grundwissen: Baustatik, Baudynamik, Ernst & Sohn, 1996.
- Bucher: Mechanik für IngenieurInnen: Einführung in die Technische Mechanik, 2015.

2 Kräfte am starren Körper

2.1 Definitionen zur Kraft

2.1.1 Die Kraft und ihre Komponenten

Kräfte lassen sich beschreiben durch Vektoren mit:

1. ihrer Größe (Maßzahl und Einheit),
2. einer Wirkungslinie \rightarrow Geradengleichung im Raum / in der Ebene; alle Punkte dieser Geraden können Kraftangriffspunkte sein (Linienflüchtigkeit),
3. dem Wirkungssinn (Pfeilrichtung).

Wirkungslinie und Wirkungssinn werden durch die *Richtungswinkel* (Winkel zwischen positiver Krafrichtung und positiven Achsenrichtungen x , y , z) festgelegt.

- Die Projektionen eines Vektors auf die Achsen des Koordinatensystems heißen *Komponenten* des Vektors.
- Für die Durchführung von Rechnungen ist die Zerlegung einer Kraft in ihre Komponenten sinnvoll.
- Die Wirkungslinien einer Kraft und ihrer Komponenten schneiden sich immer in einem Punkt.

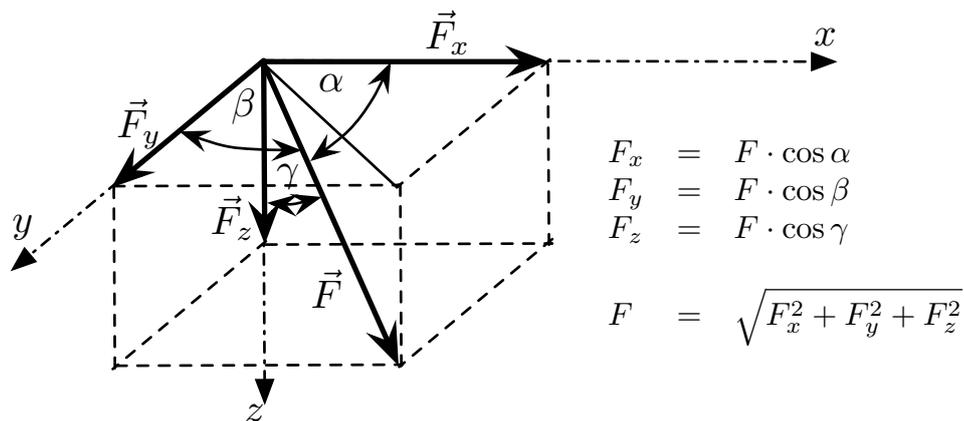


Abbildung 2.1: Zerlegung einer Kraft in ihre Komponenten im Raum

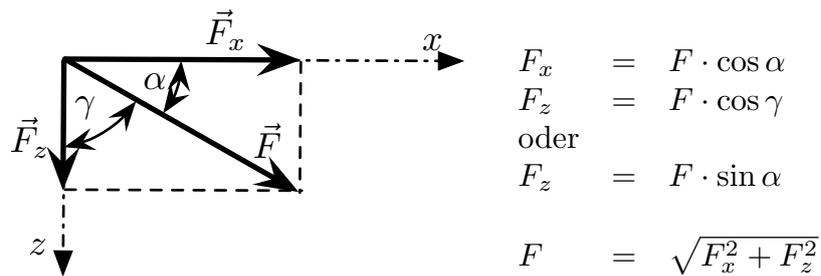


Abbildung 2.2: Zerlegung einer Kraft in ihre Komponenten in der Ebene

2.1.2 Das Moment einer Kraft

Verläuft die Wirkungslinie einer Kraft nicht durch den betrachteten Bezugspunkt, so erzeugt sie ein **Moment** bezogen auf diesen Punkt.

Wir betrachten zunächst die Wirkung einer Kraft in der xz -Ebene. In [Abbildung 2.3](#) ist eine Kraft, die durch den Kraftangriffspunkt Q verläuft, dargestellt. Sie erzeugt ein Moment um den Momentenbezugspunkt P . Genau genommen handelt es sich dabei um ein Moment um eine zur y -Achse (zeigt senkrecht aus der xz -Ebene) parallelen Achse durch den Punkt P .

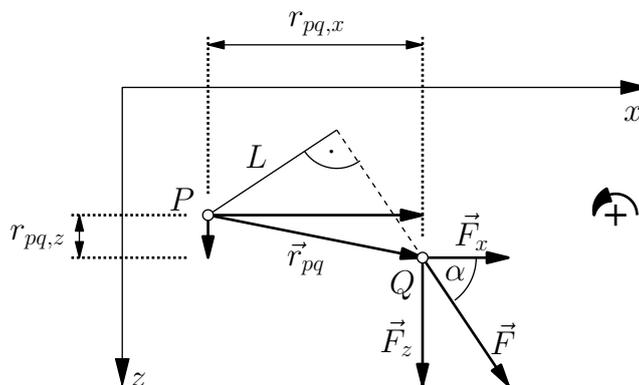


Abbildung 2.3: Moment einer Kraft in der xz -Ebene

Bei dem vereinbarten Koordinatensystem mit Blick entgegen der positiven y -Richtung drehen **positive** Momente $\vec{M}_{p,y}$ **entgegen** dem Uhrzeigersinn.

$$M_{p,y} = F \cdot L = r_{pq,z} \cdot \underbrace{F \cos \alpha}_{F_x} - r_{pq,x} \cdot \underbrace{F \sin \alpha}_{F_z} = F \cdot \underbrace{(r_{pq,z} \cos \alpha - r_{pq,x} \sin \alpha)}_{L=\text{Länge des Hebelarms}} \quad (2.1)$$

Hebelarm $L =$ Länge desjenigen vom Drehpunkt P ausgehenden Vektors, der senkrecht auf der Wirkungslinie der Kraft steht.

$r_{pq,z}, r_{pq,x} =$ Hebelarme der Kraftkomponenten.

Die Lage des Kraftangriffspunkts auf der Wirkungslinie hat **keinen** Einfluss auf die Größe des Moments.

Vor jeder Momentenberechnung sind festzulegen:

1. Momentenbezugspunkt (Drehpunkt),
2. Positiver Drehsinn.

Der mittlere Teil von Gleichung (2.1) kann auch in der folgenden Form aufgeschrieben werden:

$$\vec{M}_{p,y} = \begin{Bmatrix} r_{pq,x} \\ 0 \\ r_{pq,z} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} F_x \\ 0 \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r_{pq,z} F_x - r_{pq,x} F_z \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Das heißt, das Moment ist, wie die Kraft und der Abstandsvektor zwischen Momentenbezugspunkt und Kraftangriffspunkt, eine vektorielle Größe. Der Momentenvektor steht senkrecht auf der Ebene, die durch den Abstandsvektor zwischen Momentenbezugspunkt und Kraftangriffspunkt sowie dem Kraftvektor aufgespannt wird. Allgemein lässt sich für einen Kraftzustand im Raum folgendes definieren:

Definition: Die Größe

$$\vec{M}_p = (\vec{r}_q - \vec{r}_p) \times \vec{F} = \vec{r}_{pq} \times \vec{F} \quad (2.3)$$

heißt **Moment** der Kraft \vec{F} bezogen auf den Punkt P .

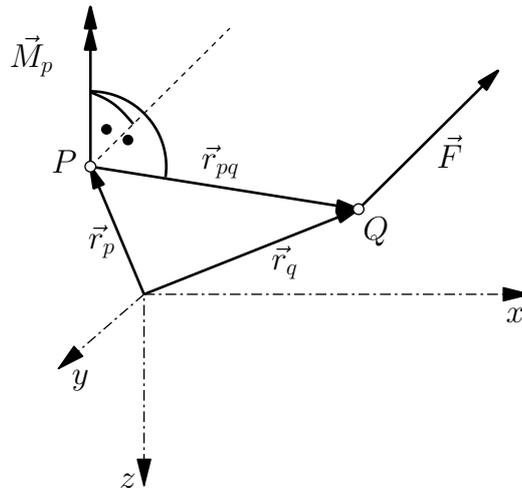


Abbildung 2.4: Moment einer Kraft um den Punkt P im Raum

Im Sonderfall, dass \vec{r}_{pq} und \vec{F} in der xz -Ebene liegen, besitzt der Momentenvektor nur die y -Komponente $\vec{M}_{p,y}$.

2.2 Gleichgewichts- und Äquivalenzprinzip

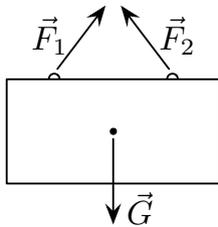
Es werden zwei Kräftegruppen I und II betrachtet:

Gruppe I : $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ beschreibt im Allgemeinen einen gegebenen Kräftezustand.

Gruppe II : $\sum_{j=n+1}^m \vec{F}_j$ beschreibt im Allgemeinen einen gesuchten Kräftezustand.

2.2.1 Gleichgewicht

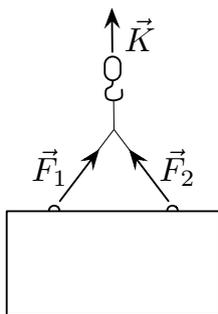
Besteht *Gleichgewicht*, wird die Wirkung einer Kräftegruppe I durch die Wirkung einer Kräftegruppe II aufgehoben. $W_I + W_{II} = 0$ bzw. die Wirkung aller Kräfte = 0.



Fragestellung: Wie müssen die Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 beschaffen sein, damit sie die Wirkung von \vec{G} aufheben?

2.2.2 Äquivalenz (Gleichwertigkeit)

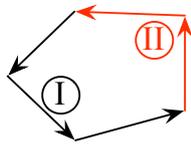
Im Falle der *Äquivalenz* wird die Wirkung einer Kräftegruppe I durch die Wirkung einer Kräftegruppe II gleichwertig ersetzt. $W_I = W_{II}$.



Fragestellung: Wie müssen die Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 beschaffen sein, damit sie die gleiche Wirkung wie die Kraft \vec{K} haben?

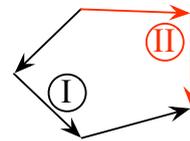
2.2.3 Ebener Kräftezustand

Gleichgewicht



Kräftegruppen heben sich auf

Äquivalenz



Kräftegruppen haben gleiche Wirkung

3 Gleichgewichtsbedingungen

- $$\sum_{i=1}^n F_{i,x} + \sum_{j=n+1}^m F_{j,x} = 0$$
- $$\sum_{i=1}^n F_{i,z} + \sum_{j=n+1}^m F_{j,z} = 0$$
- $$\sum_{i=1}^n M_{i,y} + \sum_{j=n+1}^m M_{j,y} = 0$$

beziehungsweise:

- $$\sum_{k=1}^m F_{k,x} = 0$$
- $$\sum_{k=1}^m F_{k,z} = 0$$
- $$\sum_{k=1}^m M_{k,y} = 0$$

3 Äquivalenzbedingungen

- $$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = \sum_{j=n+1}^m F_{j,x}$$
- $$\sum_{i=1}^n F_{i,z} = \sum_{j=n+1}^m F_{j,z}$$
- $$\sum_{i=1}^n M_{i,y} = \sum_{j=n+1}^m M_{j,y}$$

Häufiger Fall: Für eine Kräftegruppe I wird eine einzige Ersatzkraft R (Resultierende) gesucht:

- $$R_x = \sum_{i=1}^n F_{i,x}$$
- $$R_z = \sum_{i=1}^n F_{i,z}$$
- $$M_y = \sum_{i=1}^n M_{i,y}$$

2.2.4 Räumlicher Kräftezustand

6 Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0\end{aligned}$$

6 Äquivalenzbeziehungen

$$\begin{aligned}\sum F_x^I &= \sum F_x^{II} \\ \sum F_y^I &= \sum F_y^{II} \\ \sum F_z^I &= \sum F_z^{II}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_x^I &= \sum M_x^{II} \\ \sum M_y^I &= \sum M_y^{II} \\ \sum M_z^I &= \sum M_z^{II}\end{aligned}$$

3 Tragwerksberechnung

3.1 Belastungsbeschreibung durch Flächenkräfte, Linienkräfte

In der Baupraxis treten eigentlich kaum Kräfte auf, die konzentriert auf einen Punkt wirken. Kräfte in Form von Kraftvektoren stellen somit eine Idealisierung dar. Tatsächlich ist die Krafteinleitung nur über eine zugeordnete Oberfläche möglich. Je kleiner die Krafteinleitungsfläche ist, desto zutreffender ist natürlich die Idealisierung durch Einzelkräfte.

Betrachten wir beispielsweise einen auf einer Unterlage stehenden Menschen. Das Gewicht des menschlichen Körpers wird über die Fläche der Fußsohlen auf der Unterlage wirksam (flächenhaft verteilt). Das Gewicht ist räumlich über den gesamten Körper verteilt, die Resultierende des Gewichts ($m \cdot g$) wirkt im Schwerpunkt des Körpers. Wie zutreffend die Idealisierung der über die Füße auf ein darunter liegendes Bauteil übertragenen Gewichtskraft als Einzelkraft ist, hängt vom Verhältnis der Bauteilausdehnung zur Fläche der Fußsohlen ab. Je größer das Bauteil ist, desto zutreffender ist die Idealisierung.

3.1.1 Räumlicher Kräftezustand

Allgemein lassen sich z.B. Belastungen im Bauwesen durch einen *räumlichen Kräftezustand* beschreiben. Das heißt, es wirken *Flächenkräfte* $p \left[\frac{kN}{m^2} \right]$ auf eine Oberfläche.

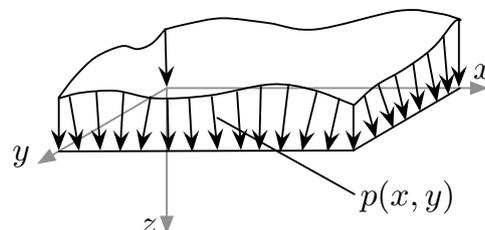


Abbildung 3.1: Auf eine Oberfläche wirkende Flächenkraft

3.1.2 Ebener Kräftezustand

In sehr vielen Fällen können wir unsere Betrachtungen auf eine Ebene reduzieren, da die Tragwerkelemente im Bauingenieurwesen oft eine eher linienhafte Ausdehnung haben. In Abbildung 3.2 sei dieser Übergang am Beispiel einer Trägerrostkonstruktion skizziert.

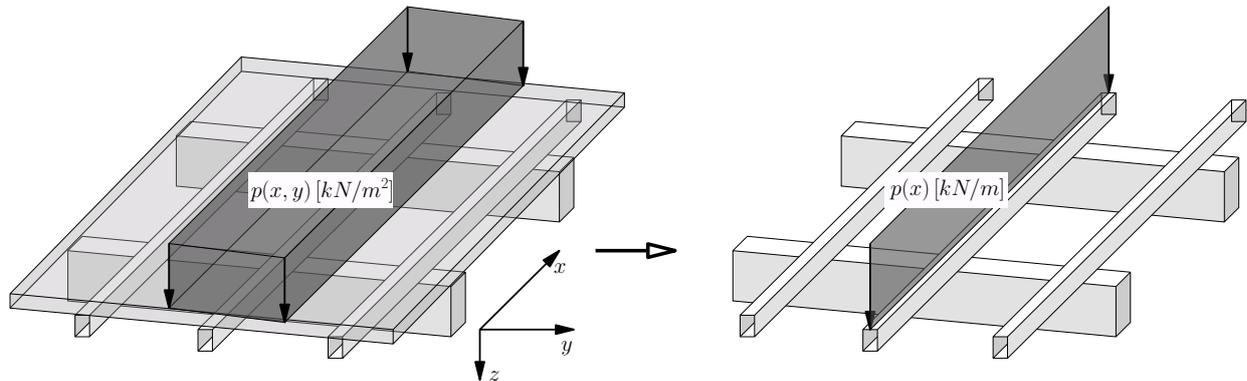


Abbildung 3.2: Beispiel für die Überführung einer Flächen- in eine Linienlast

Damit werden Belastungen in der Regel als *Linien-* oder *Streckenkraft* $p \left[\frac{kN}{m} \right]$ dargestellt.

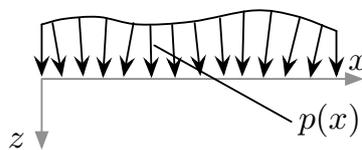
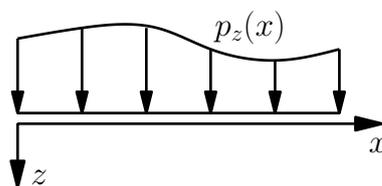


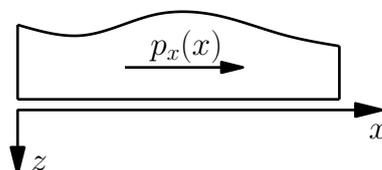
Abbildung 3.3: In der Ebene wirkende Linienkraft

Flächen- und Linienlasten können unterschiedlich gerichtet sein. Häufige Spezialfälle sind:

- Senkrechte Wirkung auf die Übertragungsfläche bzw. -linie:



- Parallele Wirkung auf die Übertragungsfläche bzw. -linie (z.B. Bremskräfte):



Für viele Berechnungen ist es hilfreich, zunächst die Resultierende einer solchen verteilten Kraft zu ermitteln.

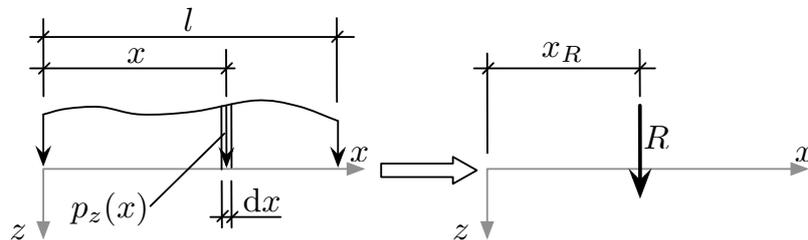


Abbildung 3.4: Resultierende einer Linienkraft

Zur Bestimmung der Größe und der Lage der Resultierenden nutzen wir zwei Äquivalenzbedingungen:

1.

$$R = \sum F_{iz}$$

bzw.

$$R = \int_0^l p_z(x) dx \hat{=} \text{Flächeninhalt der Kraftfigur}$$

2.

$$M_R = \sum M_i \rightarrow \text{z.B. Drehpunkt } (0, 0)$$

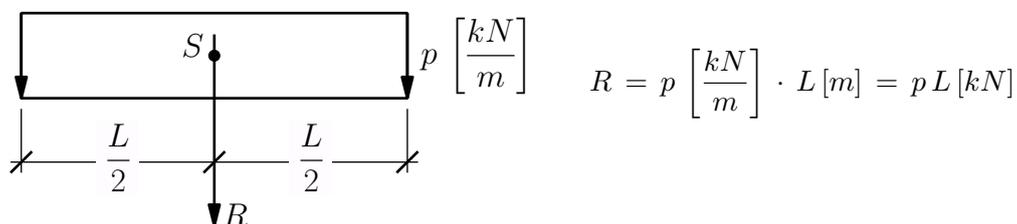
bzw.

$$R \cdot x_R = \int_0^l p_z(x) \cdot x dx = x_R \cdot \int_0^l p_z(x) dx$$

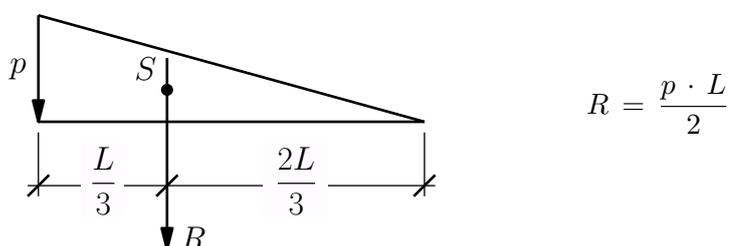
$$\Rightarrow x_R = \frac{\int_0^l p_z(x) \cdot x dx}{\int_0^l p_z(x) dx} \hat{=} \text{Ordinate des Schwerpunkts der Kraftfigur}$$

Häufige Fälle für Streckenlasten

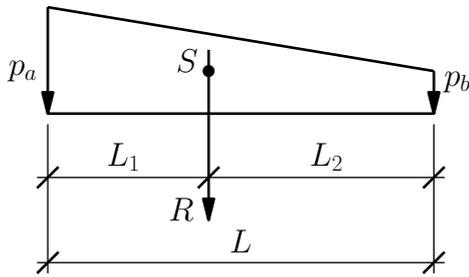
- **Gleichmäßig verteilte Streckenlast**



- **Dreieckförmige Streckenlast**



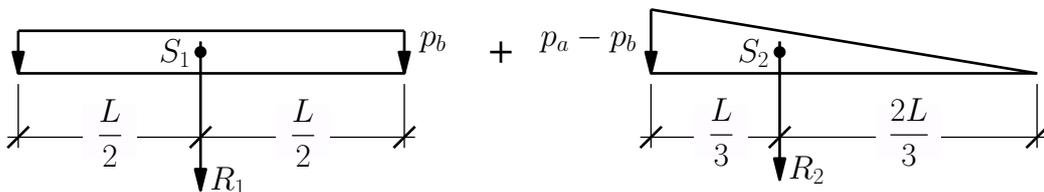
• Trapezförmige Streckenlast



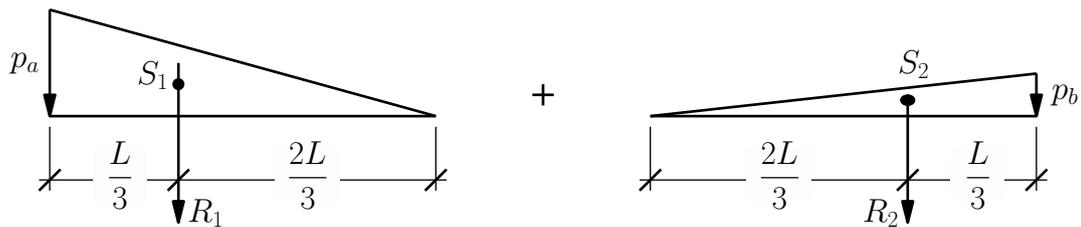
$$R = \frac{p_a + p_b}{2} \cdot L$$

$$L_1 = \frac{L}{3} \cdot \frac{2p_b + p_a}{p_a + p_b} \quad L_2 = \frac{L}{3} \cdot \frac{2p_a + p_b}{p_a + p_b}$$

oder: Zerlegung in Rechteck + Dreieck

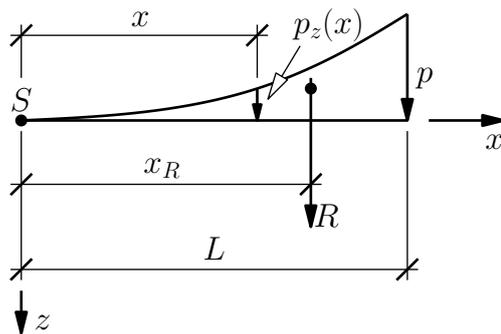


oder: Zerlegung in Dreieck + Dreieck



• Bei gegebener Randkurve der Lastfigur ist zu integrieren

→ Beispiel: Bestimmung einer Parabelgleichung



Allgemein:

$$p_z(x) = a x^2 + b x + c$$

$$p'_z(x) = \frac{d p_z(x)}{d x} = 2 a x + b$$

$$(1) x = 0 \rightarrow p_z(x=0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$(2) x = 0 \rightarrow p'_z(x=0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

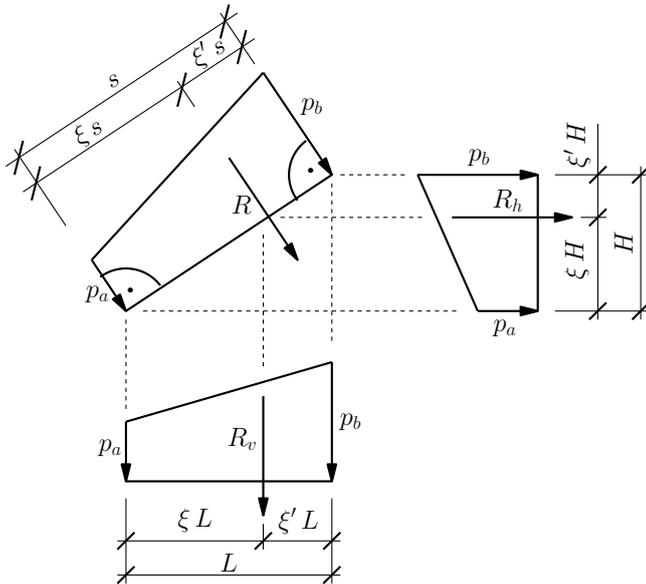
$$(3) x = L \rightarrow p_z(x=L) = p \Rightarrow a = \frac{p}{L^2}$$

$$\Rightarrow p_z(x) = p \left(\frac{x}{L} \right)^2$$

$$R = \int_0^L p_z(x) dx = \frac{p}{L^2} \int_0^L x^2 dx = \frac{p}{3L^2} x^3 \Big|_0^L = \frac{p}{3L^2} L^3 = \frac{p \cdot L}{3}$$

$$x_R = \frac{\int_0^L p_z(x) \cdot x dx}{R} = \frac{1}{R} \int_0^L \frac{p}{L^2} x^3 dx = \frac{3}{p \cdot L} \frac{p}{4L^2} x^4 \Big|_0^L = \frac{3}{4} L$$

• Streckenlast auf schräge Linien



$$\begin{aligned}
 R &= \frac{p_a + p_b}{2} \cdot s \\
 R_h &= \frac{p_a + p_b}{2} \cdot H = R \cdot \frac{H}{s} \\
 R_v &= \frac{p_a + p_b}{2} \cdot L = R \cdot \frac{L}{s}
 \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{p_a + 2p_b}{3(p_a + p_b)}$$

$$\xi' = \frac{2p_a + p_b}{3(p_a + p_b)}$$

$$\xi + \xi' = 1$$



3.2 Idealisierung der Tragwerkskörper

Tragwerke haben im Allgemeinen eine räumliche Struktur und bestehen aus einem oder mehreren Tragwerkselementen. Jedes Tragwerkselement besitzt eine räumliche Ausdehnung, ist also ein *Tragwerkskörper*.

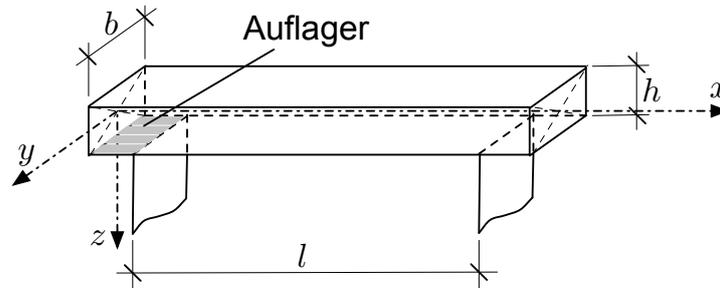
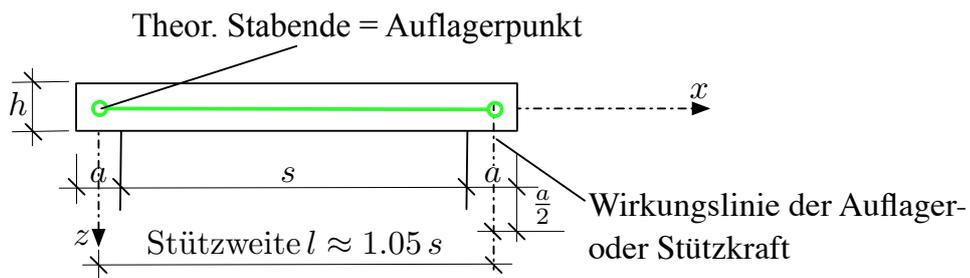


Abbildung 3.5: Idealisierung eines Tragwerkskörpers durch die Stabachse

Wenn zwei Körperabmessungen (b, h) eines Tragwerkselements klein gegenüber der dritten Abmessung (l) sind, darf der Körper durch seine Stabachse ersetzt werden. Die auf diese Weise idealisierten Tragwerke werden **Stabtragwerke** genannt. Im Bauwesen wird der weit überwiegende Teil der Tragwerke als Stabtragwerk behandelt.

In sehr vielen Fällen können Stabtragwerke als ebene Systeme idealisiert werden. Wir wählen dann ein ebenes Koordinatensystem für die Beschreibung der Geometrie und der Kräfte. Das idealisierte Stabtragwerk wird als statisches System abgebildet. Die Bindungen des Stabtragwerks an die Unterkonstruktion werden durch Auflagersymbole dargestellt.



Systemskizze des statischen Systems:

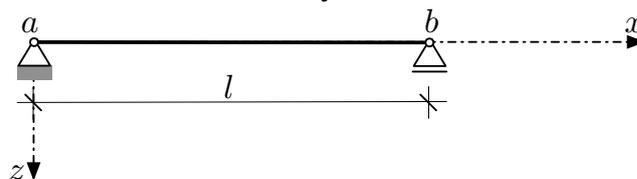
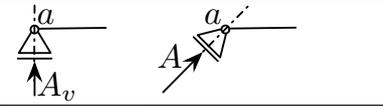
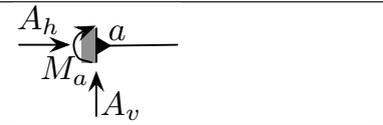
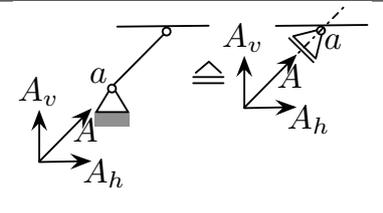


Abbildung 3.6: Abbildung eines ebenen Stabtragwerks als statisches System

Tabelle 3.1: Auflagersymbole

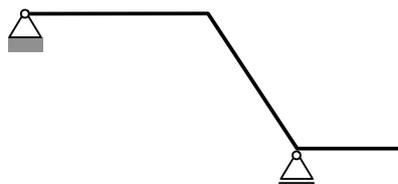
	Bewegliches Lager oder Gleitlager	1 Stützkraft senkrecht zur Bewegungsmöglichkeit: A_v bzw. A
	Festes Lager	2 Stützkkräfte: A_h und A_v
	Eingespanntes Lager	3 Stützgrößen: A_h , A_v und M_a
	Pendelstablager oder Pendelstütze	Das Pendelstablager kann einem beweglichen Lager, dessen Stützkraftwirkungslinie mit der Pendelstabachse zusammenfällt, gleichgesetzt werden.

3.3 Berechnung der Stützgrößen der Grundträger

Vor der Betrachtung komplexerer, ebener statischer Systeme ist es sinnvoll, sich mit der Ermittlung von Stützkräften der Grundträger zu befassen.

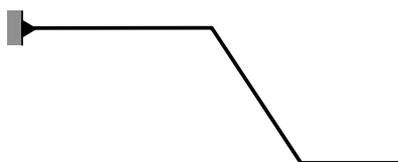
- Grundträger 1 : **Einfeldträger (oder Träger auf zwei Stützen):**

- Kennzeichen: 1 festes Lager + 1 bewegliches Lager



- Grundträger 2 : **Kragträger (oder eingespannter Träger):**

- Kennzeichen: 1 Einspannstelle



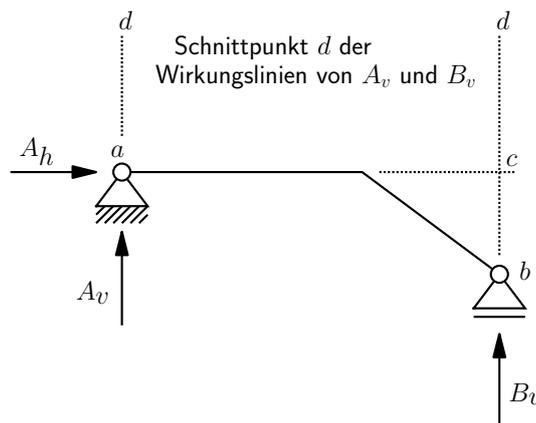
Die den Auflagersymbolen entsprechenden Stütz- bzw. Auflagergrößen müssen zusammen mit den auf die Grundträger einwirkenden Kräften (Belastungen) die Bedingungen eines Gleichgewichtszustands erfüllen. Für ebene Tragwerke (ebene Kräftesysteme) stehen 3 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Somit lassen sich an einem Grundträger nur 3 Stützgrößen bestimmen.

Für ein gegebenes Tragwerk mit Belastung lassen sich die Größe und Richtung der unbekanntenen Stützgrößen in folgenden Schritten ermitteln:

1. Einzeichnen der den Lagertypen zugeordneten Wirkungslinien der unbekanntenen Stützgrößen.
2. Annahmen zur Wirkungsrichtung der unbekanntenen Stützgrößen eintragen (Pfeilrichtung).
3. Auswahl günstiger Gleichgewichtsbedingungen zur Stützgrößenberechnung. Dabei sollte jede Gleichung möglichst nur eine unbekanntene Stützgröße enthalten.
4. Lösung der einzelnen Gleichungen bzw. des Gleichungssystems.
5. Kontrolle der berechneten Stützgrößen.

Günstig ist in der Regel die Wahl von **Gleichgewichtsbedingungen**, die eine Berechnung einzelner Stützgrößen unabhängig von anderen Stützgrößen erlaubt.

Betrachten dazu ein Beispiel vom Typ eines **Grundträgers 1** (Träger auf 2 Stützen).



1) $\sum M_a = 0$ $a = \text{festes Lager} \implies \text{Stützskraft } B_v \text{ des beweglichen Lagers}$

2) $\sum M_c = 0$ $c = \text{Schnittpunkt der Wirkungslinien der Stützskraft des beweglichen Lagers und der horizontalen Stützskraft des festen Lagers} \implies \text{vertikale Stützskraft } A_v \text{ des festen Lagers}$
 $\rightarrow \text{falls der Schnittpunkt } c \text{ nicht existiert: } \sum F_v = 0 \text{ verwenden!}$

3) $\sum M_d = 0$ $d = \text{Schnittpunkt der Wirkungslinien der Stützskraft des beweglichen Lagers und der vertikalen Stützskraft des festen Lagers} \implies \text{horizontale Stützskraft } A_h \text{ des festen Lagers}$
 $\rightarrow \text{falls der Schnittpunkt } d \text{ nicht existiert: } \sum F_h = 0 \text{ verwenden!}$

\rightarrow Abschließende Kontrolle der berechneten Stützgrößen mit bisher nicht genutzten Gleichgewichtsbedingungen!

Die Berechnung der Stützgrößen am **Grundträgers 2** (Kragträger) erfolgt in ähnlicher Weise. Günstige Gleichgewichtsbedingungen sind hier:

1) $\sum M_a = 0$ $a =$ Einspannstelle \implies Einspannmoment M_a

2) $\sum F_v = 0$ \implies vertikale Stützkraft A_v an der Einspannstelle

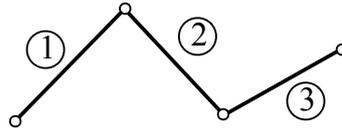
3) $\sum F_h = 0$ \implies horizontale Stützkraft A_h an der Einspannstelle

\longrightarrow Abschließende Kontrolle der berechneten Stützgrößen mit bisher nicht genutzten Gleichgewichtsbedingungen, z.B. $\sum M$ um einen beliebigen Drehpunkt!

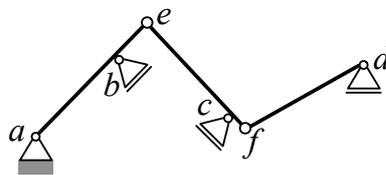
3.4 Stütz- und Verbindungskräfte von Stabketten

3.4.1 Charakterisierung der Verbindungskräfte

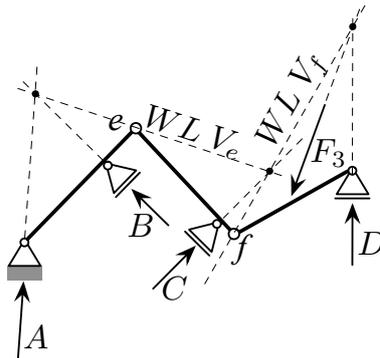
Einzelstäbe lassen sich durch Verbindungselemente, wie z.B. Verbindungsgelenke, zu Stabketten formieren.



Durch Zuordnen von Auflagern entstehen gestützte Stabketten, die als Tragwerk dienen können.



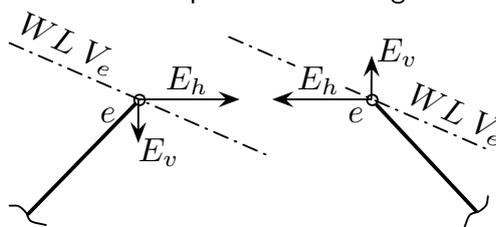
Auf die Einzelstäbe wirkende Belastungen erzwingen Gleichgewicht haltende äußere Stützkkräfte und innere Gelenkkkräfte.



Die inneren Gelenkkkräfte werden auch *Verbindungskräfte* genannt. Sie sind dem „rechten“ und dem „linken“ Gelenkufer (GU) zugeordnet und tragen Nullpaarcharakter, das heißt, es existieren zwei Kräfte mit gleichem Betrag, gleicher Wirkungslinie aber entgegengesetzter Wirkungsrichtung.

Nullpaar: $\rightarrow \vec{F}_1 \leftarrow \vec{F}_2 \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow \sum \vec{F} = 0$

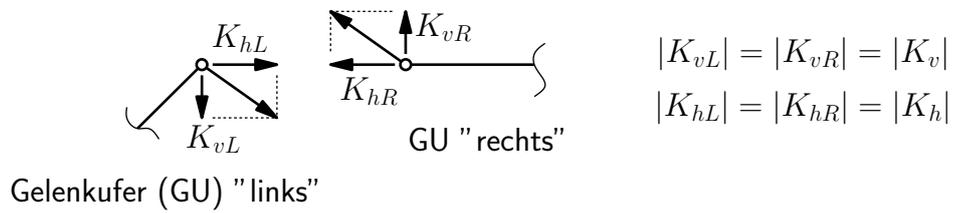
Für ein Verbindungsgelenk e können sich beispielsweise die folgenden Verbindungskräfte einstellen:



Für die Berechnung der Verbindungskräfte werden sie zweckmäßigerweise in Komponenten zerlegt. Wir haben dann als Unbekannte für die Verbindung von

2 Stäben	2 Verbindungskräfte
3 Stäben	2 + 2 = 4 Verbindungskräfte
s Stäben	2 · (s - 1) Verbindungskräfte

Beispiel: Gelenkknoten mit 2 angeschlossnen Stäben:



ODER

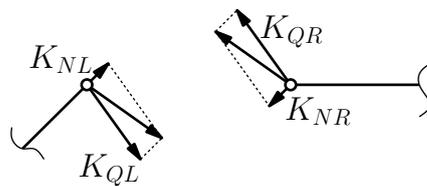


Abbildung 3.7: Zerlegung der Verbindungskraft an einem Verbindungsgelenk zwischen 2 Stäben: Zerlegung in Vertikal- und Horizontalkomponenten (oben) oder in Komponenten quer (Q) zur und längs der Stabachse (N) eines der beiden Stäbe

Beispiel: Gelenkknoten mit 3 angeschlossnen Stäben:

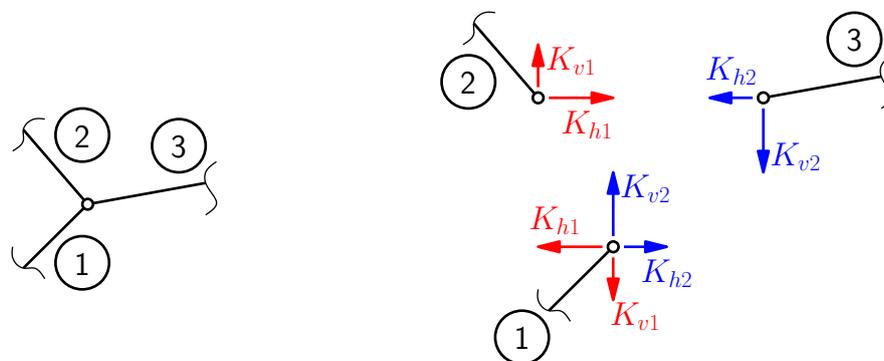


Abbildung 3.8: Verbindungskräfte an einem Verbindungsgelenk zwischen 3 Stäben mit ihrer Zerlegung in Vertikal- und Horizontalkomponenten

3.4.2 Kriterium der statischen Bestimmtheit

An gestützten Stabketten haben wir neben	a	Stützgrößen
	v	Verbindungskräfte
also insgesamt	$a + v$	Unbekannte.

Dabei gilt:

- Einspannstelle		$a = 3$
- Festes Lager		$a = 2$
- Bewegliches Lager		$a = 1$
- Verbindungsgelenk von		
	2 Stäben	$v = 2$
	s Stäben	$v = 2(s - 1)$

Zur Berechnung der Unbekannten stehen uns die Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Das sind **für jeden** an der Stabkette beteiligten **Stab 3 Bedingungen**, für s Stäbe also $3s$ Gleichungen. Daraus lässt sich das Kriterium der *statischen Bestimmtheit* ableiten:

$$a + v = 3s + n \quad (3.1)$$

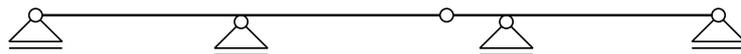
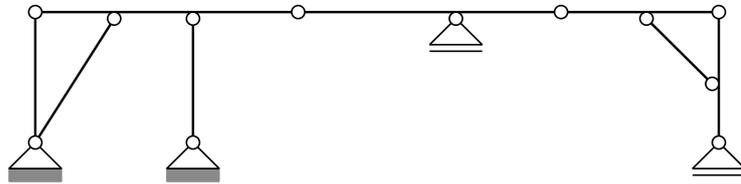
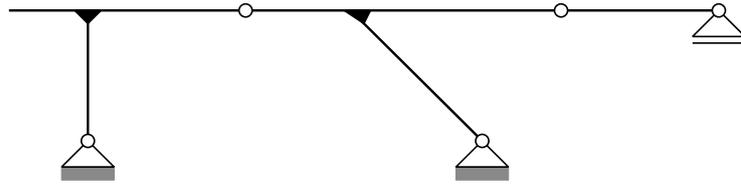
n ist dabei der *Grad der statischen Unbestimmtheit*.

- $n = 0$: statisch bestimmtes System
- $n < 0$: bewegliches System mit Freiheitsgrad n
- $n > 0$: n -fach statisch unbestimmtes System, für die Berechnung sind neben den Gleichgewichtsbedingungen auch Formänderungsbedingungen erforderlich, die Idealisierung der Tragwerkelemente als starre Körper ist nicht hinreichend

Die Bedingung $n \geq 0$ in Gleichung (3.1) ist für Tragwerke ein *NOTWENDIGES* Kriterium, es ist aber *NICHT HINREICHEND*. Dieses Kriterium gewährleistet nur die Anzahl, aber nicht die Unabhängigkeit der Gleichgewichtsbedingungen.

Beispiele

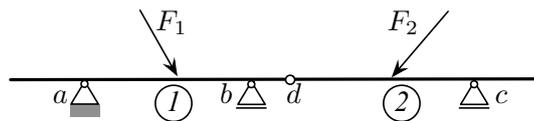




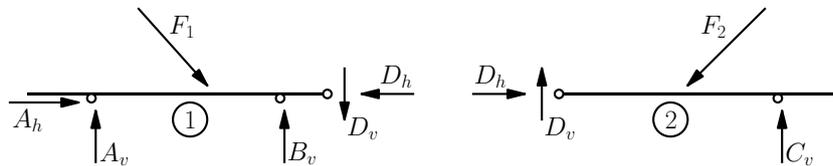
3.4.3 Berechnung der Stütz- und Verbindungskräfte von Stabketten

Vorerst betrachten wir ausschließlich statisch bestimmte Systeme. Zur Ermittlung der unbekanntenen Stütz- und Verbindungskräfte wird an einem Stab begonnen, an dem die Anzahl der Unbekannten möglichst gering ist. Diese Unbekannten werden mit sinnvollen Gleichgewichtsbedingungen berechnet. Die an diesem Tragwerksteil berechneten Verbindungskräfte gelten am anschließend betrachteten Teil als bekannte Größen.

Beispiel:



Vollständiges Freisetzen:



Berechnungsablauf:

1. $\sum M_d^2 = 0 \rightarrow C_v$
2. $\sum M_c^2 = 0 \rightarrow D_v$
3. $\sum F_h^2 = 0 \rightarrow D_h$

Unter Einbeziehung von D_v und D_h :

4. $\sum M_a^1 = 0 \rightarrow B_v$
5. $\sum M_b^1 = 0 \rightarrow A_v$
6. $\sum F_h^1 = 0 \rightarrow A_h$

Kontrollen:

$$\sum F_v^1 = 0?, \sum F_v^2 = 0?$$

Beziehungswise am Gesamtsystem:

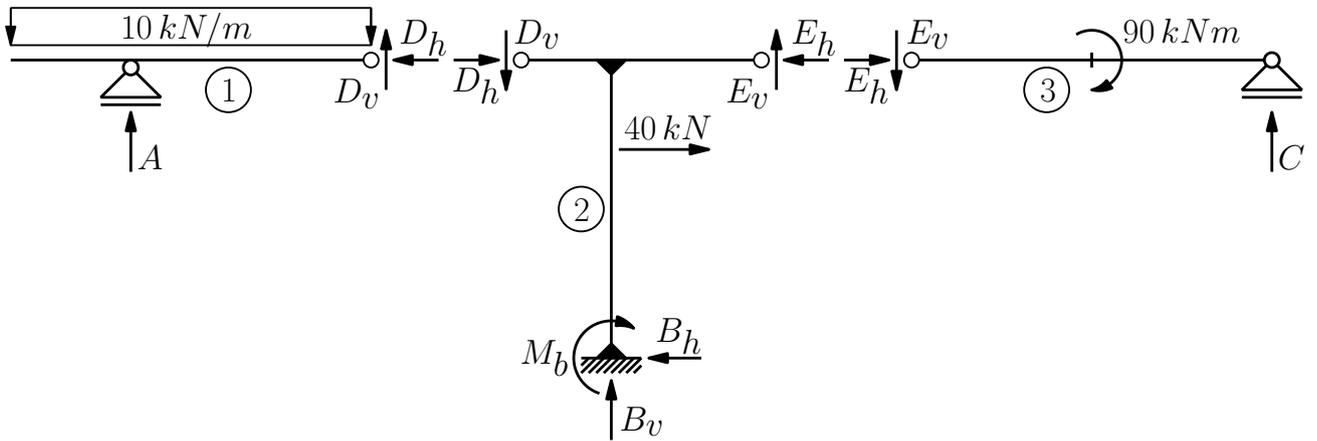
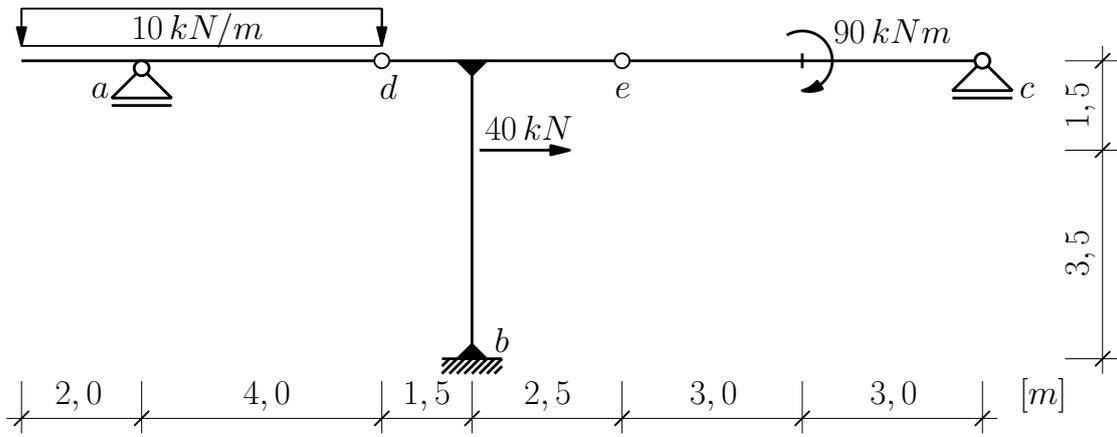
$$\sum F_v = 0?, \sum F_h = 0?, \sum M = 0?$$

In den Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem treten nur äußere Kraftgrößen auf, die Verbindungskräfte heben sich auf!!!

Hinweis:

Stellen Sie sich vor, in welcher Reihenfolge man das System aufbaut! Die **Berechnung** der Teilsysteme erfolgt dann **umgekehrt zur Reihenfolge des Aufbausens!!!**

Beispiel



3.5 Berechnung von Schnittgrößen an Stabtragwerken

3.5.1 Allgemeines

An jedem Tragwerk bilden die Belastungen und die Stützgrößen eine Gleichgewichtsgruppe. Es besteht also ein **äußeres Gleichgewicht**.

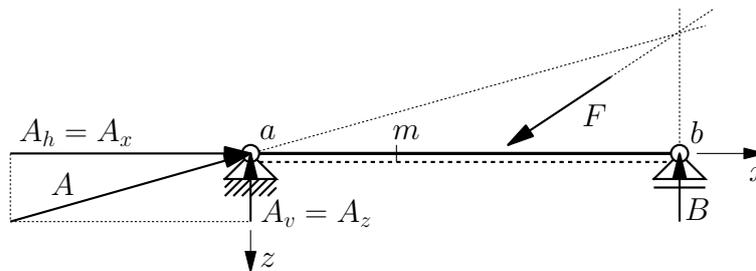
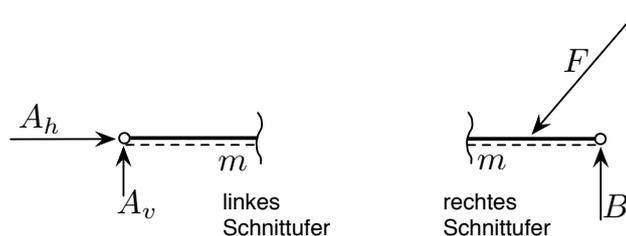


Abbildung 3.9: Gleichgewichtszustand am Einfeldträger

Wir können nun beispielsweise das in Abbildung 3.9 dargestellte, im Gleichgewichtszustand befindliche Stabtragwerk an einer beliebigen, zu untersuchenden Stelle m (gedanklich) zerschneiden. Dabei entstehen zwei voneinander getrennte Teile.



Die Definition für die „linke“ und „rechte“ Seite eines Stabs wird durch eine Strichelung markiert. Die gestrichelte Linie, die auch als Kennfaser bezeichnet wird, kennzeichnet die Seite des Stabs, in die die positive, lokale z -Achse weist, also die „Unterseite“ des Stabs.

Jeder durch einen Schnitt entstandene Tragwerksteil muss, ebenso wie das Gesamtsystem, im Gleichgewicht sein. Daraus folgt, dass an den Schnittufern zusätzliche Kraftgrößen anzusetzen sind, die den Gleichgewichtszustand am Tragwerksteil gewährleisten. Entsprechend der 3 Gleichgewichtsbedingungen, die zu erfüllen sind, setzen wir an den Schnittufern einer Schnittstelle m auch 3 zusätzliche Kraftgrößen, die **Schnittgrößen** an:

N_m	Normalkraft oder Längskraft Kraft mit Wirkungslinie <i>entlang der Stabachse</i>
Q_m	Querkraft Kraft mit Wirkungslinie <i>senkrecht zur Stabachse</i>
M_m	Biegemoment freies Moment

Da diese zusätzlich angebrachten Kraftgrößen im **unzerschnittenen** System keine äußeren Resultierenden besitzen dürfen, müssen die einzelnen Schnittgrößen

- paarweise gleich groß sein,
- entgegengesetzt gerichtet sein und
- jeweils gemeinsame Wirkungslinien haben.

Die Schnittgrößen an einer Schnittstelle besitzen also Nullpaarcharakter.

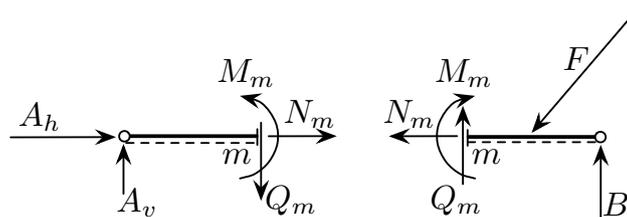


Abbildung 3.10: Definition der Schnittgrößen an einer Schnittstelle m

Definition:

Schnittgrößen sind Gleichgewicht haltende **innere Kraftgrößen** am „linken“ und „rechten“ Schnitтуufer eines geschnittenen Stabtragwerks, die zusammen mit den **äußeren Kraftgrößen** am abgetrennten Tragwerksteil eine Gleichgewichtsgruppe bilden. Es besteht also ein **inneres Gleichgewicht**.

Schnittgrößen treten paarweise auf, sind paarweise gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.

3.5.2 Berechnung der 3 Schnittgrößen mit 3 Gleichgewichtsbedingungen

Zur Berechnung wird entweder der linke **oder** der rechte Teil des zerschnittenen Tragwerks herangezogen. Die zu berechnende Schnittgröße muss sich sowohl am linken als auch am rechten Teil mit gleichem Betrag und gleichem Vorzeichen ergeben.

Aus Gründen der Effizienz und der geringeren Fehlerwahrscheinlichkeit sollte man sich für die Seite entscheiden, für die der geringere Rechenaufwand entsteht.

Die Normalkraft

Die Normalkraft N_m ist die Kraft mit Wirkungslinie in Richtung der Stabachse an der Schnittstelle m , die der Summe der zu ihr parallelen äußeren Kräfte bzw. Kraftkomponenten am Tragwerksteil das Gleichgewicht hält.

$$N_m^{(\text{innere Normalkraft})} + \sum F_{\text{längs}}^{(\text{aus äußeren Kräften})} = 0 \quad (3.2)$$

Vorzeichendefinition:

- **Positive Normalkräfte** sind
 - am linken Schnittufer nach rechts bzw.
 - am rechten Schnittufer nach linksgerichtet.
- Alternativ lässt sich auch formulieren:
 - **Äußere Kräfte** bzw. deren Komponenten erzeugen **positive Normalkräfte**, wenn sie den Tragwerksteil, an dem sie angreifen, vom anderen **wegziehen** wollen.
- Das heißt: **Zugkraft** = **positive** Normalkraft, **Druckkraft** = **negative** Normalkraft.

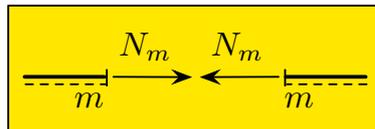
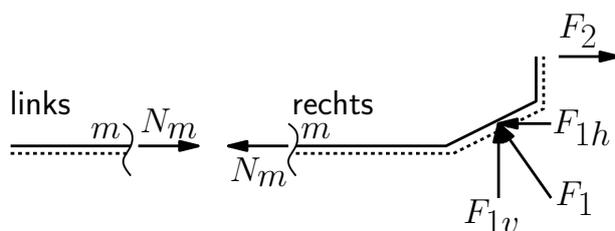


Abbildung 3.11: Definition des positiven Vorzeichens für Normalkräfte

Beispiel



Zustandsfunktion der Normalkräfte:

Wie jede Schnittgröße kann die Normalkraft an jeder Schnittstelle eines Tragwerks berechnet werden. Zur Veranschaulichung werden die Normalkräfte üblicherweise graphisch am Tragwerk dargestellt.

- Ein berechneter Normalkraftwert wird an der Schnittstelle **senkrecht zur Stabachse** als Ordinate aufgetragen.
- **Positive** Normalkräfte werden **auf der Seite der Kennfaser** aufgetragen, **negative** auf der „Oberseite“.
- Die Verbindungslinie der Ordinatenpunkte heißt **Zustandsfunktion der Normalkräfte** (ZF N) oder Normalkraftlinie.

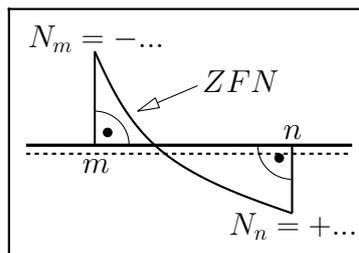


Abbildung 3.12: Definition der Zustandsfunktion der Normalkräfte

Das Biegemoment

Das Biegemoment M_m ist das Moment, das der Summe der Momente der äußeren Kräfte, also der Lasten und Stützkkräfte, am abgetrennten Tragwerksteil um den Momentenbezugspunkt m das Gleichgewicht hält.

$$M_m^{(\text{inneres Biegemoment})} + \sum M_m^{(\text{aus äußeren Kräften})} = 0 \quad (3.3)$$

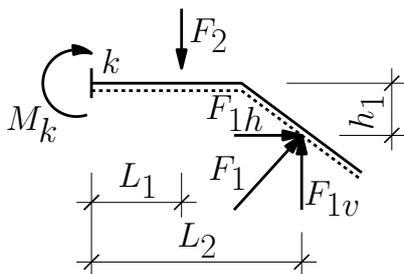
Vorzeichendefinition:

- **Positive Biegemomente** drehen
 - am linken Schnittufer **gegen** den Uhrzeigersinn bzw.
 - am rechten Schnittufer **im** Uhrzeigersinn.
- Alternativ lässt sich auch formulieren:
 - **Äußere Kräfte** bzw. deren Komponenten erzeugen **positive Biegemomente**, wenn infolge ihrer Wirkung bei eingespannt gedachter Schnittstelle die **Kennfaser an der Schnittstelle gedehnt** wird.



Abbildung 3.13: Definition des positiven Vorzeichens für Biegemomente

Beispiel



Zustandsfunktion der Biegemomente:

Der Verlauf der Biegemomente entlang der Stabachsen von Tragwerkselementen lässt sich graphisch am Tragwerk darstellen.

- Der berechnete Biegemomentenwert wird **senkrecht zur Stabachse** als Ordinate an der untersuchten Schnittstelle aufgetragen.
- **Positive Biegemomente** werden **auf der Seite der Kennfaser** aufgetragen.
- Das heißt, Biegemomente werden **immer auf der gedehnten Seite** aufgetragen.
- Die Verbindungslinie der Ordinatenpunkte heißt **Zustandsfunktion der Biegemomente (ZF M)** oder Momentenlinie.

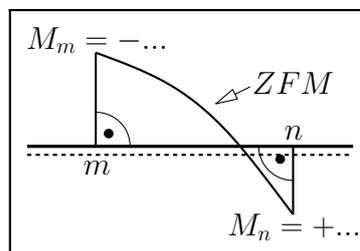


Abbildung 3.14: Definition der Zustandsfunktion der Biegemomente

Die Querkraft

Die Querkraft Q_m ist die Kraft an der Schnittstelle m mit senkrecht zur Stabachse verlaufender Wirkungslinie, die der Summe der zu ihr parallelen äußeren Kräfte bzw. Kraftkomponenten am Tragwerksteil

das Gleichgewicht hält.

$$Q_m^{(\text{innere Querkraft})} + \sum F_{\text{quer}}^{(\text{aus äußeren Kräften})} = 0 \quad (3.4)$$

Vorzeichendefinition:

- **Positive Querkräfte** sind

- am linken Schnittufer nach unten bzw.
- am rechten Schnittufer nach oben

gerichtet.

- Alternativ lässt sich auch formulieren:

- **Äußere Kräfte** bzw. deren Komponenten erzeugen **positive Querkraftanteile**, wenn sie
 - * den **linken** Tragwerksteil **nach oben** bzw.
 - * den **rechten** Tragwerksteil **nach unten** bzw.
 verschieben wollen.

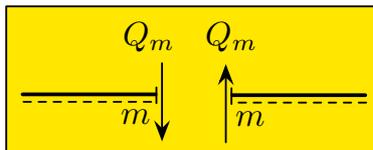
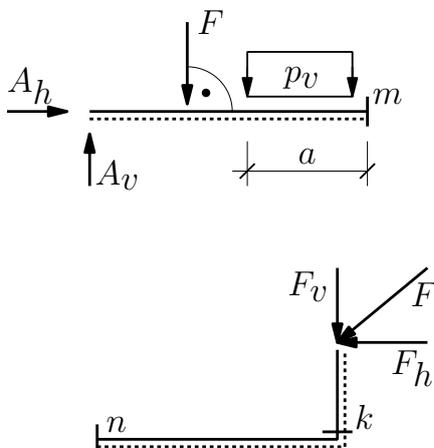


Abbildung 3.15: Definition des positiven Vorzeichens für Querkräfte

Beispiel



Zustandsfunktion der Querkräfte:

Auch der Verlauf der Querkräfte entlang der Stabachsen eines Tragwerks wird üblicherweise graphisch dargestellt.

- Ein berechneter Querkraftwert wird an der Schnittstelle **senkrecht zur Stabachse** als Ordinate aufgetragen.
- **Positive** Querkräfte werden **auf der Seite der Kennfaser** aufgetragen, **negative** auf der „Oberseite“.
- Die Verbindungslinie der Ordinatenpunkte heißt **Zustandsfunktion der Querkräfte** (ZF Q) oder Querkraftlinie.

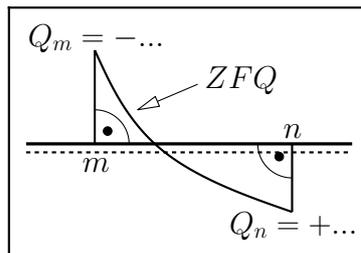


Abbildung 3.16: Definition der Zustandsfunktion der Querkräfte

3.5.3 Mathematische Beziehungen zwischen Belastungs-, Querkraft- und Momentenfunktion

Wir betrachten einen Stababschnitt der Länge dx mit einer daran angreifenden Belastung sowie an den Enden des Stababschnitts wirkenden Schnittgrößen, wie in [Abbildung 3.17](#) dargestellt.

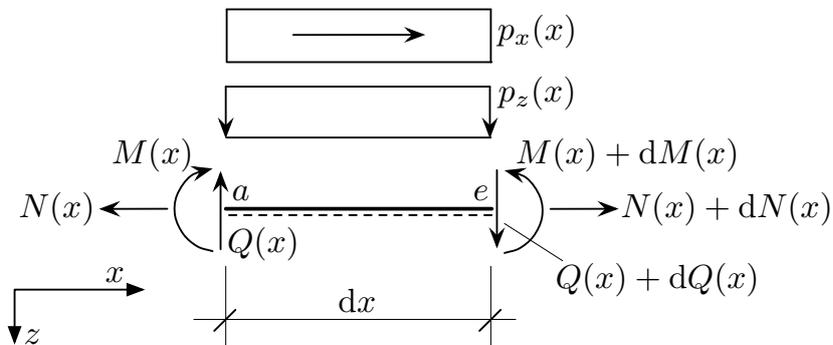


Abbildung 3.17: Stababschnitt mit daran wirkenden Belastungen und Schnittgrößen

Der Stababschnitt der Länge dx muss sich unter Mitwirkung der Schnittgrößen im Gleichgewicht befinden. Das heißt, wir können die 3 Gleichgewichtsbeziehungen für diesen Stababschnitt formulieren.

Aus den von den Gleichgewichtsbeziehungen ausgehend gewonnenen Zusammenhängen lässt sich nun herleiten, wie sich Schnittkraftfunktionen an einem Stababschnitt aus einer gegebenen Lastfunktion ermitteln lassen.

$$Q(x) = \underbrace{Q(x=a)}_{\text{Anfangswert von } Q \text{ bei } a} - \underbrace{\int_{x=a}^x p_z(x) dx}_{\text{Resultierende der Lastfigur des Stababschnitts } a-x} \quad (3.5)$$

$$M(x) = \underbrace{M(x=a)}_{\text{Anfangswert von } M \text{ bei } a} + \underbrace{\int_{x=a}^x Q(x) dx}_{\text{Flächeninhalt der ZF } Q \text{ über dem Stababschnitt } a-x} \quad (3.6)$$

Durch Einsetzen des Integrals von Gleichung (3.5) in Gleichung (3.6) ergibt sich folglich

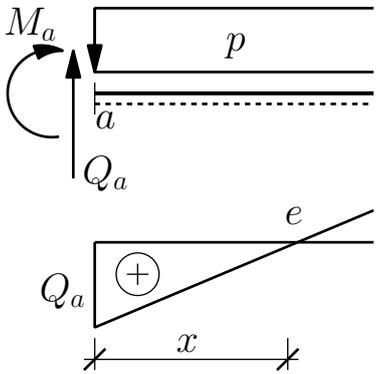
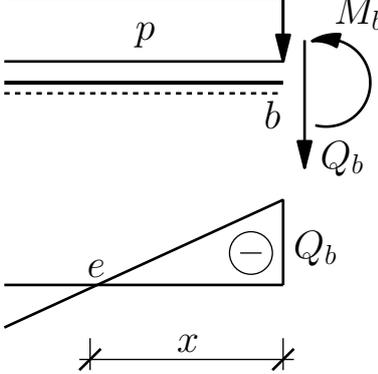
$$M(x) = \underbrace{M(x=a)}_{\text{Anfangswert von } M \text{ bei } a} + \underbrace{Q(x=a)(x-a)}_{\substack{\text{Biegemoment} \\ \text{aus} \\ Q(x=a) \text{ für Pkt. } x}} - \underbrace{\int_{x=a}^x \left[\int_{x=a}^x p_z(x) dx \right] dx}_{\substack{\text{Biegemoment der Resultieren-} \\ \text{den } R \text{ aus der Lastfigur im Be-} \\ \text{reich } a-x \text{ für Pkt. } x}} \quad (3.7)$$

Stababschnitt mit trapezförmiger Linienlast

3.5.4 Hinweise zu den Zustandsfunktionen der Schnittgrößen

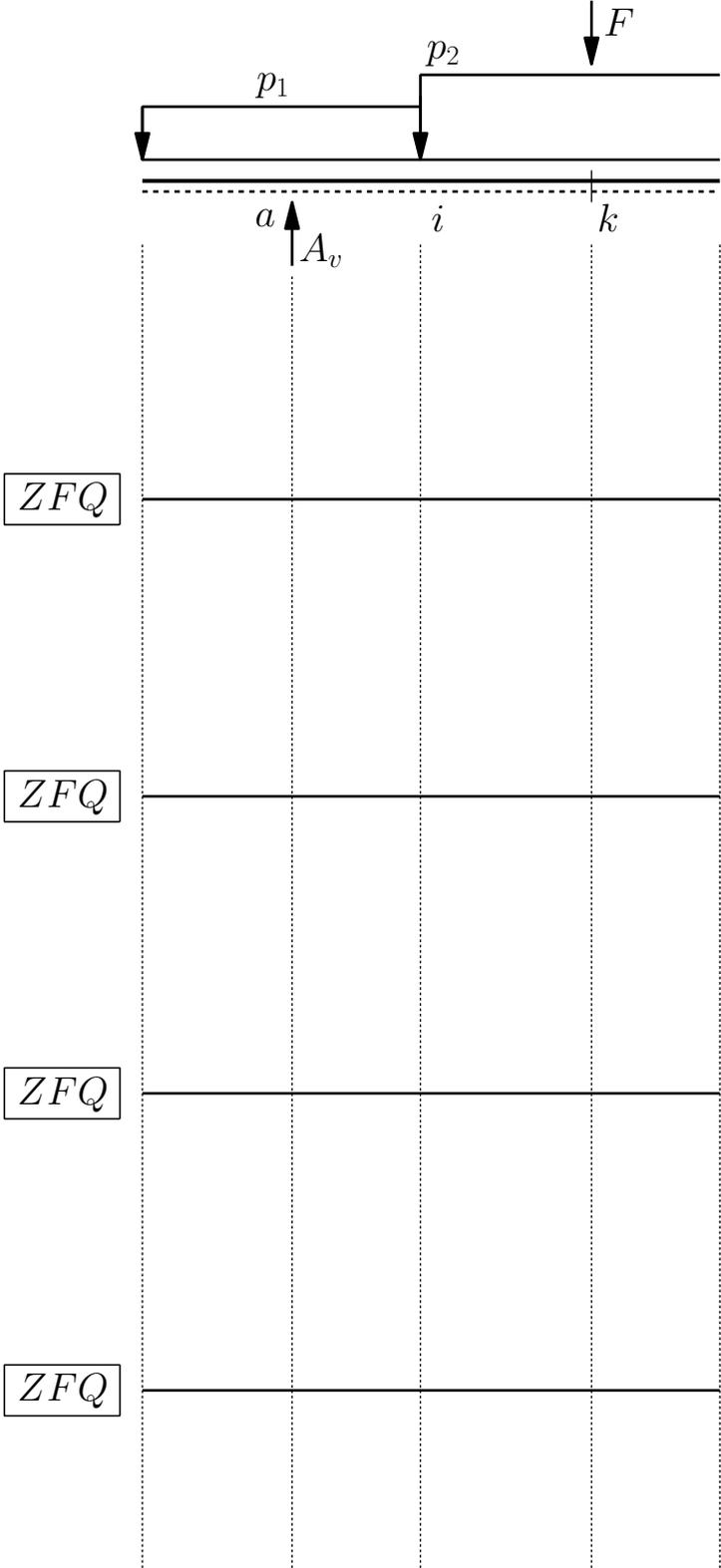
- Zur eindeutigen Darstellung der Schnittgrößendiagramme sind für ausgewählte Punkte des Tragwerks die Schnittgrößenwerte zu ermitteln und als Ordinaten senkrecht zur Stabachse aufzutragen.
- Innerhalb der Stetigkeitsbereiche der Belastung bzw. des Tragwerks ergeben sich dann durch den jeweiligen Funktionsverlauf entsprechende Verbindungen der Ordinatenpunkte, die Schnittgrößendiagramme.

Beispiel: Extremwert des Biegemoments bei konstanter Linienlast

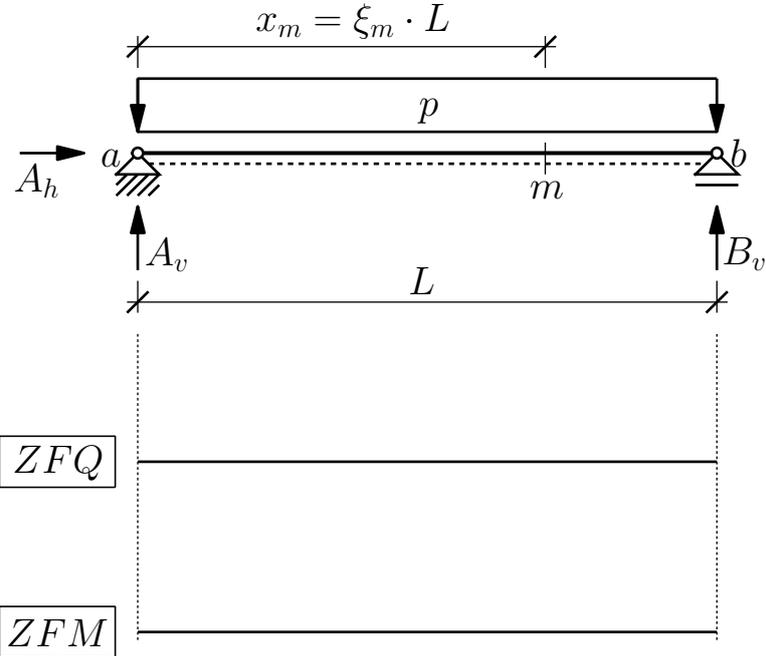
ausgehend vom linken Schnittufer	ausgehend vom rechten Schnittufer
 $Q_e = Q_a - p \cdot x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{Q_a}{p}$ $\rightarrow p = \frac{Q_a}{x}$ $M_{max} = M_e = M_a + Q_a \cdot x - \frac{p x^2}{2}$	 $Q_e = Q_b + p \cdot x = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{Q_b}{p}$ $\rightarrow p = -\frac{Q_b}{x}$ $M_{max} = M_e = M_b - Q_b \cdot x - \frac{p x^2}{2}$
$M_{max} = M_a + Q_a \cdot x - \frac{Q_a \cdot x}{2} = M_a + \frac{Q_a \cdot x}{2}$ <p style="text-align: center;">ODER</p> $M_{max} = M_a + \frac{Q_a^2}{p} - \frac{Q_a^2}{2p} = M_a + \frac{Q_a^2}{2p}$	$M_{max} = M_b - Q_b \cdot x + \frac{Q_b \cdot x}{2} = M_b - \frac{Q_b \cdot x}{2}$ <p style="text-align: center;">ODER</p> $M_{max} = M_b + \frac{Q_b^2}{p} - \frac{Q_b^2}{2p} = M_b + \frac{Q_b^2}{2p}$

Beispiel: Nullstellen der ZF Q in Abhängigkeit der Beträge der äußeren Kräfte

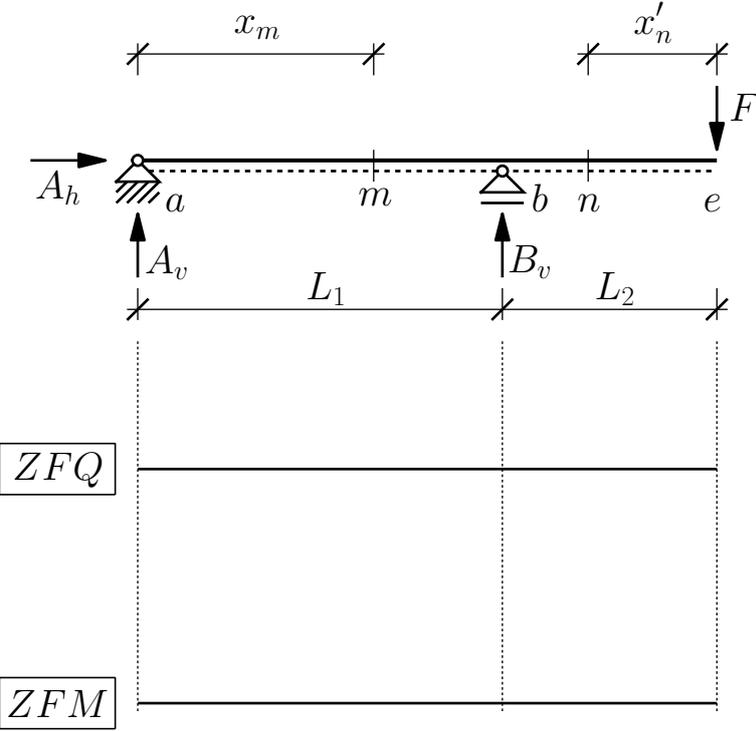
In Abhängigkeit der Beträge von p_1 , p_2 , A_v und F gibt es verschiedene Möglichkeiten für die Lage der Stelle des extremen Biegemoments M_{max} rechts vom Punkt a .



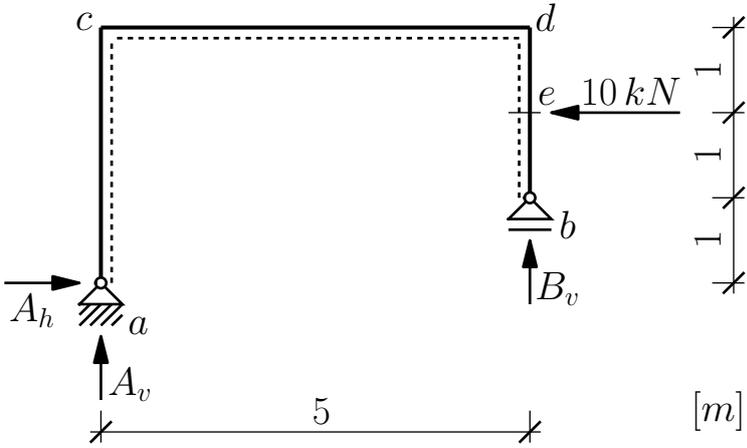
Beispiel: Einfeldträger mit konstanter Linienlast



Beispiel: Einfeldträger mit Kragarm und Einzellast am Kragarmende



Beispiel: Abgewinkelter Einfeldträger mit Einzellast





3.6 Der Dreigelenkrahmen

Eine Gruppe von statisch bestimmten Tragwerken sind die *Dreigelenkrahmen*.

3.6.1 Definition

Ein einfacher Dreigelenkrahmen ist eine Stabkette, die aus zwei durch ein Verbindungsgelenk miteinander gekoppelten Stäben besteht. Jeder der beiden Stäbe ist durch ein festes Lager gestützt.

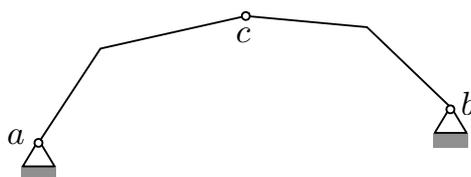
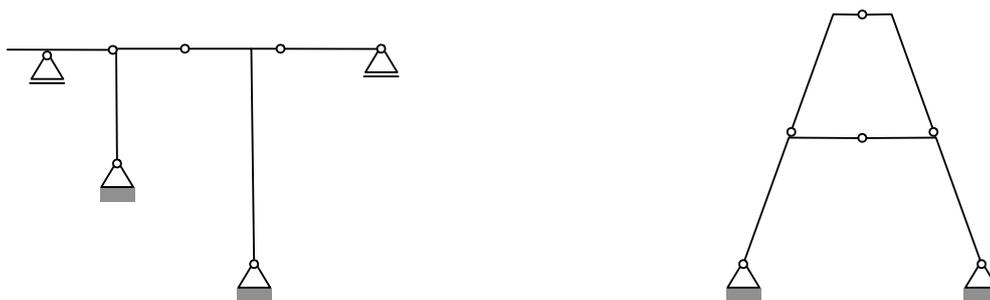


Abbildung 3.18: Einfacher Dreigelenkrahmen

So sind in Abbildung 3.18 in den Punkten a und b die Fußgelenke (2 feste Lager), während sich im Punkt c das Verbindungs- oder Scheitelgelenk befindet.

3.6.2 Erweiterungsmöglichkeiten

Konstruktionen, die auf einem Dreigelenkrahmen aufbauen, lassen sich durch Anhängen von Einfeldträgern oder das Ankoppeln weiterer Dreigelenkrahmen erweitern.



Durch Anhängen von Einfeldträgern erweiterter Dreigelenkrahmen

Durch Koppeln von zwei Dreigelenkrahmen erweiterte Konstruktion

Abbildung 3.19: Möglichkeiten zur Erweiterung von Dreigelenkrahmen

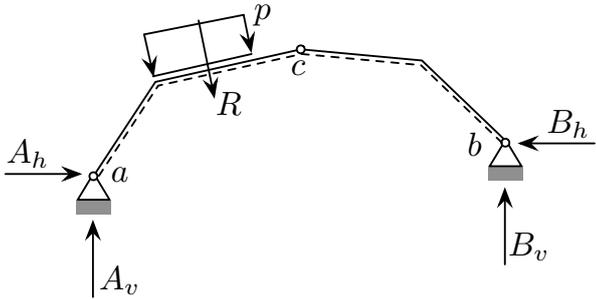
3.6.3 Berechnung von Stütz- und Schnittgrößen am Dreigelenkrahmen

- Der einfache Dreigelenkrahmen ist ein Stabtragwerk mit
 - 4 Stützkräften und
 - 2 Verbindungskräften
- Für die Berechnung stehen 6 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung (je Stab 3 Gleichgewichtsbedingungen).
- Der Dreigelenkrahmen ist also ein statisch bestimmtes System.
- **Bedingung:** Fuß- und Scheitelgelenke dürfen **nicht auf einer Geraden** liegen!

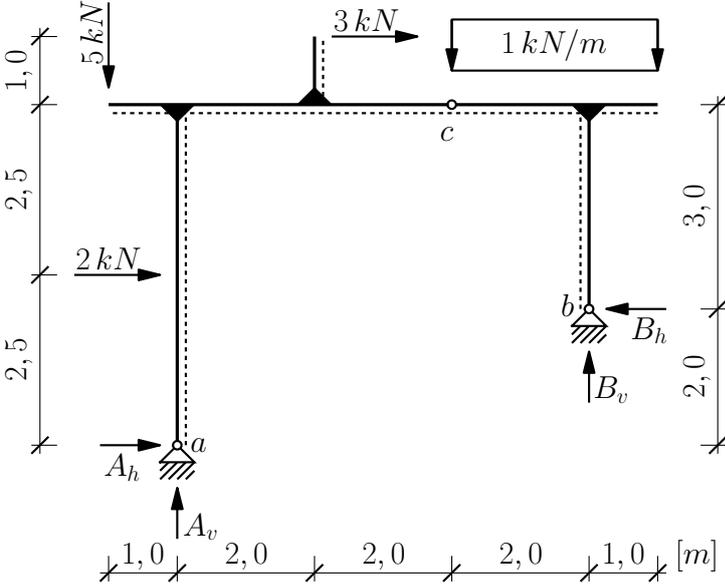


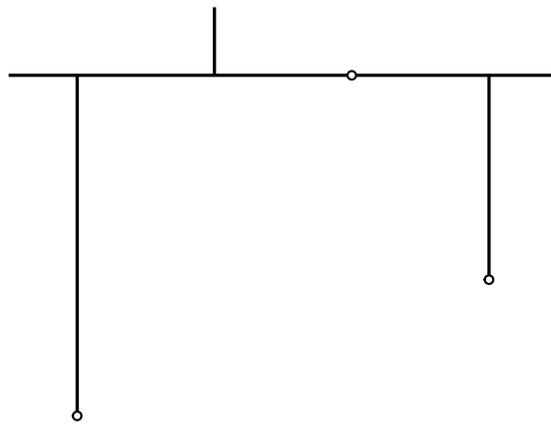
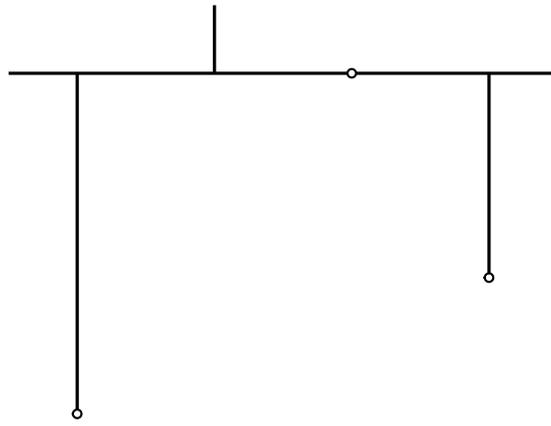
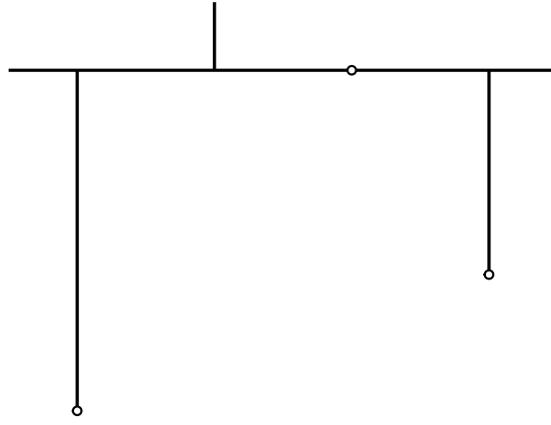
Für die **Berechnung der 6 Stütz- und Verbindungskräfte** stehen 6 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Das sich daraus ergebende System aus 6 Gleichungen mit 6 Unbekannten kann durch sinnvolle Wahl der Gleichgewichtsbedingungen so entkoppelt werden, dass sich zweimal 2 Stützkräfte aus jeweils 2 Gleichungen bestimmen lassen.

Beispiel:



Beispiel: Stütz- und Schnittgrößen am Dreigelenrahmen





3.7 Ebene Fachwerke

3.7.1 Allgemeines

Definition: Ein Fachwerk ist eine in sich geschlossene Stabkette aus geraden Einzelstäben, die an ihren Enden gelenkig miteinander verbunden sind und ein in sich steifes System (Fachwerkscheibe) bilden.

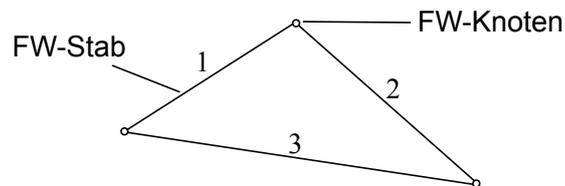


Abbildung 3.20: Fachwerkscheibe aus drei Stäben

Forderungen an ideale Fachwerke:

1. Fachwerkknoten sind reibungsfreie Gelenke.
2. Die Stabachsen der Fachwerkstäbe sind gerade und fallen mit den Verbindungslinien der Knotenpunkte zusammen.
3. Die Stabachsen aller an einem Knoten angeschlossenen Stäbe schneiden sich im Knotenpunkt.
4. **Äußere Kräfte** werden **nur in den Knoten** eingeleitet. → **Einzige Schnittkraft** eines Stabes ist die **Längskraft** (*Stabkraft*), die über die Länge des Stabs konstant ist.

Typische Bauformen:

- Häufig werden Fachwerke für Balkentragwerke verwendet. Besonders häufig sind dabei parallelgurtige Fachwerkträger anzutreffen.

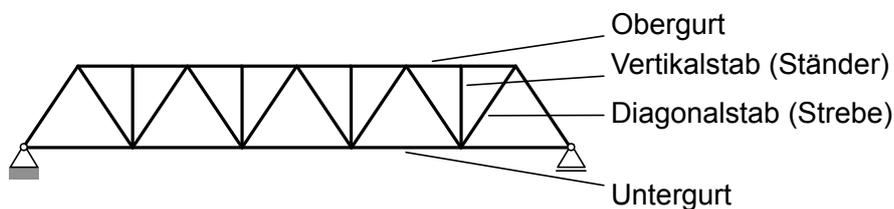


Abbildung 3.21: Parallelgurtiger Fachwerkträger

- Die Tragwirkungen von Fachwerkstrukturen können vielfältig sein. Sie entsprechen ihren jeweiligen Stützbedingungen. Beispiele für typische Konstruktionen sind
 - Einfeldträger (z.B. Brückenträger, Dachbinder)
 - Kragträger (z.B. nichtabgespannte Maste, Türme)
 - Scheibenketten (z.B. Dreigelenksysteme)

3.7.2 Kriterium der statischen Bestimmtheit

Um die unbekanntenen Stab- und Stützkräfte eines ebenen Fachwerks zu bestimmen, stehen uns an jedem Knoten jeweils 2 Gleichgewichtsbeziehungen zur Verfügung. Daraus folgt das Kriterium der statischen Bestimmtheit für ebene Fachwerke:

$$s + a = 2k + n \quad (3.8)$$

Darin bedeuten:

$$\begin{aligned} s &= \text{Anzahl der Stabkräfte} \\ a &= \text{Anzahl der Stützkräfte und} \\ k &= \text{Anzahl der Knoten} \end{aligned}$$

Die Lösung von Gleichung (3.8) kann zu folgenden Ergebnissen führen:

- $n = 0$: statisch bestimmtes Fachwerk
- $n < 0$: bewegliches Fachwerk mit Freiheitsgrad n (kein Tragwerk)
- $n > 0$: statisch unbestimmtes Fachwerk

Das Kriterium $n \geq 0$ ist lediglich *NOTWENDIG*, jedoch nicht *HINREICHEND* für die Eignung des Systems als Tragwerk. Darüber hinaus muss die lineare Unabhängigkeit der Gleichungen gegeben sein.

3.7.3 Berechnung der Stabkräfte

Für die Berechnung der Stabkräfte von ebenen Fachwerken stehen uns zwei Verfahren zur Verfügung:

- das Quer- oder Tragwerksschnittsverfahren und
- das Rund- oder Knotenschnittverfahren.

Das Querschnittsverfahren

Das auf *August Ritter* (1826-1908) zurückgehende Quer- oder Tragwerksschnittverfahren wird auch oft als Ritter-Schnittverfahren bezeichnet. Der Grundgedanke besteht darin, dass nicht nur im Gesamtsystem Gleichgewicht herrschen muss, sondern auch in Teilsystemen, die sich durch Schneiden des Gesamtsystems ergeben. Bei der Ermittlung von Stabkräften ebener Fachwerke wird in der folgenden Weise vorgegangen.

1. Zerlegung des Tragwerks durch Schnitt in zwei voneinander vollständig getrennte Teile. Dabei ist der Schnitt so zu wählen, dass auch der Stab, dessen Stabkraft gesucht ist, geschnitten wird. Wenn es möglich ist, einen Schnitt zu definieren, bei dem maximal 3 Stäbe geschnitten werden, dann lassen sich die 3 unbekanntenen Stabkräfte stets mit den 3 zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen ermitteln.

2. Ersetzen der vom Schnitt betroffenen Stäbe durch ihre Stabkräfte. Es ist zweckmäßig, die Stabkräfte zunächst als Zugkräfte anzunehmen (Pfeilrichtung vom Knoten weisend).
3. Berechnung der unbekannt Stabkräfte mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen wahlweise an dem einen oder dem anderen durch Schnitt entstandenen Tragwerksteil. Dabei ist es sinnvoll, Gleichungen zu wählen, die erlauben, jede unbekannte Stabkraft einzeln aus **einer** Gleichung zu ermitteln.

Zweckmäßige Gleichgewichtsbedingungen sind:

$\sum M_i = 0$ Drehpunkt i ist der Schnittpunkt der Wirkungslinien aller mitgeschnittenen Stabkräfte, außer der gesuchten Stabkraft. Sollte dieser Schnittpunkt im Unendlichen liegen, das heißt, die Wirkungslinien der mitgeschnittenen Stabkräfte sind parallel, dann wählt man:

$\sum F_s = 0$ Die Richtung s liegt dabei senkrecht zu den geschnittenen parallelen Stäben.

Besonders **vorteilhaft** ist das Querschnittverfahren dann, wenn nur einzelne und nicht alle Stabkräfte eines Tragwerks gesucht sind. Ein weiterer Vorteil besteht oft darin, dass man die Stabkräfte bei geschickter Schnittführung unabhängig voneinander mit Hilfe von Momentengleichgewichtsbedingungen berechnen kann und die Kräftegleichgewichtsbedingungen dann noch zur Kontrolle zur Verfügung stehen.

Wählt man die Schnittführung so, dass nur ein einzelner Knoten aus dem Tragwerk herausgeschnitten wird, so führt dies auf das *Rundschnittverfahren*

Das Rundschnittverfahren

Beim Rundschnittverfahren erfolgt die Berechnung der unbekannt Stabkräfte in folgenden Schritten.

1. Jeder Fachwerkknoten mit den dort angeschlossenen Stäben wird durch einen Schnitt um den Knoten herum (Rundschnitt) aus dem Gesamtsystem **vollständig** herausgelöst.
2. Die unbekannt Stabkräfte in den geschnittenen Stäben werden als Zugkräfte angenommen (Pfeilspitzen vom Knoten weisend).
3. Aufstellung der Kräftegleichgewichtsbedingungen für jeden einzelnen Knoten i : $\sum F_{i,v} = 0$, $\sum F_{i,h} = 0$.
4. Lösung des auf diese Weise entstandenen Gleichungssystems.

Das Rundschnittverfahren hat folgende **Vorteile**:

- Es sind wiederholt einfache Gleichungen anzuwenden. Daher lässt sich das Verfahren gut formalisieren und für die Rechnergestützte Stabkraftermittlung einsetzen.
- Bei Knoten mit 3 Stäben, von denen 2 eine gemeinsame Stabachse haben, lässt sich die Stabkraft des dritten Stabs sehr einfach ermitteln.

Die **Nachteile** des Rundschnittverfahrens liegen darin, dass

- die unmittelbare Berechnung ausgewählter Stäbe i.d.R. nicht möglich ist und
- die zu lösenden Gleichungssysteme u.U. für eine schnelle manuelle Berechnung zu groß werden können.

Beispiel: Wir wollen die Anwendung der beiden besprochenen Verfahren anhand des in [Abbildung 3.22](#) dargestellten Systems beispielhaft betrachten.

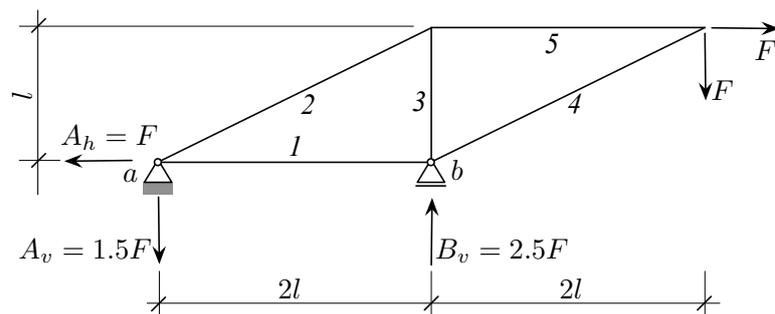


Abbildung 3.22: Einfache Fachwerkkonstruktion

Verwendung des Rundschnittverfahrens für die computergestützte Stabkraftberechnung

Das Rundschnittverfahren lässt sich sehr gut für die computergestützte Berechnung der Stabkräfte von ebenen Fachwerksystemen nutzen. Dafür sind zunächst alle Knoten und Stäbe mit eindeutigen Bezeichnungen zu versehen, i.d.R. sind dies Nummern. Für jeden Knoten j können dann mit den gegebenen Belastungen sowie den unbekanntem Stab- und Stützkräften entsprechende Gleichgewichtsgleichungen aufgestellt werden.

$$\sum F_{j,x} = 0 \quad \sum F_{j,z} = 0 \quad (3.9)$$

Dabei werden die Gleichungen so umgeformt, dass die bekannten Belastungen auf der rechten Seite stehen. Die so für alle Knoten aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen lassen sich in Matrixschreibweise anschreiben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [g] & [0] \\ [g_{sc}] & [I] \end{bmatrix}}_{\text{Matrix der Knotengleichgewichtsbedingungen}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \{s\} \\ \{C\} \end{Bmatrix}}_{\text{Vektor der Stab- und Auflagerkräfte}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}}_{\text{Vektor der Lastgrößen}} \quad (3.10)$$

beziehungsweise in Kurzform:

$$[g^*] \cdot \{s^*\} = \{P^*\} \quad (3.11)$$

Durch Lösung des auf diese Weise erstellten Gleichungssystems erhält man alle gesuchten Kraftgrößen.

Für die Berechnung mit dem Computer sind zunächst einige Schritte zur Vorbereitung erforderlich:

1. Definition eines globalen Koordinatensystems
2. Eingabe der Geometrie des Systems in Form der Knotenkoordinaten
3. Anordnung der Stäbe durch Definition von Anfangs- und Endknoten
4. Definition der Knoten, an denen Lagerkräfte wirken, sowie der Lagerkraftkomponenten in den globalen Koordinatenrichtungen

Als Beispiel betrachten wir wieder das in Abbildung 3.22 dargestellte System, das in Abbildung 3.23 noch einmal gezeigt ist.

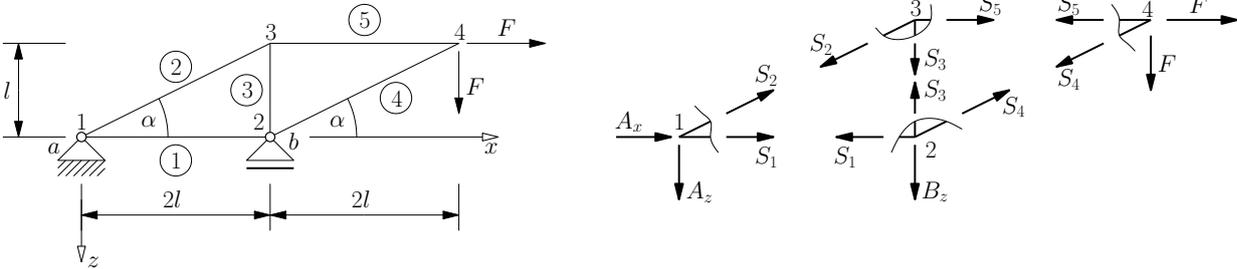


Abbildung 3.23: Einfache Fachwerkkonstruktion mit den an den einzelnen Knoten wirkenden Kräften

3.8 Ebene Gemischtssysteme

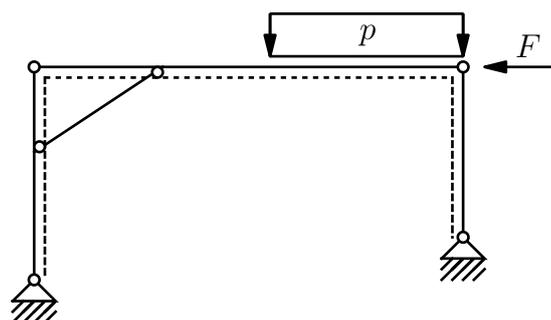
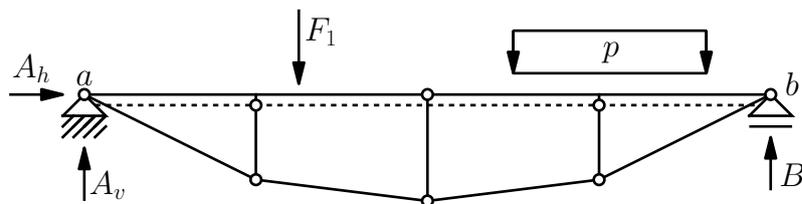
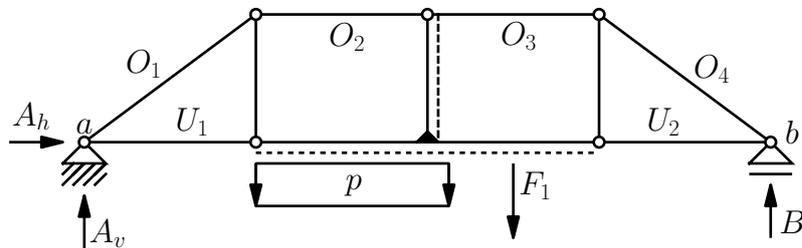
3.8.1 Definition

Tragwerke, die aus einer Kombination biegesteifer Stabwerkteile mit Fachwerkelementen gebildet werden, bezeichnen wir als **Gemischtssysteme**.

Dabei können die Fachwerkteile im Grenzfall aus einem einzigen Stab (z.B. Zugband) bestehen.

Bauformen können Träger auf zwei Stützen, Dreigelenkrahmen und Kombinationen aus den Grundsystemen sein.

Beispiele:



3.8.2 Schnittkraftberechnung

Bei der Berechnung der Schnittkräfte in einem ebenen Gemischtsystem geht man zweckmäßigerweise in der nachfolgend beschriebenen Weise vor.

1. Berechnung der Stützkräfte
2. Berechnung eines Fachwerkstabs mit geeigneter Schnittführung:
 - Querschnitt durch drei Fachwerkstäbe **ODER**
 - Querschnitt durch einen Fachwerkstab und ein Verbindungsgelenk **ODER**
 - Rundschnitt mit zwei Fachwerkstäben
3. Bestimmung der weiteren Stabkräfte mit geeigneten Quer- und Rundschnitten
4. Berechnung der Schnittgrößen in den biegesteifen Stabwerksteilen unter Berücksichtigung der Belastungen, Stütz- und Verbindungskräfte

Beispiel:

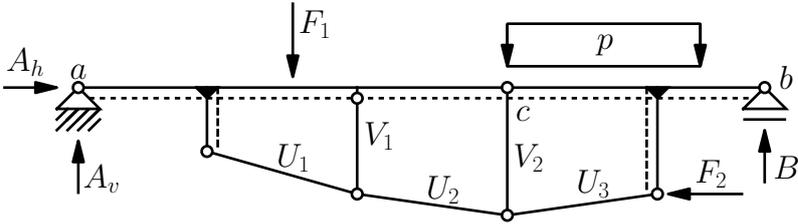


Abbildung 3.24: Unterspannter Einfeldträger als Beispiel für ein Gemischtsystem

3.9 Räumliche Tragwerke

3.9.1 Stützung eines starren Körpers

Ein Starrkörper verfügt im dreidimensionalen Raum über 6 Bewegungsmöglichkeiten, die man auch als *Freiheitsgrade* bezeichnet. Für eine eindeutige Beschreibung ist es zweckmäßig, ein kartesisches Koordinatensystem zu verwenden, wie in Abbildung 3.25 dargestellt. Die 6 möglichen Starrkörperverrückungen sind dann

- eine Verschiebung in x -Richtung,
- eine Verschiebung in y -Richtung,
- eine Verschiebung in z -Richtung,
- eine Verdrehung um die x -Achse,
- eine Verdrehung um die y -Achse und
- eine Verdrehung um die z -Achse.

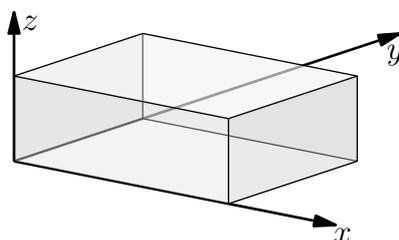


Abbildung 3.25: Starrkörper im dreidimensionalen Raum mit kartesischem Koordinatensystem

Bei den Verdrehfreiheitsgraden kann auch jede beliebige zu den Koordinatenachsen parallele Achse als Bezugsachse verwendet werden.

Zur Fixierung der 6 Bewegungsmöglichkeiten (der 6 Starrkörperverrückungen) sind 6 Bindungen zwischen dem Körper und der festen Umgebung erforderlich. Diese Bindungen lassen sich durch Kräfte, die konstruktiv in Form von Pendelstützen veranschaulicht werden können, realisieren.

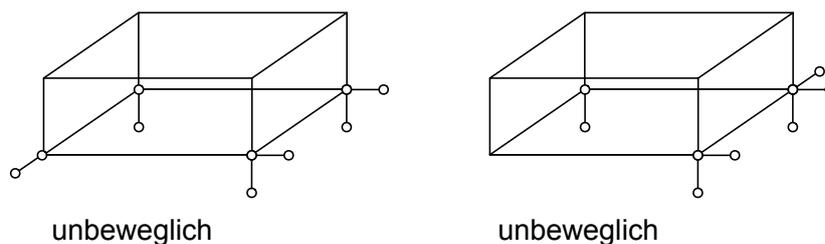


Abbildung 3.26: Beispiele für einen unbeweglich gelagerten Starrkörper

Damit ein räumlicher Körper so gestützt ist, sind 6 Stützkkräfte erforderlich:

- Drei Stützkkräfte, deren Wirkungslinien (WL) nicht in einer Ebene liegen dürfen, verhindern die Translation.
- Drei weitere Stützkkräfte müssen so angeordnet sein, dass sie die drei möglichen Rotationen verhindern.

Um eine ausreichend Stützung zu gewährleisten, müssen die 6 Stützkkräfte die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Höchstens 3 WL dürfen parallel sein, davon maximal 2 in einer Ebene liegen.
- Höchstens 5 WL dürfen die gleiche Gerade schneiden.
- Höchstens 3 WL dürfen einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, davon dürfen maximal 2 in einer Ebene liegen.
- Höchstens 5 WL dürfen in parallelen Ebenen liegen.
- Höchstens 3 WL dürfen in einer Ebene liegen.
- Keine Wirkungslinien dürfen zusammenfallen.

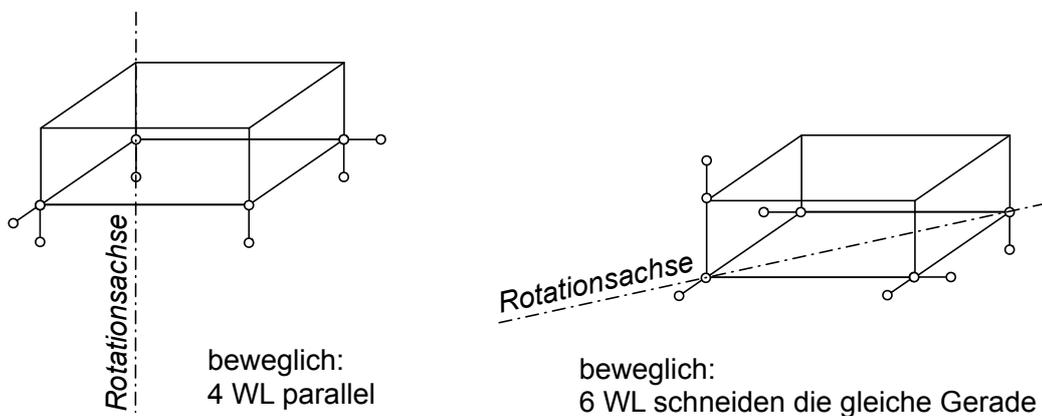


Abbildung 3.27: Beispiele für einen beweglich gelagerten Starrkörper

3.9.2 Schnittgrößen des räumlich beanspruchten Stabs

Es ist üblich, für die Berechnung der Schnittgrößen von Stabtragwerken für jeden Stab ein lokales Koordinatensystem zu wählen. In Abbildung 3.28 ist dargestellt, wie die positiven Schnittgrößen an einem Stab definiert sind, wobei die x -Achse so gewählt wurde, dass sie mit der Stabachse zusammenfällt. Ergänzend enthält Tabelle 3.2 Beschreibungen für die Definition der positiven Schnittgrößenrichtungen. Die Definition der positiven Orientierung der Schnittgrößen ist insbesondere für weiterführende Berechnungen von Bedeutung. In der Literatur werden teilweise auch von den in Abbildung 3.28 getroffenen Vereinbarungen abweichende Definitionen gewählt. Dies ist bei der Anwendung von Formeln für entsprechende weiterführende Berechnungen, wie beispielsweise Spannungsberechnungen, zu beachten.

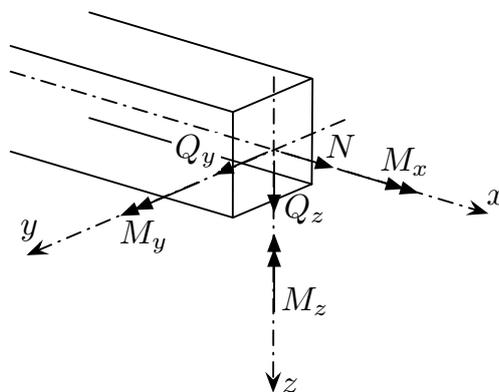


Abbildung 3.28: Definition der positiven Orientierung der Schnittgrößen am räumlich beanspruchten Stab

Tabelle 3.2: Definition der positiven Schnittgrößenrichtungen, wie in Abbildung 3.28 dargestellt

Längskraft N	positiv bei Zug
Querkraft Q_z	positiv, wenn am rechten Stabende nach unten gerichtet, d.h. positiv in positiver z -Richtung
Querkraft Q_y	positiv, wenn am rechten Stabende nach vorne gerichtet, d.h. positiv in positiver y -Richtung
Biegemoment M_y	positiv, wenn Zug auf der positiven z -Seite erzeugt wird, d.h. die Zugfaser unten ist
Biegemoment M_z	positiv, wenn Zug auf der positiven y -Seite erzeugt wird, d.h. die Zugfaser vorne ist
Torsionsmoment M_x	positiv, wenn es „aufschraubend“ wirkt, d.h. bei Blick in positiver x -Richtung im Uhrzeigersinn

3.9.3 Kriterium der statischen Bestimmtheit

Ein Stabtragwerk besteht aus mehreren Stäben, die an Knoten miteinander verbunden sind. Entsprechend den Verbindungskräften, die an den Knoten übertragen werden können, lassen sich verschiedene Stabtypen unterscheiden. In Abbildung 3.29 sind Beispiele für solche Stabtypen angegeben.

Der Index i in der Bezeichnung der Stabtypen S_i entspricht der Anzahl der übertragbaren Stabendschnittgrößen. In der Regel stehen für jeden Stab 6 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Lediglich im Fall, dass an beiden Stabenden die Verdrehung um die Stabachse möglich ist, wie für den dargestellten Stabtyp S_6^* , können nur 5 Gleichgewichtsbedingungen verwendet werden.

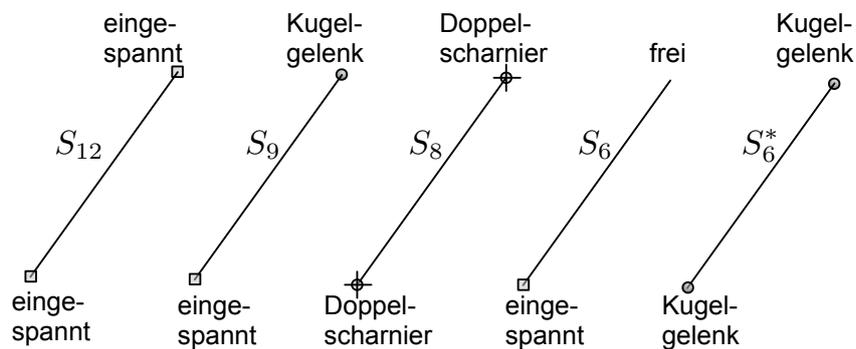


Abbildung 3.29: Beispiele für Stabtypen von räumlichen Stabtragwerken

An den Knoten können sowohl zwei als auch mehrere Stäbe miteinander verbunden sein, sie können aber auch dem Anschluss von Stäben an ein Auflager dienen. Beispiele für verschiedene Knotentypen sind in Abbildung 3.30 dargestellt.

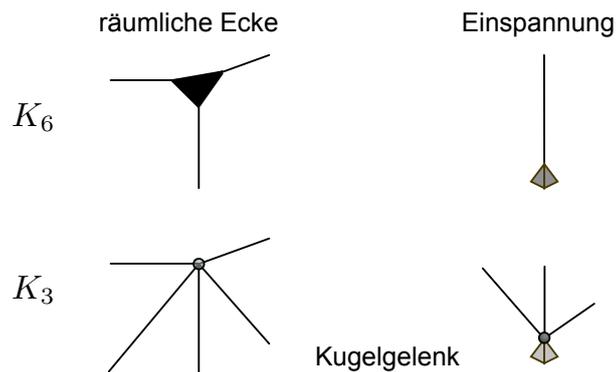


Abbildung 3.30: Beispiele für Knotentypen von räumlichen Stabtragwerken

Der Index j in der Bezeichnung der Knotentypen K_j in Abbildung 3.30 gibt die Anzahl der verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen an.

Die Anzahl der **unbekannten** Stabendschnittgrößen und Stützgrößenkomponenten berechnet sich aus der Anzahl der Stäbe der einzelnen Stabtypen multipliziert mit der Anzahl der jeweils übertragbaren Stabendschnittgrößen sowie der Anzahl der möglichen Stützgrößen:

$$r = 12 \cdot S_{12} + \dots + 9 \cdot S_9 + \dots + 6 \cdot S_6 + 6 \cdot S_6^* + a = \sum_{i=6}^{12} S_i + 6 \cdot S_6^* + a \quad (3.12)$$

Die Anzahl der **verfügbaren** Gleichgewichtsbedingungen g berechnet sich dann als

$$\begin{aligned} g &= 6 \cdot (S_{12} + \dots + S_9 + \dots + S_6) + 5 \cdot S_6^* + 6 \cdot K_6 + \dots + 3 \cdot K_3 + \dots + K_1 \\ &= 6 \cdot \sum_{i=6}^{12} S_i + 5 \cdot S_6^* + \sum_{j=1}^6 j \cdot K_j \end{aligned} \quad (3.13)$$

Der Grad der statischen Unbestimmtheit n lässt sich ermitteln als Differenz zwischen der Anzahl der Unbekannten r und der verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen g :

$$r = g + n \quad \longrightarrow \quad n = r - g \quad (3.14)$$

$$n = 6 \cdot \sum_{i=7}^{12} (i - 6) \cdot S_i + S_6^* + a - \sum_{j=1}^6 j \cdot K_j \quad (3.15)$$

$n > 0$ System ist n -fach statisch unbestimmt

$n = 0$ System ist statisch bestimmt

$n < 0$ System ist beweglich mit Freiheitsgrad n (überbestimmt, kein Tragwerk)

Sonderfall: Räumliches Fachwerk

- Alle s Stäbe sind vom Typ S_6^*
- Alle k Knoten sind vom Typ K_3

$$n = s + a - 3 \cdot k \quad (3.16)$$

Beispiel: Rahmenkonstruktion

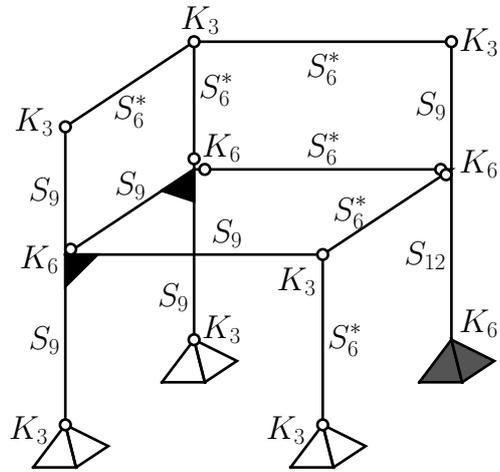


Abbildung 3.31: Beispiel für eine räumliche Rahmenkonstruktion

Beispiel: Räumliches Fachwerk

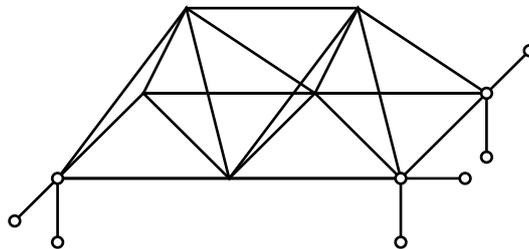


Abbildung 3.32: Beispiel für ein Raumfachwerk

Beispiel: Berechnung der Stabkräfte eines Dreibocks

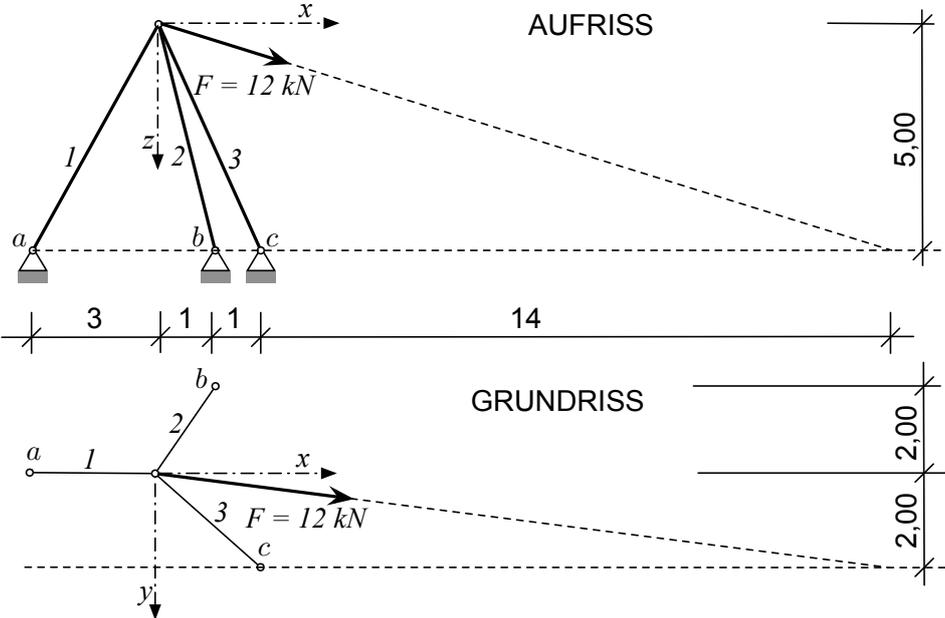


Abbildung 3.33: Dreibock mit Belastung

4 Kinematik und Arbeit ebener Scheibenketten

4.1 Polplan und Drehwinkel

4.1.1 Einzelscheibe

Zunächst betrachten wir eine starre Einzelscheibe, die an einem Punkt drehbar gelagert ist, wie in Abbildung 4.1 dargestellt. Aus Abbildung 4.1 lässt sich für einen beliebigen Punkt a auf der Scheibe

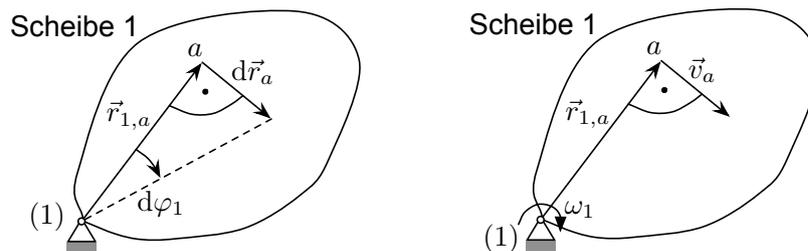


Abbildung 4.1: An einem Punkt drehbar gelagerte Einzelscheibe

ableiten, dass

$$dr_a = r_{1,a} \tan d\varphi_1 \quad (4.1)$$

Für kleine Winkel gilt $\tan d\varphi_1 \approx d\varphi_1$. Damit wird Gleichung (4.1) zu

$$dr_a = r_{1,a} d\varphi_1 \quad (4.2)$$

Betrachten wir die Veränderung der Lage des Punkts a über ein Zeitintervall dt , so ergibt sich mit Gleichung (4.2)

$$\frac{dr_a}{dt} = r_{1,a} \frac{d\varphi_1}{dt} \quad (4.3)$$

beziehungsweise

$$v_a = r_{1,a} \omega_1 \quad (4.4)$$

Darin sind v_a der Betrag der Bahngeschwindigkeit des Punkts a und ω_1 die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe 1, wie in der rechten Skizze in Abbildung 4.1 dargestellt.

Der Punkt, um den sich eine Scheibe i dreht, heißt **Hauptpol** oder Momentanpol (i).

4.1.2 Scheibenkette mit einem Freiheitsgrad

Verfügen Systeme, die aus mehreren Scheiben zusammengesetzt sind, über Freiheitsgrade, so sind sie beweglich. Für ebene Tragwerke ist uns bereits die Bestimmungsgleichung für die Ermittlung der Anzahl der Freiheitsgrade eines Stabtragwerks bekannt:

$$a + v = 3s + n \quad (4.5)$$

Für bewegliche Systeme ist $n < 0$.

Ein System mit **genau einem Freiheitsgrad** bewegt sich bei Vorgabe eines Verrückungs- oder Geschwindigkeitsparameters zwangsläufig und wird **kinematische Kette** genannt.

Beispiel: Kinematische Kette aus zwei Scheiben

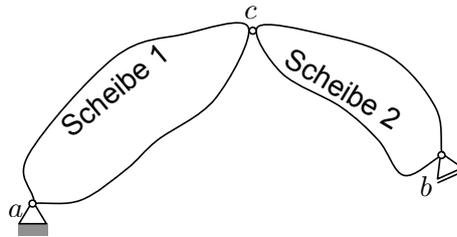
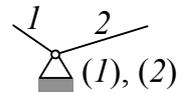


Abbildung 4.2: Kinematische Kette aus zwei Scheiben

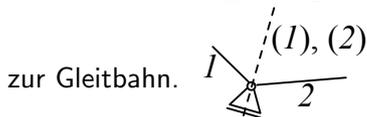
Der Punkt, in dem zwei Scheiben i und k die nach Größe und Richtung gleiche Bahngeschwindigkeit bzw. Verschiebung haben, heißt **Nebenpol** (i, k) .

Eine maßstäbliche Skizze mit den eingetragenen Haupt- und Nebenpolen heißt **Polplan**. Zur Bestimmung des Polplans gilt:

1. Ein **festes Gelenklager** ist der Hauptpol der dort angeschlossenen Scheiben.

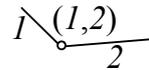


2. An einem **Gleitlager** angeschlossene Scheiben haben ihren Hauptpol auf der Senkrechten zur Gleitbahn.

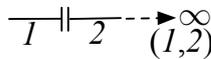


3. Der Nebenpol von zwei verbundenen Scheiben liegt bei einem

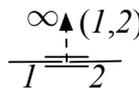
- Gelenk im Gelenk



- Querkraftnullfeld längs im Unendlichen

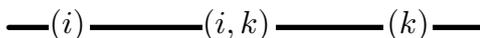


- Längskraftnullfeld quer im Unendlichen



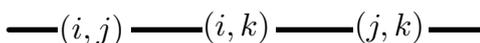
4. Satz der Haupt- und Nebenpole:

Die beiden Hauptpole (i) und (k) liegen mit dem Nebenpol (i, k) auf einer Geraden.



5. Satz der Nebenpole:

Die Nebenpole (i, j) , (i, k) und (j, k) von drei zu einer kinematischen Kette gehörenden Scheiben i , j und k liegen auf einer Geraden.



Drehwinkel

Wenn einer Scheibe i einer kinematischen Kette eine Verdrehung mit einer willkürlich gewählten Winkeländerung $d\varphi_i$ zugeordnet wird, lassen sich die Drehwinkeländerungen der anderen Scheiben eindeutig ermitteln. Liegt im Punkt c der Nebenpol (i, k) zweier Scheiben i und k , so lässt sich dessen Verschiebung dr_c sowohl bezogen auf die Drehung der Scheibe i als auch die der Scheibe k um den jeweiligen Hauptpol beschreiben:

$$dr_c = r_{i,c} d\varphi_i = r_{k,c} d\varphi_k \quad (4.6)$$

beziehungsweise

$$d\varphi_k = d\varphi_i \frac{r_{i,c}}{r_{k,c}} \quad (4.7)$$

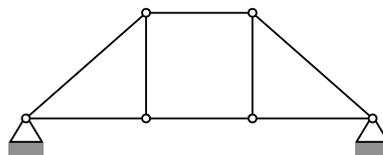
Dabei gilt:

- Liegt der Nebenpol zwischen den beiden Hauptpolen, ist $d\varphi_k$ entgegen $d\varphi_i$ gerichtet.
- Liegt der Nebenpol außerhalb der beiden Hauptpole, sind $d\varphi_k$ und $d\varphi_i$ gleichgerichtet.
- Liegt der Nebenpol im Unendlichen, so ist $d\varphi_i = d\varphi_k$.
- Liegt ein Hauptpol (i) im Unendlichen, so ist die zugehörige Verdrehung der Scheibe $d\varphi_i = 0$. Das heißt, die Scheibe rotiert nicht, sie kann nur eine Translationsbewegung ausführen.

4.1.3 Anwendung von Polplänen

Polpläne lassen sich beispielsweise anwenden

- zur Erkennung von Ausnahmesystemen, wie z.B.



- zur Bestimmung von Winkel- bzw. Winkeländerungsverhältnissen an kinematischen Ketten
z.B.
 - bei der kinematischen Schnittkraftermittlung,
 - bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung von Einfreiheitsgradsystemen,
 - für die Ermittlung von Einflussfunktionen
 - bei der Bestimmung der Traglast von Systemen nach Entstehen plastischer Gelenke

4.2 Prinzip der virtuellen Arbeit: Prinzip der virtuellen Verrückungen

- Die Arbeit, die durch alle äußeren Kräfte, d.h. Lasten und Stützkkräfte, verrichtet wird, nennen wir **äußere Arbeit**.
- Bei einer Translationsbewegung berechnet sich die Arbeit einer konstanten Kraft als Skalarprodukt aus Kraft und Weg: $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$.
- Bei einer örtlich veränderlichen Kraft ist die Änderung der Arbeit $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Eine **virtuelle Verrückung** δ ist eine

- **gedachte, willkürliche Bewegung**, die
- **klein** ist und
- **mit der Kinematik des Systems verträglich** ist.

Satz (Prinzip der virtuellen Arbeit):

Wird eine kinematische Kette, deren äußere Kräfte im Gleichgewicht stehen, virtuell bewegt, so ist die Summe der Arbeiten der äußeren Kräfte gleich Null.

ODER:

Bei einem im Gleichgewicht stehenden System ist die Summe aus allen virtuellen Arbeiten gleich Null.

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{\delta}_i = 0 \quad (4.8)$$

Aus Drehbewegungen lassen sich Verschiebungen entlang der Kreisbahn ableiten:

$$\delta_i = r_i \cdot d\varphi_i \quad (4.9)$$

Die zugehörige Arbeit ist:

$$\delta W = \sum_{i=1}^i \underbrace{\vec{F}_i \cos \gamma \cdot r_i}_{M_i} \cdot d\varphi_i \quad (4.10)$$

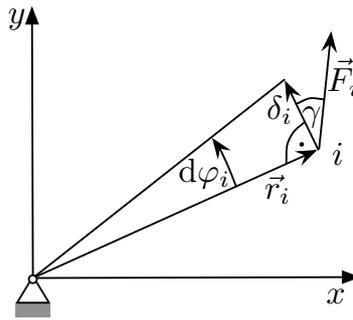


Abbildung 4.3: Arbeit einer im Punkt i auf einer drehbar gelagerten Scheibe angreifenden Kraft F_i

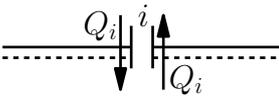
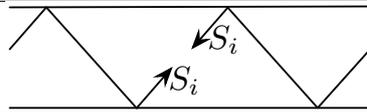
4.3 Bestimmung einer ausgewählten Stütz- oder Schnittgröße eines statisch bestimmten Tragwerks mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen kann dazu verwendet werden, Schnitt- oder Stützgrößen an ausgewählten Stellen im Tragwerk zu berechnen, ohne vorherige Kenntnis aller Stützgrößen. Dabei geht man in der folgenden Weise vor:

1. Lösen der der gesuchten Größe entsprechenden Bindung durch (gedanklichen) Einbau eines zugehörigen Nullfelds. Dadurch entsteht aus dem statisch bestimmten System eine kinematische Kette.
2. Antragen der freigesetzten Schnitt- bzw. Stützgröße als äußere Kraftgröße.
3. Entwicklung des Polplans.
4. Wahl der Verrückung einer Scheibe und Ermittlung der Verrückungen an den anderen Scheiben.
5. Aufstellen der Arbeitsgleichung und Bestimmung der gesuchten Größe.

In Tabelle 4.1 sind die zu einer entsprechenden Schnittgröße gehörigen Nullfelder zusammengestellt.

Tabelle 4.1: Schnittgrößen und zugehörige Nullfelder

Gesuchte Größe	Zugehöriges Nullfeld
Biegemoment	Gelenk 
Querkraft	Querkraftnullfeld 
Normalkraft	Normalkraftnullfeld 
Fachwerkstabkraft	Normalkraftnullfeld (bzw. Stab schneiden) 

5 Grundlagen der Kinematik und Kinetik

5.1 Einführung

Die **Kinematik** ist die Lehre der Bewegung von Körpern. Hier werden Beziehungen zwischen Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Zeit im Zusammenhang mit sich bewegenden Körpern beschrieben.

Die **Kinetik** befasst sich mit den Kräften, die auf sich bewegende Systeme wirken. Die Kinetik betrachtet also sich bewegende Körper unter Einbeziehung der Kräfte.

Kinetik und Kinematik legen Grundlagen, die für die Behandlung von Fragestellungen der Baudynamik benötigt werden. Dabei handelt es sich insbesondere um

- Trägheitswirkungen bei Massenbewegungen in geführten Bewegungen, z.B.
 - Trägheitskräfte rotierender Maschinenteile
 - Erregerkräfte einer schwingenden Glocke
 - Trägheitskräfte von durch äußere Erregung in Schwingung versetzte Tragwerksteile
- Zeitlich veränderliche Lasten:
 - Stoßlasten
 - Kontinuierliche Lasten

Es gibt eine Vielzahl von dynamisch beanspruchten Konstruktionen. Dazu gehören z.B.:

- Eisenbahn- und Straßenbrücken unter rollendem Verkehr, Kranbahnen
- Fußgängerbrücken
- Maschinenfundamente
- Türme, Brücken, Schornsteine, Seiltragwerke unter Windbeanspruchung
- Hochhäuser, Türme u.ä. unter Erdbebenanregung
- Tragwerke im Offshore-Bereich

5.2 Kinematik der ebenen Bewegung

5.2.1 Kinematik der ebenen Bewegung in kartesischen Koordinaten

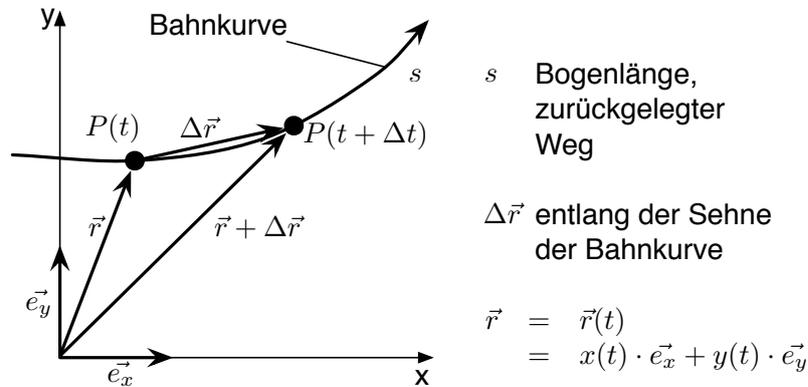


Abbildung 5.1: Bahnkurve der ebenen Bewegung in kartesischen Koordinaten

Eine Ebene sei beschrieben durch das *ortsfeste, kartesische* Koordinatensystem x, y . Die Lage einer sich in dieser Ebene auf einer gekrümmten Bahn bewegendem Punktmasse m zum Zeitpunkt t ist beschrieben durch den *Ortsvektor* \vec{r} .

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y, \quad (5.1)$$

wobei \vec{e}_x und \vec{e}_y Einheitsvektoren und $x = x(t)$, $y = y(t)$ die Komponenten des Ortsvektors als Funktionen der Zeit sind.

$$\vec{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}. \quad (5.2)$$

Die Bahnänderung $\Delta \vec{r}$ während des Zeitintervalls Δt zum Zeitpunkt t gibt die *Geschwindigkeit* des Punkts an.

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y, \quad (5.3)$$

$$\vec{v} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}. \quad (5.4)$$

Die Richtung von \vec{v} ist entlang der Bahnkurve s . Die *momentane Geschwindigkeit* ist der Betrag von \vec{v} .

$$v = \left| \dot{\vec{r}} \right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (5.5)$$

Die Änderung des Geschwindigkeitsvektors in der Zeiteinheit ist *Beschleunigung*. Die Beschleunigung der Punktmasse zum Zeitpunkt t lässt sich in der folgenden Weise beschreiben:

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}(t) \vec{e}_x + \ddot{y}(t) \vec{e}_y. \quad (5.6)$$

Der Betrag von \vec{a} ist

$$a = \left| \ddot{\vec{r}} \right| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \quad (5.7)$$

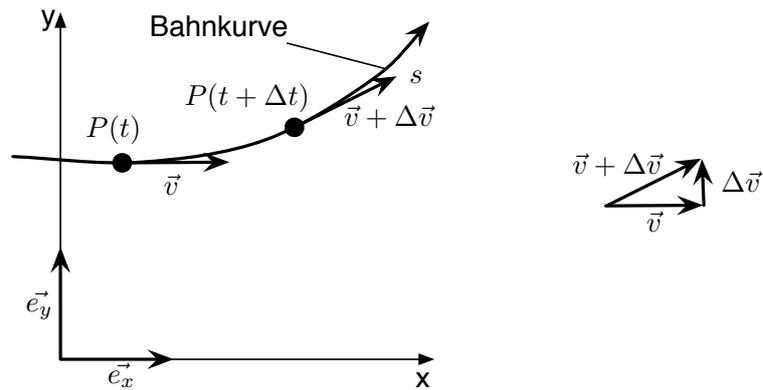


Abbildung 5.2: Geschwindigkeitsverlauf entlang der Bahnkurve in kartesischen Koordinaten

5.2.2 Kinematik der ebenen Bewegung in natürlichen Koordinaten

Die Beschreibung in kartesischen Koordinaten ist oft nicht anschaulich, da der Beschleunigungsvektor **nicht** tangential entlang der Bahnkurve gerichtet ist. Aus diesem Grund wählt man gerne sogenannte *natürliche Koordinaten*, oder *Bahnkoordinaten*. Dafür werden Einheitsvektoren im momentanen Bahnpunkt in tangentialer und normaler Richtung zur Bahnkurve eingeführt.

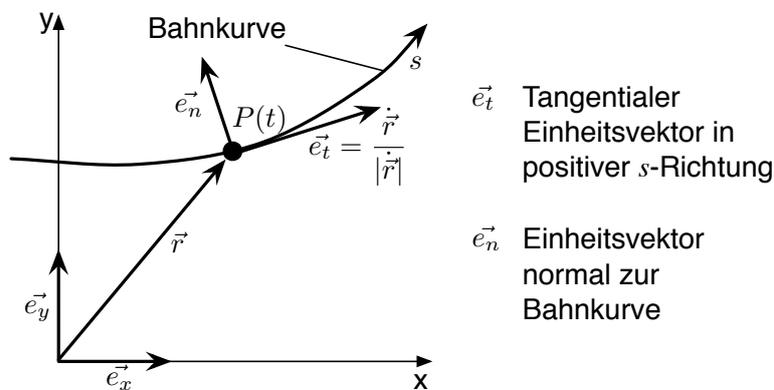


Abbildung 5.3: Bahnkurve der ebenen Bewegung in natürlichen Koordinaten

Der Geschwindigkeitsvektor ist dann

$$\vec{v}(t) = v(t) \vec{e}_t. \quad (5.8)$$

Die Tangentialgeschwindigkeit ist mit v identisch, das heißt, die Normalgeschwindigkeit ist gleich Null.

Die Ortskoordinate $s = s(t)$ ist die zum Zeitpunkt t erreichte Bahnlänge entlang der Bahnkurve.

Da die Richtungen übereinstimmen, erhält man die *momentane Geschwindigkeit* auch durch Ableitung von s nach der Zeit

$$\vec{v} = v(t) \vec{e}_t = \frac{ds}{dt} \vec{e}_t = \dot{s} \vec{e}_t. \quad (5.9)$$

Durch Differentiation des Geschwindigkeitsvektors erhalten wir den Vektor der Beschleunigungen.

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}(t) = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt} (v(t) \vec{e}_t) = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v(t) \frac{d\vec{e}_t}{dt} \quad (5.10)$$

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{e}_t + v \dot{\vec{e}}_t = \dot{v} \vec{e}_t + v \frac{d\vec{e}_t}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \dot{v} \vec{e}_t + v \frac{d\vec{e}_t}{ds} \cdot \dot{s} = \dot{v} \vec{e}_t + v^2 \frac{d\vec{e}_t}{ds}. \quad (5.11)$$

Der Vektor $\dot{v} \vec{e}_t$ verläuft in tangentialer Richtung zur Bahnkurve. Es stellt sich aber die Frage nach der Richtung des Vektors $\frac{d\vec{e}_t}{ds}$.

Wir betrachten die Ableitung des Skalarprodukts $\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t = 1$ nach s . Mit der Produktregel für ein Skalarprodukt erhalten wir

$$\frac{d}{ds} (\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t) = \frac{d\vec{e}_t}{ds} \cdot \vec{e}_t + \vec{e}_t \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{d}{ds} (1) = 0. \quad (5.12)$$

Wegen der Kommutativität des Skalarprodukts folgt weiter

$$\frac{d\vec{e}_t}{ds} \cdot \vec{e}_t + \vec{e}_t \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} = 2 \left(\vec{e}_t \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} \right) = 0 \quad (5.13)$$

und folglich

$$\vec{e}_t \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} = \vec{e}_t \cdot \dot{\vec{e}}_t = 0. \quad (5.14)$$

Das heißt, der Vektor $\dot{\vec{e}}_t$ steht senkrecht auf dem Tangenteneinheitsvektor \vec{e}_t . Der zugehörige Einheitsnormalenvektor ist

$$\vec{e}_n = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta \vec{e}_t}{\Delta s}}{\left| \frac{\Delta \vec{e}_t}{\Delta s} \right|} = \frac{\frac{d\vec{e}_t}{ds}}{\left| \frac{d\vec{e}_t}{ds} \right|} \quad (5.15)$$

Die hergeleiteten Beziehungen sind auch in Abbildung 5.4 graphisch dargestellt.

Es ergibt sich für den Nenner in Gleichung (5.15)

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{e}_t}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\vec{e}_t}{ds} \right| = \frac{1}{R} \quad (5.16)$$

Folglich ergibt sich dann aus Gleichung (5.15)

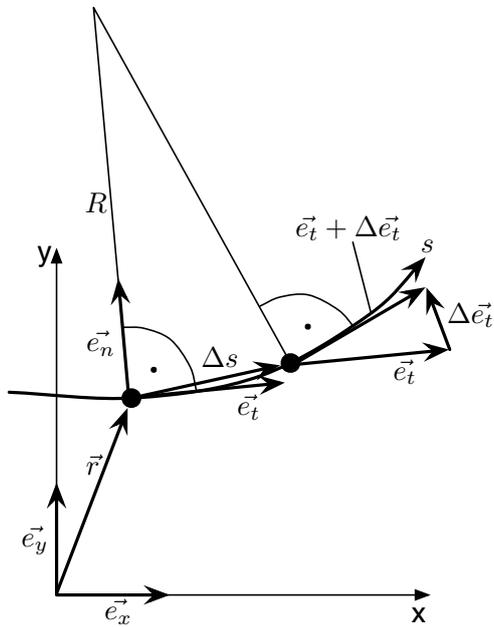
$$\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{1}{R} \vec{e}_n. \quad (5.17)$$

Damit wird aus Gleichung (5.11)

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n = \ddot{s} \vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{R} \vec{e}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (5.18)$$

Zusammenfassung der Bahnbeschreibung in natürlichen Koordinaten

$s = s(t)$ $v_t = v = \dot{s}, \quad v_n = 0$ $a_t = \dot{v} = \ddot{s}, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{s}^2}{R}$ $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$
--



R Krümmungsradius
der Bahnkurve

$$\frac{R}{\Delta s} = \frac{|\vec{e}_t|}{|\Delta \vec{e}_t|}$$

Abbildung 5.4: Einheitstangenten- und -normalenvektoren der Bahnkurve der ebenen Bewegung in natürlichen Koordinaten

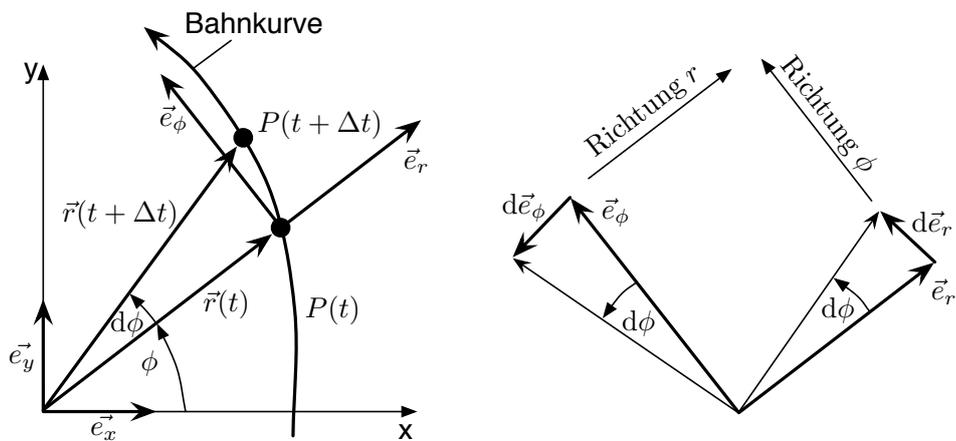


Abbildung 5.5: Beschreibung der Bahnkurve der ebenen Bewegung in Polarkoordinaten

5.2.3 Kinematik der ebenen Bewegung in Polarkoordinaten

Die Einheitsvektoren \vec{e}_r und \vec{e}_φ werden im Momentanpol jeweils in positiver Richtung von r bzw. φ aufgespannt. Bei einer Bewegung auf einer krummlinigen Bahn innerhalb des Zeitraums dt erfahren die Einheitsvektoren \vec{e}_r und \vec{e}_φ eine Richtungsänderung:

- Änderung von \vec{e}_r (in Richtung von φ):

$$d\vec{e}_r = d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \quad (5.19)$$

- Änderung von \vec{e}_φ (entgegen der Richtung von \vec{r}):

$$d\vec{e}_\varphi = -d\varphi \cdot \vec{e}_r \quad (5.20)$$

Folglich erhalten wir

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi = \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi \quad (5.21)$$

und

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_r = -\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_r \quad (5.22)$$

Zusammenfassung der Bahnbeschreibung in Polarkoordinaten

Ortsvektor:	\vec{r}	$= r \cdot \vec{e}_r$
Geschwindigkeit:	\vec{v}	$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\vec{e}}_r$ $= \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi$
	bzw.	
	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	$= v_r \cdot \vec{e}_r + v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$
	mit	
		$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \dot{\varphi}, \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$
Definition:	ω	$= \dot{\varphi}$ heißt <i>Winkelgeschwindigkeit</i>
Beschleunigung:	\vec{a}	$= \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi)$ $= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$
	bzw.	
	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$	$= a_r \cdot \vec{e}_r + a_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$
	mit	
		$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$
		$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}$
Definitionen:	$r\dot{\varphi}^2$	heißt <i>Zentripetalbeschleunigung</i>
	$2\dot{r}\dot{\varphi}$	heißt <i>Coriolisbeschleunigung</i>
	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$	heißt <i>Winkelbeschleunigung</i>

5.2.4 Sonderfälle der ebenen Bewegung

1) Bewegung auf einer Geradenbahn

- Je nachdem, ob $s = s(t)$, $v = v(t)$ oder $a = a(t)$ gegeben sind, folgen die anderen Größen durch Differentiation bzw. Integration.
- $v = konst.$ → gleichförmige Bewegung:
 $s = s_0 + vt$, $a = 0$
- $a = konst.$ → gleichmäßig beschleunigte Bewegung:
 $v = v_0 + at$, $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$

2) Bewegung auf einer Kreisbahn

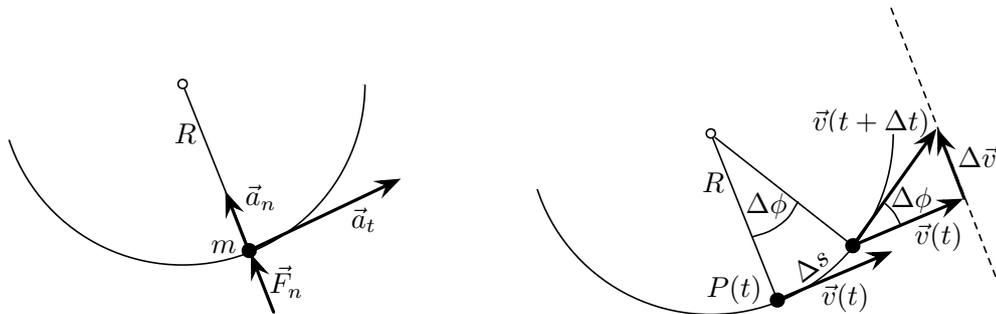


Abbildung 5.6: Beschleunigungs- und Geschwindigkeitskomponenten bei der ebenen Bewegung auf der Kreisbahn

Bewegt sich ein Massenpunkt auf einer Kreisbahn, so wirkt auf die Masse m die zum Kreismittelpunkt gerichtete (normale) Beschleunigung \vec{a}_n . In Richtung der Kreisbahn wirkt die tangentielle Beschleunigung \vec{a}_t . In der Zeit Δt wird die Bahnlänge

$$\Delta s = v \cdot \Delta t \quad (5.23)$$

überstrichen.

Die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}(t)$ und $\vec{v}(t + \Delta t)$ schließen den Winkel $\Delta\phi$ ein:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta s}{R} = \frac{v \cdot \Delta t}{R}. \quad (5.24)$$

Die Änderung der Geschwindigkeit $\Delta\vec{v}$ hat die Richtung von \vec{a}_n :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\vec{v} = d\vec{v} = \vec{a}_n dt. \quad (5.25)$$

Aus dem rechten Bild in Abbildung 5.6 lässt sich ableiten:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{R} = \frac{v \cdot \Delta t}{R} \rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \quad (5.26)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a_n = \frac{v^2}{R} \quad (5.27)$$

Der zurückgelegte Weg s lässt sich auch durch den Umfahungswinkel φ ausdrücken, woraus sich entsprechende Beziehungen für die Bahngeschwindigkeit und die Beschleunigungskomponenten ableiten lassen.

$$s = R \varphi \quad (5.28)$$

$$v = \dot{s} = R \dot{\varphi} = R \omega \quad (5.29)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{v^2}{R} = R \dot{\varphi}^2 = R \omega^2; \quad a_t = \dot{v} = R \ddot{\varphi} = R \dot{\omega} = R \alpha \quad (5.30)$$

Die in Richtung auf den Kreismittelpunkt wirkende Kraft

$$F_n = m a_n = m \frac{v^2}{R} = m R \dot{\varphi}^2 = m R \omega^2 \quad (5.31)$$

heißt *Zentripetalkraft*. Sie steht im Gleichgewicht mit der nach außen wirkenden *Zentrifugalkraft* (Fliehkraft).

5.3 Kinetik der Punktmasse

5.3.1 Kinetische Grundgesetze von NEWTON, Prinzip von D'ALEMBERT

1. **Trägheitsgesetz:** Ohne Krafteinwirkung tritt keine Änderung des Bewegungs- bzw. Ruhezustands ein. Daraus lässt sich folgern:

$$\vec{v} = \textit{konst.} \text{ heißt } \vec{a} = 0$$

Dann gilt also:

$$\vec{v} = \textit{konst.} \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{F} = 0 \quad (5.32)$$

2. **Bewegungsgesetz:** Die Änderung des Impulses ist der von außen einwirkenden Kraft proportional und gleichgerichtet. Der Impuls ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit:

$$\vec{I} = m \vec{v} \quad (5.33)$$

Daraus folgt:

$$d\vec{I} = d(m \vec{v}) \Rightarrow \vec{F} = \frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \dot{\vec{I}} \quad (5.34)$$

Für $m = \textit{konst.}$ folgt also

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \dot{\vec{v}} = m \ddot{\vec{r}} \quad (5.35)$$

3. **Wechselwirkungsgesetz:** Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, sind ihrer Größe nach gleich und entgegengesetzt gerichtet (auch Gesetz "actio et reactio").

• Prinzip von D'ALEMBERT

- Das 2. NEWTONsche Grundgesetz lässt sich auch in Form einer Gleichgewichtsgleichung anschreiben:

$$\vec{F} + (-m \vec{a}) = 0 \quad (5.36)$$

Die **Trägheitskraft** ($-m \vec{a}$) beschreibt den "Widerstand" der Masse gegen die sie beschleunigende Kraft.

5.3.2 Impulssatz

- Der Gesamtimpuls eines Systems von n Massen ist gleich der Summe der Impulse der einzelnen Massen:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{I} \quad (5.37)$$

- Ein System heißt *abgeschlossen*, wenn von außen keine Impulsänderung eingeprägt wird:

$$\vec{I} = \text{konst.}$$

- In einem *nicht abgeschlossenen* System bleibt der Gesamtimpuls nicht konstant. Die Änderung des Impulsvektors pro Zeiteinheit ist gleich der Resultierenden der von außen angreifenden Kräfte (bei $m = \text{konst.}$).

→ NEWTONsches Bewegungsgesetz:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{I}} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \\ \dot{\vec{I}} &= m \vec{a} = \vec{F}, \quad \vec{a} = \vec{a}_s \end{aligned} \quad (5.38)$$

Durchläuft eine Punktmasse bzw. der Schwerpunkt eines Punkthaufens die Wegstrecke ds in der Zeit dt und ist $\vec{F}(t)$ die Resultierende aller einwirkenden Kräfte, so ist die *Impulsänderung*:

$$\vec{F} dt = d\vec{I} \quad (5.39)$$

Durch Integration von $t = t_0$ bis $t = t_1$ erhält man bei konstanter Masse den **Impulssatz in integraler Form**:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt = \vec{I}_1 - \vec{I}_0 = m (\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \quad (5.40)$$

bzw.

$$m \vec{v}_1 = m \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt \quad (5.41)$$

Wirkt \vec{F} **nicht** in gleicher Richtung wie \vec{v}_0 , so ändert sich der Impuls hinsichtlich Intensität **und** Richtung.

Die oben hergeleiteten Beziehungen sind in Abbildung 5.7 graphisch dargestellt.

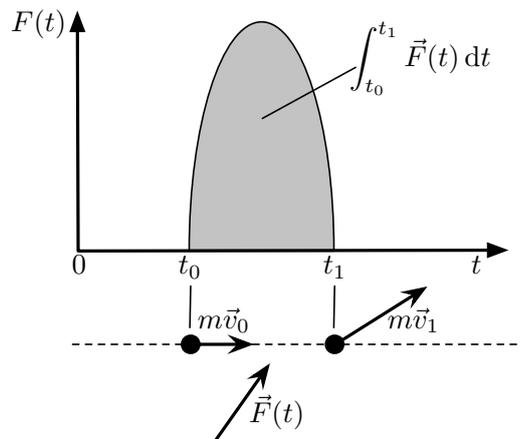


Abbildung 5.7: Impuls als Integral des Kraft-Zeit-Verlaufs

5.4 Kinetik des starren Körpers

5.4.1 Impulssatz für den starren Körper

Bei den nachfolgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf die Betrachtung der Bewegung eines starren Körpers in der Ebene, die sich durch ein im Raum festes, kartesisches Koordinatensystem beschreiben lässt.

Wie in [Abbildung 5.8](#) dargestellt, sollen auf den betrachteten Körper die äußeren Kräfte \vec{F}_i , deren Resultierende \vec{F}_s durch den Schwerpunkt S verläuft, wirken. Die Lage des Schwerpunkts ist durch seinen Ortsvektor \vec{r}_s gegeben. Infolge der einwirkenden äußeren Kräfte erfährt der Körper eine Beschleunigung $\vec{a}_s = \vec{a}_s(t)$, die wie die Resultierende der Kräfte \vec{F}_s gerichtet ist.

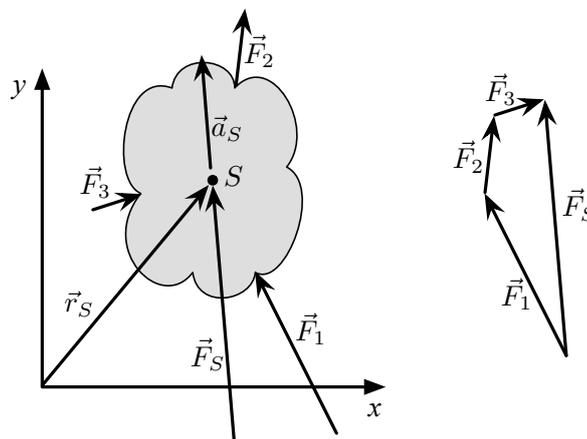


Abbildung 5.8: Starrkörper mit in der Ebene wirkenden Kräften, deren Resultierende durch den Schwerpunkt verläuft

Nun betrachten wir einen Körperpunkt M mit der infinitesimalen Masse dm . Die Lage des Körperpunkts in der Ebene ist beschrieben durch seinen Ortsvektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$, wie in [Abbildung 5.9](#) gezeigt.

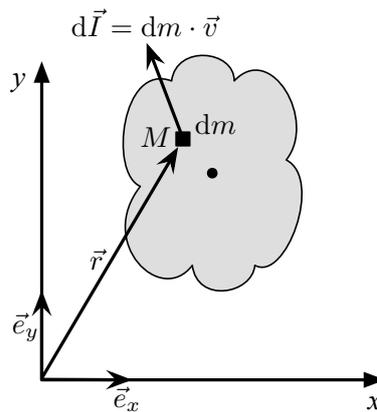


Abbildung 5.9: Starrkörper mit infinitesimalem Massenelement in der Ebene

Der Impuls der Punktmasse dm

$$d\vec{I}(t) = dm \cdot \vec{v} \quad (5.42)$$

hat die Richtung der momentanen Geschwindigkeit von dm

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \quad (5.43)$$

Die differentielle Impulsgröße eines Massenelements ist damit

$$d\vec{I}(t) = dm \cdot \vec{v} = dm \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (dm \cdot \vec{r}) \quad (5.44)$$

Den Gesamtimpuls des Starrkörpers erhält man durch Integration der Impulse aller Massenelemente:

$$\vec{I}(t) = \int_m d\vec{I} = \int_m \vec{v} \cdot dm = \frac{d}{dt} \int_m \vec{r} dm = \iiint_V \vec{v} \cdot \rho dx dy dz \quad (5.45)$$

Die Lage des Schwerpunkts lässt sich ermitteln durch

$$\vec{r}_s = \frac{1}{m} \int_m \vec{r} dm = \frac{1}{m} \iiint_V \vec{r} \cdot \rho dx dy dz \rightarrow m \vec{r}_s = \int_m \vec{r} dm \quad (5.46)$$

$$\Rightarrow 0 = \iiint_V \vec{r} \cdot \rho dx dy dz - m \vec{r}_s$$

$$= \iiint_V \rho \vec{r} dx dy dz - \vec{r}_s \iiint_V \rho dx dy dz$$

$$0 = \iiint_V \rho (\vec{r} - \vec{r}_s) dx dy dz \quad (5.47)$$

Der Gesamtimpuls \vec{I} lässt sich mit Hilfe des Ortsvektors \vec{r}_s des Schwerpunkts darstellen als

$$\vec{I}(t) = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{r}_s) = m \frac{d\vec{r}_s}{dt}$$

$$\vec{I}(t) = m \vec{v}_s \quad (5.48)$$

Für $m = \textit{konst.}$ folgt mit dem 2. NEWTONschen Grundgesetz

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \dot{\vec{I}}$$

der **Impulssatz für den starren Körper:**

$$\vec{F}_s(t) = \frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}(m \vec{r}_s) = m \ddot{\vec{r}}_s = m \dot{\vec{v}}_s \quad (5.49)$$

$$\vec{F}_s(t) = m \vec{a}_s \quad (5.50)$$

- Der Schwerpunkt eines Körpers erfährt eine Beschleunigung, als ob die Resultierende aller äußeren Kräfte im Schwerpunkt angreift.
- Bezüglich ihrer Translationsbewegung kann eine starre Körpermasse wie eine im Schwerpunkt liegende Punktmasse behandelt werden.

5.4.2 Moment und Drehimpuls

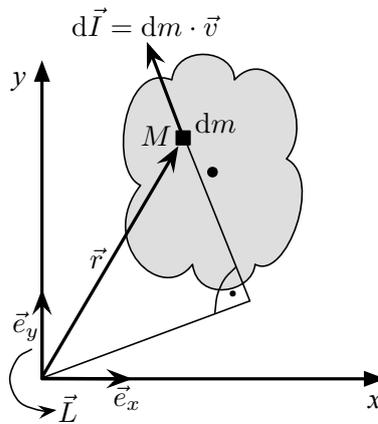


Abbildung 5.10: Moment des Massenpunktes in der Ebene

Der Impulssatz besagt, dass eine auf die Punktmasse dm wirkende Kraft der differentiellen Impulsänderung pro Zeiteinheit entspricht. Daraus folgt für das Moment dieser Kraft bezogen auf den Koordinatenursprung

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d}{dt} (dm \cdot \vec{v}) \quad (5.51)$$

Damit ergibt sich folglich das auf den Koordinatenursprung bezogene Moment des Starrkörpers durch Integration der Momente aller Massepunkte:

$$\vec{M} = \int_m \vec{r} \times \frac{d}{dt} (dm \cdot \vec{v}) = \int_m \vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{v} dm \quad (5.52)$$

\vec{M} steht senkrecht auf der von \vec{r} und \vec{v} aufgespannten Ebene.

Analog zum Moment einer Kraft um eine Drehachse lässt sich das Moment eines Impulses als **Drehimpuls** (Impulsmoment, Drall) definieren:

$$\vec{L} = \int_m \vec{r} \times dm \cdot \vec{v} = \iiint_V \rho \cdot \vec{r} \times \vec{v} dx dy dz \quad (5.53)$$

Durch Erweiterung des Integranden in Gleichung (5.52) mit

$$\vec{v} \times \vec{v} = \dot{\vec{r}} \times \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} = 0$$

erhalten wir

$$\vec{M} = \int_m \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{v} \right] dm = \int_m \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times dm \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt} (dm \cdot \vec{v}) \right] \quad (5.54)$$

Durch Anwendung der Produktregel für die Ableitung eines Vektorprodukts ergibt sich der **Drehimpulssatz** oder **Drallsatz**:

$$\vec{M} = \int_m \frac{d}{dt} (\vec{r} \times dm \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt} \int_m (\vec{r} \times dm \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} \quad (5.55)$$

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Moment aller am Körper angreifenden Kräfte. Moment und Drehimpuls beziehen sich auf ein und denselben Punkt (gleiche Drehachse).

Sind keine äußeren Kräfte wirksam, oder ist deren resultierendes Moment gleich Null, bleibt der Drehimpuls erhalten (Drehimpulserhaltungssatz)

$$\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{konst.} \quad (5.56)$$

5.4.3 Drehimpuls und Massenträgheitsmoment

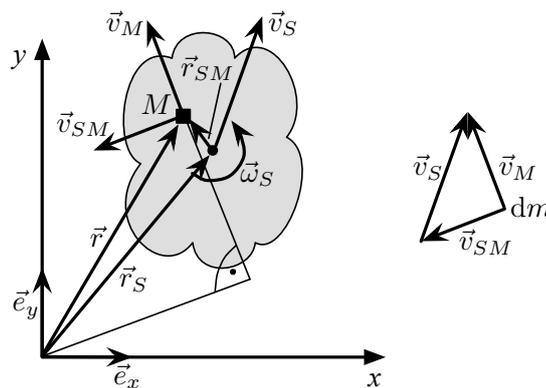


Abbildung 5.11: Komponenten zur Beschreibung der Bewegung eines Massenpunktes in der Ebene

Für die Translationsbewegung haben wir mit dem Impulssatz einen Zusammenhang zwischen einer auf einen Körper wirkenden Kraft und dem Bewegungszustand des Körpers hergestellt. Wir wollen nun in Analogie dazu eine Drehbewegung sowie den Drehimpuls betrachten.

Jede Bewegung eines Körpers in der Ebene lässt sich beschreiben durch eine Translation sowie eine Rotation um den Schwerpunkt S . Die translatorische Komponente der Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes M entspricht der Geschwindigkeit des Schwerpunkts \vec{v}_S . Die momentane Umfangsgeschwindigkeit des Punktes M um den Schwerpunkt S infolge der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_S$ ist

$$\vec{v}_{SM} = \vec{\omega}_S \times \vec{r}_{SM}; \quad \vec{r}_{SM} = \vec{r} - \vec{r}_S \quad (5.57)$$

Wie in [Abbildung 5.11](#) dargestellt, lässt sich die resultierende Geschwindigkeit des Punktes M durch Superposition der beiden Geschwindigkeitskomponenten \vec{v}_S und \vec{v}_{SM} ermitteln.

$$\vec{v} = \vec{v}_M = \vec{v}_S + \vec{v}_{SM} = \vec{v}_S + \vec{\omega}_S \times \vec{r}_{SM} \quad (5.58)$$

Unter Verwendung der Definition des Drehimpulses (5.53) erhalten wir den Drehimpuls für die Rotation um den Schwerpunkt:

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_S &= \iiint_V \rho \cdot \vec{r}_{SM} \times \vec{v} \, dx \, dy \, dz = \iiint_V \rho \cdot \vec{r}_{SM} \times (\vec{v}_S + \vec{\omega}_S \times \vec{r}_{SM}) \, dx \, dy \, dz \\
 &= \iiint_V \rho \cdot \vec{r}_{SM} \times \vec{v}_S \, dx \, dy \, dz + \iiint_V \rho \cdot \vec{r}_{SM} \times (\vec{\omega}_S \times \vec{r}_{SM}) \, dx \, dy \, dz \\
 &= \underbrace{\iiint_V \rho \cdot \vec{r}_{SM} \, dx \, dy \, dz}_{=0 \text{ (5.47)}} \times \vec{v}_S + \iiint_V \rho \left[\underbrace{(\vec{r}_{SM}^T \vec{r}_{SM})}_{=|\vec{r}_{SM}|^2=r_{SM}^2} \cdot \vec{\omega}_S - (\vec{r}_{SM}^T \vec{\omega}_S) \cdot \vec{r}_{SM} \right] \, dx \, dy \, dz \\
 &= \underbrace{\iiint_V \rho \left[|\vec{r}_{SM}|^2 [I] - \vec{r}_{SM} \vec{r}_{SM}^T \right] \, dx \, dy \, dz}_{[\Theta_S]} \cdot \vec{\omega}_S \\
 &\quad \boxed{\vec{L}_S = [\Theta_S] \vec{\omega}_S} \tag{5.59}
 \end{aligned}$$

Die Matrix $[\Theta_S]$ der Größe 3×3 wird als **Trägheitsmomententensor** bezeichnet.

Durch Einsetzen von Gleichung (5.59) in den Drehimpulssatz (5.55) erhält man

$$\boxed{\vec{M}_S = \dot{\vec{L}}_S = \frac{d\vec{L}_S}{dt} = \frac{d}{dt} ([\Theta_S] \vec{\omega}_S) = [\Theta_S] \dot{\vec{\omega}}_S} \tag{5.60}$$

Schreibt man den Trägheitsmomententensor aus, so erhält man seine einzelnen Elemente:

$$[\Theta_S] = \iiint_V \rho \begin{bmatrix} (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2 & -(x - x_S)(y - y_S) & -(x - x_S)(z - z_S) \\ SYM. & (x - x_S)^2 + (z - z_S)^2 & -(y - y_S)(z - z_S) \\ & (x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 & \end{bmatrix} \, dx \, dy \, dz \tag{5.61}$$

$$[\Theta_S] = \begin{bmatrix} \Theta_{xx,S} & \Theta_{xy,S} & \Theta_{xz,S} \\ \Theta_{yy,S} & \Theta_{yz,S} & \\ SYM. & \Theta_{zz,S} & \end{bmatrix} \tag{5.62}$$

Die Diagonalelemente des Trägheitsmomententensors heißen **Massenträgheitsmomente**, die anderen Elemente werden **Deviationsmomente** genannt.

Der Trägheitsmomententensor hat folgende Eigenschaften.

1. Für jeden Körper gibt es mindestens ein Koordinatensystem (x', y', z') mit der Eigenschaft, dass in diesem Koordinatensystem alle Deviationsmomente verschwinden. $[\Theta_S]$ ist dann eine Diagonalmatrix. die Achsen x', y', z' heißen **Hauptträgheitsachsen**.
2. Alle Achsen normal auf eine Symmetrieebene sind Hauptträgheitsachsen.
3. Für jede Hauptträgheitsachse werden die Deviationsmomente zu Null.
4. Bei Drehung um eine Hauptträgheitsachse besitzt der Drehimpuls dieselbe Richtung wie der Winkelgeschwindigkeitsvektor.

Beispiel: Drehimpuls für eine Scheibe mit konstanter Dichte und konstanter Dicke bei Drehung um eine Achse, die durch den Schwerpunkt verläuft und normal zur Scheibe ist (x -Achse wie in Abbildung 5.12)

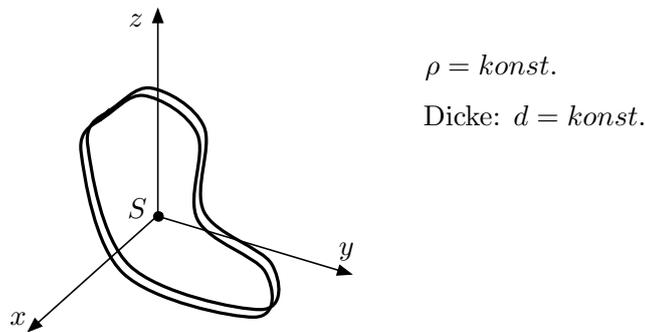


Abbildung 5.12: Scheibe mit Drehachse durch den Schwerpunkt

Für die in Abbildung 5.12 dargestellte Scheibe ist die yz -Ebene eine Symmetrieebene. Die x -Achse ist folglich eine Hauptträgheitsachse. Bei Drehung um die x -Achse ist der Winkelgeschwindigkeitsvektor:

$$\vec{\omega}_S = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \vec{v}_S = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Theta_{xx,S} \neq 0; \quad \Theta_{xy,S} = \Theta_{xz,S} = 0$$

$$\rightarrow \vec{L}_S = \begin{bmatrix} \Theta_{xx,S} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{yy,S} & \Theta_{yz,S} \\ 0 & \Theta_{yz,S} & \Theta_{zz,S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Theta_{xx,S} \cdot \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\Theta_{xx,S}$ ist unabhängig von der Wahl der Richtungen für y, z bzw. y', z'

Trägheitsmomente bezogen auf eine beliebige Hauptachse

Die Drehachse muss nicht zwangsläufig durch den Schwerpunkt verlaufen. Aus diesem Grund betrachten wir nun den in Abbildung 5.13 skizzierten Fall, dass die Drehachse normal zur Symmetrieebene ist und durch einen Punkt A , der nicht mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, verläuft.

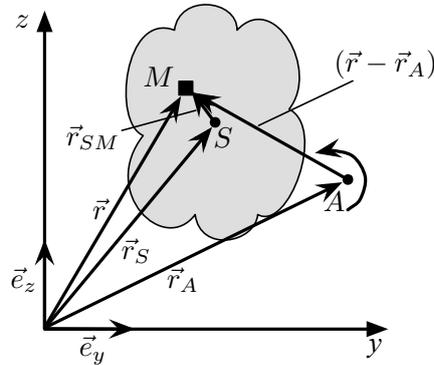


Abbildung 5.13: Starrkörper mit Drehachse durch einen Punkt außerhalb des Schwerpunkts

$$\Theta_{xx,A} = \iiint_V \rho \left[(y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 \right] dx dy dz$$

$$\downarrow \leftarrow (y - y_A)^2 = (y - y_S + y_S - y_A)^2 = (y - y_S)^2 + 2(y - y_S)(y_S - y_A) + (y_S - y_A)^2$$

$$\downarrow \leftarrow (z - z_A)^2 = (z - z_S + z_S - z_A)^2 = (z - z_S)^2 + 2(z - z_S)(z_S - z_A) + (z_S - z_A)^2$$

$$\begin{aligned} \Theta_{xx,A} &= \underbrace{\iiint_V \rho \left[(y - y_S)^2 + (z - z_S)^2 \right] dx dy dz}_{=\Theta_{xx,S}} \\ &+ 2(y_S - y_A) \underbrace{\rho \iiint_V (y - y_S) dx dy dz}_{=0} \\ &+ 2(z_S - z_A) \underbrace{\rho \iiint_V (z - z_S) dx dy dz}_{=0} \\ &+ \left[(y_S - y_A)^2 + (z_S - z_A)^2 \right] \underbrace{\iiint_V \rho dx dy dz}_{=m} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \Theta_{xx,A} = \underline{\underline{\Theta_{xx,S} + m \cdot \left[(y_S - y_A)^2 + (z_S - z_A)^2 \right]}}$$

Die für eine Hauptachse x durch einen Punkt A hergeleiteten Beziehungen lassen sich auf Hauptachsen y und z übertragen:

Satz von Steiner: Für Hauptachsen x, y, z mit einem Koordinatenursprung im Punkt A gilt:

$$\begin{aligned}\Theta_{xx,A} &= \Theta_{xx,S} + m \left[(y_S - y_A)^2 + (z_S - z_A)^2 \right] \\ \Theta_{yy,A} &= \Theta_{yy,S} + m \left[(x_S - x_A)^2 + (z_S - z_A)^2 \right] \\ \Theta_{zz,A} &= \Theta_{zz,S} + m \left[(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2 \right]\end{aligned}\tag{5.63}$$

5.5 Schnittgrößen an bewegten Systemen

Zunächst ist zur Bestimmung der Schnittgrößen die Bewegungsgleichung zu lösen. Aus dieser Lösung kann dann nach dem D'Alembertschen Prinzip die Belastung ermittelt werden. Für diese Belastung können anschließend die Schnittgrößenfunktionen bestimmt werden.

5.5.1 Ermittlung der Belastung bei Drehung um einen festen Punkt

Ausgangspunkt für unsere Überlegungen ist die Beschreibung der Bewegung eines Massepunkts auf einer Kreisbahn.

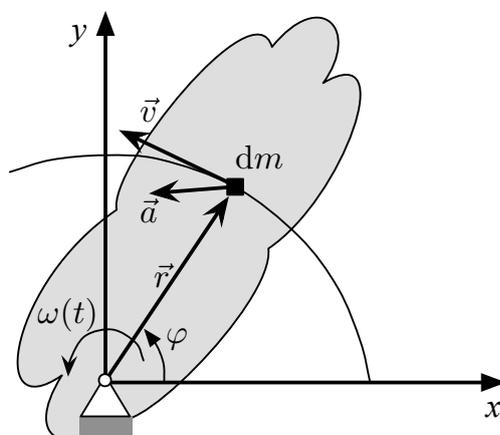


Abbildung 5.14: Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Massepunkts auf einer drehbar gelagerten Einzelscheibe

Der Radius r ist bei der Bewegung auf einer Kreisbahn konstant. Daher gilt

$$\dot{r} = 0 \quad \ddot{r} = 0 \quad (5.64)$$

Weiterhin definieren wir die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = \begin{Bmatrix} e_{r,x} \\ e_{r,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{Bmatrix} e_{\varphi,x} \\ e_{\varphi,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad (5.65)$$

Der Geschwindigkeitsvektor ist

$$\vec{v} = r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = \omega \begin{Bmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad (5.66)$$

während der Beschleunigungsvektor durch

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \underbrace{-r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r}_{\text{Radialbeschleunigung}} + \underbrace{r\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi}_{\text{Tangentialbeschleunigung}} = \dot{\varphi}^2 \begin{Bmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \end{Bmatrix} + \ddot{\varphi} \begin{Bmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{Bmatrix} \\
 &= -\omega^2 \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \dot{\omega} \begin{Bmatrix} -y \\ x \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

gegeben ist.

Infolge der Beschleunigung wirkt auf das Massenelement dm eine Trägheitskraft $d\vec{P}$, die der Beschleunigung entgegen gerichtet ist.

$$d\vec{P} = -\vec{a} dm = \left(\omega^2 \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \dot{\omega} \begin{Bmatrix} -y \\ x \end{Bmatrix} \right) dm \tag{5.68}$$

Diese Trägheitskräfte wirken auf alle Massenelemente einer bewegten Konstruktion und können wie äußere Lasten behandelt werden, die im Inneren des Systems entsprechende Schnittgrößen verursachen. Diese Schnittgrößen lassen sich über die bekannten Zusammenhänge zwischen Belastungsfunktion und den entsprechenden Schnittgrößenfunktionen berechnen.

5.6 Energiesatz (Arbeitssatz)

Das *Arbeitsvermögen* eines Körpers mit der Masse m wird als *Energie* bezeichnet.

Es gibt zwei Formen der mechanischen Energie:

- *Kinetische Energie* ist das Arbeitsvermögens eines Körpers im Bewegungszustand.
- *Potentielle Energie* ist das Arbeitsvermögens eines Körpers im Lage- oder Ruhezustand (Lageenergie).

5.6.1 Kinetische Energie – allgemein

Definition:

Für eine Punktmasse m , die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, heißt die Größe

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (5.69)$$

kinetische Energie.

Definition:

Für einen starren Körper mit dem Volumen V wird die kinetische Energie definiert durch

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \|\vec{v}\|^2 dx dy dz \quad (5.70)$$

5.6.2 Kinetische Energie bei der Translationsbewegung

Bei einer Translationsbewegung lässt sich der Bewegungszustand eines Starrkörpers durch die Bewegung des Schwerpunkts, dessen Lage durch den Ortsvektor $\{r_S\}$ gegeben ist, beschreiben. Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist das 2. NEWTONsche Grundgesetz (Wirkt eine äußere Kraft auf einen Körper, so wird dieser beschleunigt. Die Kraft ist dieser Beschleunigung proportional):

$$\{F_S\} = \frac{d}{dt} m \{v_S\} = \frac{d\{v_S\}}{dt} m$$

Bildet man das Skalarprodukt dieser Gleichung mit $d\{r_S\}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \{F_S\} \cdot d\{r_S\} &= m \cdot \frac{d\{v_S\}}{dt} \cdot d\{r_S\} = m \underbrace{\frac{d\{r_S\}}{dt}}_{=\{v_S\}} \cdot d\{v_S\} = m \cdot \{v_S\} \cdot d\{v_S\} \end{aligned} \quad (5.71)$$

Das Skalarprodukt $\{v_S\} \cdot d\{v_S\}$ ist definiert als

$$\{v_S\} \cdot d\{v_S\} = |\{v_S\}| \cdot |d\{v_S\}| \cos \alpha$$

Da die Vektoren $\{v_S\}$ und $d\{v_S\}$ bei einer Translationsbewegung die gleiche Richtung haben, ist der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel α gleich 0 und somit ist $\cos \alpha = 1$.

Folglich erhalten wir aus Gleichung (5.71)

$$\{F_S\} \cdot d\{r_S\} = m \cdot v_S \cdot dv_S \quad (5.72)$$

mit den Beträgen der beiden Geschwindigkeitsvektoren

$$v_S = |\{v_S\}| \text{ und } dv_S = |d\{v_S\}|$$

Durch Integration über ein Zeitintervall t_1 bis t_2 bzw. die zugehörigen Ortsvektoren $\{r_S(t_1)\}$, $\{r_S(t_2)\}$ erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\{r_S(t_1)\}}^{\{r_S(t_2)\}} \{F_S\} \cdot d\{r_S(t)\} &= \int_{v_S(t_1)}^{v_S(t_2)} m v_S(t) dv_S(t) \\ &= \frac{m}{2} v_S^2(t) \Big|_{v_S(t_1)}^{v_S(t_2)} = \frac{m}{2} (v_S^2(t_2) - v_S^2(t_1)) \\ &= E_{trans,2} - E_{trans,1} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Das heißt, die Arbeit der resultierenden, im Schwerpunkt angreifenden Kraft $\{F_S\}$ auf einen starren Körper entlang der Bahnkurve des Schwerpunkts S ist gleich der Änderung der Translationsenergie des Körpers.

5.6.3 Kinetische Energie bei der Rotationsbewegung

Eine Drehbewegung um den Schwerpunkt eines Starrkörpers lässt sich beschreiben durch

$$\vec{M}_S = \Theta_S \ddot{\vec{\varphi}}_S = \Theta_S \dot{\vec{\omega}}_S = \Theta_S \vec{\alpha}_S$$

Transponieren und Multiplikation der Gleichung mit $\vec{\omega}_S dt = d\vec{\varphi}_S$ ergibt

$$\begin{aligned} \vec{M}_S^T &= \Theta_S \frac{d\vec{\omega}_S}{dt} \vec{\omega}_S dt = \Theta_S \vec{\omega}_S d\vec{\omega}_S = \frac{1}{2} \Theta_S d\vec{\omega}_S^2 \\ &\longrightarrow \vec{M}_S^T d\vec{\varphi}_S = dE_{rot} \end{aligned} \quad (5.74)$$

Die Integration über ein Zeitintervall t_1 bis t_2 bzw. die zugehörigen Drehwinkel $\vec{\varphi}_1$, $\vec{\varphi}_2$ erhält man

$$\int_{\vec{\varphi}_1}^{\vec{\varphi}_2} \vec{M}_S^T d\vec{\varphi}_S = E_{rot,2} - E_{rot,1} \quad (5.75)$$

Die Arbeit des resultierenden Moments \vec{M}_S bezüglich des Schwerpunkts entlang des Drehwinkels $\vec{\varphi}_S$ ist gleich der Änderung der Rotationsenergie.

5.7 Potentielle Energie

Wird ein Körper mit der Masse m auf die Höhenlage h angehoben, ist hierzu die Arbeit

$$G \cdot h = m g h$$

erforderlich.

In der Höhe h besitzt der Körper dann (bezogen auf das Ausgangsniveau) die potentielle Energie

$$E_{pot} = m g h \quad (5.76)$$

Beispiel: Freier Fall

- Während des Falls wird potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. Es gilt (unter Vernachlässigung der Reibung) für jeden Zwischenzustand:

$$E = m g h + \frac{1}{2} m v^2 = E_{pot} + E_{kin} = konst. \quad (5.77)$$

- Bei Aufprall auf das Ausgangsniveau ist die potentielle Energie vollständig in kinetische Energie umgesetzt.

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 \implies v = \sqrt{2 g h} \quad (5.78)$$

- Beim Aufschlagen wird die kinetische Energie vollständig in irreversible Energieformen (am Ende in Wärme) umgewandelt.

Beispiel: Federspannung

- Wird eine Feder durch eine Kraft gespannt, besitzt die (innere) Federkraft ebenfalls potentielle Energie, also ein Arbeitsvermögen. Sie ist bei elastischem Verhalten gleich der aufgewandten Formänderungsarbeit

$$E_{pot} = W_{F_{trans}} = \frac{k q^2}{2}, \quad (5.79)$$

wobei k die Federkonstante (Kraft je Einheitsverschiebung $[\frac{N}{m}]$) ist und q den Federweg bezeichnet.

- Für die Drehfeder gilt

$$E_{pot} = W_{M_{rot}} = \frac{k_{\varphi} \varphi^2}{2}. \quad (5.80)$$

Die Drehfederkonstante k_{φ} beschreibt ein Moment je Einheitsverdrehung $[\frac{Nm}{rad}]$, während φ die Federverdrehung ist.

Die Zusammenhänge der Gleichungen (5.79) und (5.80) sind graphisch im Kraft-Verformungsdiagramm in Abbildung 5.15 dargestellt.

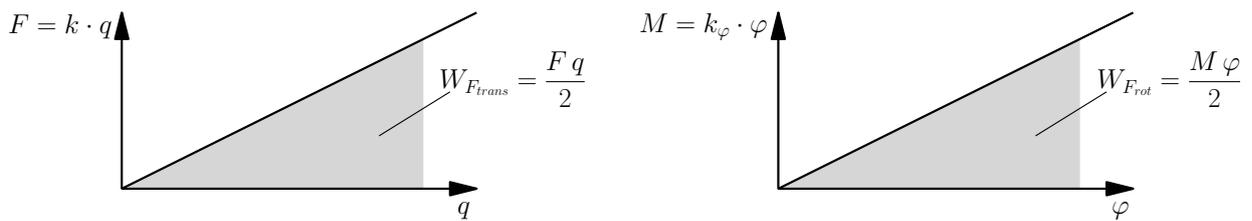


Abbildung 5.15: Kraftgrößen-Verformungsdiagramm – links für die Translationsbewegung, rechts für die Drehbewegung

5.8 Freie harmonische Schwingung

Die für das Feder-Masse-System hergeleitete *Bewegungsgleichung*

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (5.81)$$

ist eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zur Lösung verwenden wir den Ansatz

$$x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t \quad (5.82)$$

mit den Ableitungen

$$\dot{x} = \omega_0 A \cos \omega_0 t - \omega_0 B \sin \omega_0 t \quad (5.83)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 A \sin \omega_0 t - \omega_0^2 B \cos \omega_0 t \quad (5.84)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (5.82) und (5.84) in Gleichung (5.81) erhalten wir

$$-m \omega_0^2 A \sin \omega_0 t - m \omega_0^2 B \cos \omega_0 t + k A \sin \omega_0 t + k B \cos \omega_0 t = 0$$

oder

$$(-m \omega_0^2 + k) A \sin \omega_0 t + (-m \omega_0^2 + k) B \cos \omega_0 t = 0 \quad (5.85)$$

Gleichung (5.85) muss zu jedem Zeitpunkt t erfüllt sein. Für die nicht-triviale Lösung muss gelten, dass

$$-m \omega_0^2 + k = 0$$

beziehungsweise

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.86)$$

Die Größe ω_0 ist die **Eigenkreisfrequenz** des ungedämpften Einfreiheitsgradsystems, mit dem System um seine Nulllage schwingt. Nach der Zeitdauer T ist eine Schwingungsperiode abgeschlossen. T wird daher als **Schwingungsdauer** oder **Periode** bezeichnet.

$$\omega_0 T = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5.87)$$

Der Kehrwert von T ist die Eigenfrequenz f_0 . Sie gibt also die Anzahl der Schwingungen oder Perioden pro Sekunde an.

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.88)$$

Um nun die Koeffizienten A und B zu bestimmen, bedienen wir uns der Anfangsbedingungen

$$x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = v_0 \quad (5.89)$$

$$\rightarrow x(t=0) = x_0 = A \cdot 0 + B \cdot 1 \rightarrow B = x_0 \quad (5.90)$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 = \omega_0 A \cdot 1 - \omega_0 B \cdot 0 \rightarrow A = \frac{v_0}{\omega_0} \quad (5.91)$$

Durch Einsetzen der Lösungen für A und B , (5.90) und (5.91) in unsere Ansatzfunktion (5.82) erhalten wir die Lösung der Differentialgleichung

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t \quad (5.92)$$

Drücken wir nun die Anfangsverschiebung in der Form

$$x_0 = \hat{x} \sin \varphi_0 \quad (5.93)$$

aus, so ergibt sich

$$\rightarrow v_0 = \omega_0 \hat{x} \cos \varphi_0 \quad \rightarrow \frac{v_0}{\omega_0} = \hat{x} \cos \varphi_0 \quad (5.94)$$

Mit diesen Ausdrücken erhalten wir eine zweite Form unserer Lösung:

$$x(t) = \hat{x} \cos \varphi_0 \sin \omega_0 t + \hat{x} \sin \varphi_0 \cos \omega_0 t = \hat{x} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.95)$$

Aus den Gleichungen (5.93) und (5.94) folgt

$$\begin{aligned} x_0^2 &= \hat{x}^2 \sin^2 \varphi_0, \quad \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 = \hat{x}^2 \cos^2 \varphi_0 \\ \rightarrow x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 &= \hat{x}^2 \underbrace{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0}_{=1} \\ \rightarrow \hat{x} &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \end{aligned} \quad (5.96)$$

wobei \hat{x} die Amplitude der freien Schwingung ist und

$$\frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} = \tan \varphi_0 = \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \quad (5.97)$$

den Phasenwinkel beschreibt. Für $t = 0$ wird Gleichung (5.95) zu

$$x(t=0) = \hat{x} \sin \varphi_0$$

Wir betrachten nun eine Scheibe, die sich mit konstanter Kreisfrequenz ω dreht. Wenn wir die Auslenkung eines beliebigen Punkts auf der Scheibe über die Zeit verfolgen, so erhalten wir die in Abbildung 5.16 dargestellte Diagramm, aus dem sich die Zusammenhänge der in diesem Abschnitt eingeführten Größen ablesen lassen.

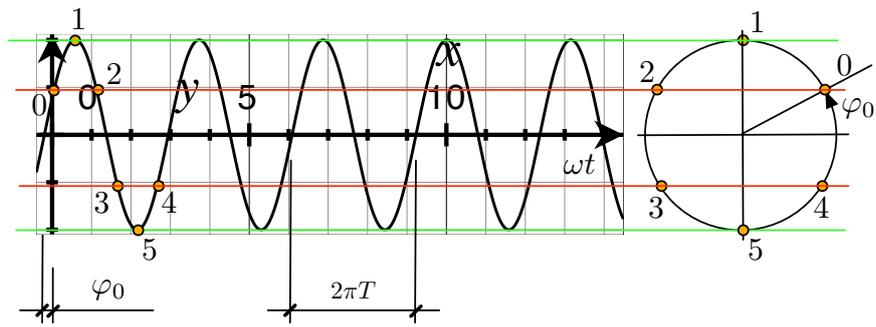


Abbildung 5.16: Projektion der vertikalen Auslenkung eines Punkts auf einer rotierenden Scheibe über die Zeit

Beispiel: Mathematisches Pendel

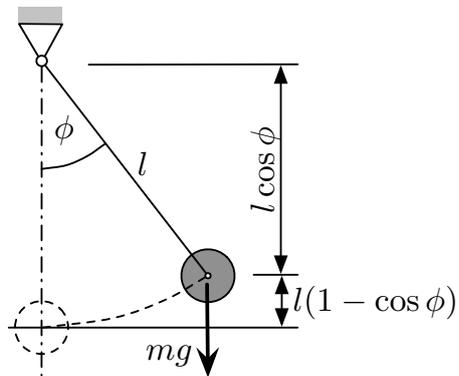


Abbildung 5.17: Pendel mit starrem, masselosem Faden

Beispiel: Träger auf elastischer Stütze

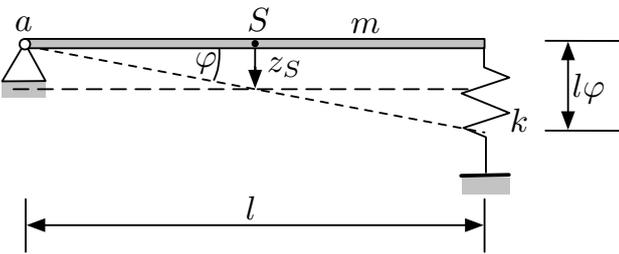


Abbildung 5.18: Träger auf elastischer Stütze

Beispiel: Stabpendel

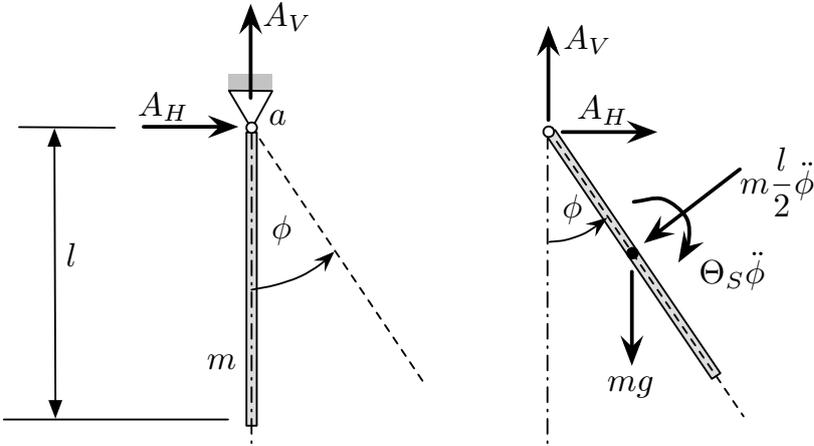


Abbildung 5.19: Stabpendel